应用数学和力学，第14卷第10期（1993年10月） 应用数学和力学编委会编
Applied Mathematics and Mechanics 重庆出版社出版

带裂纹圆柱体扭转的强奇性积分方程解法*

李玉兰　马稚青　汤任基

（兰州大学）（第九设计研究院）（上海交通大学）

（1992年7月10日收到）

摘　　要

本文以裂纹的翘曲位移间断为基本未知函数，把带裂纹圆柱体的扭转问题化为求解一组强奇性积分方程，并利用数值法，对星形及其它不同形状裂纹圆柱体的抗扭刚度和应力强度因子作了数值计算，计算结果令人满意．

关键词　裂纹柱扭转　强奇性积分方程　星形裂纹　抗扭刚度　应力强度因子

一、引　　言

文［1,2］已经表明，使用强奇性积分方程来求解一些混合边值问题，比普通的柯西型积分方程更有效，特别是解的收敛更快．本文把带有多根裂纹圆柱体的扭转问题化为求解一组强奇性积分方程，其积分核的奇性部分为$(\xi-\rho)^{-m}$，$m=2$；而对柯西型积分方程则$m=1$．最后，本文对多种裂纹圆柱作了数值求解．

二、问题的强奇性积分方程

本文所要求解的问题为图1所示的带任意径向裂纹的圆柱，柱体扭转时其不为零的位移和应力分量为：

$$u_\theta=\alpha\rho z,\quad u_z=\alpha\varphi(\rho,\theta) \tag{2.1}$$

$$\sigma_{z\theta}=\frac{\alpha\mu}{\rho}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}+\alpha\mu\rho,\quad \sigma_{z\rho}=\alpha\mu\frac{\partial\varphi}{\partial\rho} \tag{2.2}$$

式中μ为剪切弹性模量，α为扭率，φ为扭曲函数．柱的抗扭刚度为：

$$D=\mu\iint_\Omega\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}+\rho^2\right)d\Omega \tag{2.3}$$

定义在裂纹$L_k(a_k,b_k)$上的翘曲位移间断为：

$$F_k(\xi)=-[u_z(\xi,\pi+\gamma_k)-u_z(\xi,-\pi+\gamma_k)]/2\alpha,\qquad (k=1,2,\cdots,N) \tag{2.4}$$

* 国家教委博士点基金资助项目．

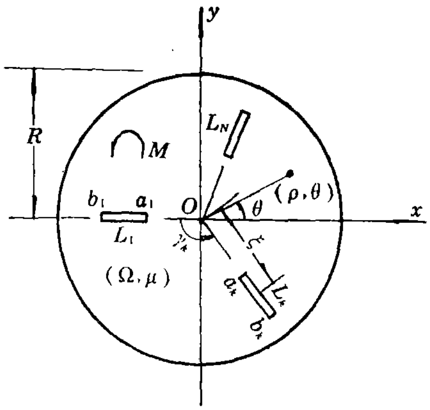

图 1

通过与文[4]类似的推导，可得扭曲函数$\varphi(\rho,\theta)$的表达式：

$$\varphi(\rho,\theta)=-\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{N}\int_{a_k}^{b_k}\left(\frac{\rho\sin(\theta-\gamma_k)}{\xi^2+\rho^2+2\rho\xi\cos(\theta-\gamma_k)}\right.$$

$$\left.+\frac{R^2\rho\sin(\theta-\gamma_k)}{R^4+\rho^2\xi^2+2R^2\xi\rho\cos(\theta-\gamma_k)}\right)F_k(\xi)d\xi \tag{2.5}$$

于是，域Ω中的剪应力由(2.2)求得：

$$\sigma_{z\rho}(\rho,\theta)=-\frac{\alpha\mu}{\pi}\sum_{k=1}^{N}\int_{a_k}^{b_k}\left(\frac{(\xi^2-\rho^2)\sin(\theta-\gamma_k)}{[\xi^2+\rho^2+2\xi\rho\cos(\theta-\gamma_k)]^2}\right.$$

$$\left.+\frac{R^2(R^4-\xi^2\rho^2)\sin(\theta-\gamma_k)}{[R^4+\xi^2\rho^2+2R^2\xi\rho\cos(\theta-\gamma_k)]^2}\right)F_k(\xi)d\xi \tag{2.6}$$

$$\sigma_{z\theta}(\rho,\theta)=\alpha\mu\rho-\frac{\alpha\mu}{\pi}\sum_{k=1}^{N}\int_{a_k}^{b_k}\left(\frac{(\xi^2-\rho^2)\cos(\theta-\gamma_k)+2\xi\rho}{[\xi^2+\rho^2+2\xi\rho\cos(\theta-\gamma_k)]^2}\right.$$

$$\left.+\frac{R^2[(R^4+\xi^2\rho^2)\cos(\theta-\gamma_k)+2R^2\xi\rho]}{[R^4+\xi^2\rho^2+2R^2\xi\rho\cos(\theta-\gamma_k)]^2}\right)F_k(\xi)d\xi \tag{2.7}$$

由于图1中各裂纹表面均无外力作用，即：

$$\sigma_{z\theta}(\rho,\theta=\pi+\gamma_j)=0 \qquad (j=1,2,\cdots,N) \tag{2.8}$$

把(2.7)代入(2.8)并化简便得问题的积分方程组为：

$$\int_{a_j}^{b_j}\frac{F_j(\xi)}{(\xi-\rho)^2}d\xi+\sum_{k=1}^{N}\int_{a_k}^{b_k}K_{jk}(\rho,\xi)F_k(\xi)d\xi=-\pi\rho$$

$$(a_j<\rho<b_j,\ j=1,2,\cdots,N) \tag{2.9}$$

式中积分核$K_{jk}(\rho,\xi)$为：

$$K_{jk}(\rho,\xi)=\begin{cases}\dfrac{R^2}{(R^2-\xi\rho)^2}, & j=k\\[2ex] \dfrac{(\xi^2+\rho^2)\cos(\gamma_j-\gamma_k)-2\xi\rho}{[\xi^2+\rho^2-2\xi\rho\cos(\gamma_j-\gamma_k)]^2}+\dfrac{R^2[(R^4+\xi^2\rho^2)\cos(\gamma_j-\gamma_k)-2R^2\xi\rho]}{[R^4+\xi^2\rho^2-2R^2\xi\rho\cos(\gamma_j-\gamma_k)]^2}, & j\neq k\end{cases} \tag{2.10}$$

方程(2.9)即本文所要建立的强奇性积分方程组，它包含二阶奇性核$(\xi-\rho)^{-2}$，此方程在Cauchy主值意义下也是发散的，故应理解为Hadamard意义下的有限部分积分[1]，所对应的积分算子符号记为$\oint$.

若从方程(2.9)中求得函数$F_k(\xi)$，问题就得到解决.

柱体的抗扭刚度可根据(2.3)求得：

$$D=\frac{\pi}{2}\mu R^4-2\mu\sum_{k=1}^{N}\int_{a_k}^{b_k}F_k(\xi)\xi d\xi \tag{2.11}$$

裂纹端点a_k和b_k的应力强度因子由下式计算：

$$K(a_k)=\alpha\mu\lim_{\rho\to a_k}\frac{F_k(\rho)}{\sqrt{2(\rho-a_k)}} \tag{2.12}$$

$$K(b_k)=-\alpha\mu\lim_{\rho\to b_k}\frac{F_k(\rho)}{\sqrt{2(b_k-\rho)}} \tag{2.13}$$

三、强奇性积分方程的数值解

根据奇异积分方程的解析理论[3]，可将$F_k(\xi)$表示为：

$$F_k(\xi)=(b_k-\xi)^{\alpha_k}(\xi-a_k)^{\beta_k}V_k(\xi)\qquad(k=1,2,\cdots,N) \tag{3.1}$$

其中$V_k(\xi)$为定义在$[a_k,b_k]$上的有界连续函数，α_k和β_k是反映函数$F_k(\xi)$在裂纹端点b_k和a_k邻域内渐近性态的指数. 已知当裂纹为内裂纹时，$\alpha_k=\beta_k=1/2$；当裂纹为边裂纹($b_k=R$)时，$\alpha_k=0,\beta_k=1/2$；当裂纹的一个端点在圆心处交汇成星形裂纹($a_k=0$，$b_k<R$)时，$\alpha_k=1/2$，$\beta_k=0$，此时还应满足一个定解条件：

$$\sum_{k=1}^{N}b_k^{\alpha_k}V_k(0)=0 \tag{3.2}$$

取下列标准化参量：

$$\left.\begin{aligned}
&\xi=\frac{b_k-a_k}{2}t+\frac{b_k+a_k}{2},\quad \rho=\frac{b_j-a_j}{2}+\frac{b_j+a_j}{2}\\
&F_k(\xi)=\frac{b_k-a_k}{2}F_k^0(t)\\
&K_{jk}^0(s,t)=\left(\frac{b_k-a_k}{2}\right)^2K_{jk}(\rho,\xi)\\
&p_j(s)=-\pi\rho=-\pi\left(\frac{b_j-a_j}{2}s+\frac{b_j+a_j}{2}\right)
\end{aligned}\right\} \tag{3.3}$$

则积分方程(2.9)的标准形式为：

$$\oint_{-1}^{1}\frac{F_j^0(t)}{(t-s)^2}dt+\sum_{k=1}^{N}\int_{-1}^{1}K_{jk}^0(s,t)\cdot F_k^0(t)dt=p_j(s)$$

$$(-1<s<1,j=1,2,\cdots,N) \tag{3.4}$$

(3.1)式变为：

$$F_k^0(t)=(1-t)^{\alpha_k}(1+t)^{\beta_k}V_k^0(t),\qquad(-1<t<1,\ k=1,2,\cdots,N) \tag{3.5}$$

定解条件 (3.1) 变为：

$$\sum_{k=1}^{N} b_k V_k^0(-1)=0 \tag{3.6}$$

以上式子中$V_k^0(t)$为新的未知函数，可用截断级数近似表达为：

$$V_k^0(t)=\sum_{m=0}^{M_k}\lambda_m^k\psi_m(t) \tag{3.7}$$

其中 λ_m^k 为待定系数，$\{\psi_m(t)\}$为一组已知的完备函数列，可取幂函数，Chebyshev 多项式等，具体的选取视解题的方便和精度而定．

把(3.7)代入(3.4)和(3.6)并化简得：

$$\sum_{k=1}^{N}\sum_{m=0}^{M_k}\lambda_m^k G_m^{jk}(s)=p_j(s) \qquad (-1<s<1,\ j=1,2,\cdots,N) \tag{3.8}$$

$$\sum_{k=1}^{N} b_k \sum_{m=0}^{M_k}\lambda_m^k\psi_m(-1)=0 \tag{3.9}$$

其中

$$G_m^{jk}(s)=\delta_{jk}R_m(s)+\int_{-1}^{1}K_{jk}^0(s,t)(1-t)^{\alpha_k}(1+t)^{\beta_k}\psi_m(t)dt \tag{3.10}$$

$$R_m(s)=\int_{-1}^{1}\frac{1}{(t-s)^2}(1-t)^{\alpha_k}(1+t)^{\beta_k}\psi_m(t)dt \tag{3.11}$$

为了求得未知系数λ_m^k，可用配置点法将方程(3.8)化为一组关于 λ_m^k 的线性代数方程组，这里所选取的配置点为第一类 Chebyshev多项式$T_{M_j+1}(s)$的零点：

$$S_n^j=\cos\left(\frac{2n+1}{2(M_j+1)}\pi\right) \qquad (n=0,1,2,\cdots,M_j) \tag{3.12}$$

代入 (3.8) 得：

$$\sum_{k=1}^{N}\sum_{m=0}^{M_k}\lambda_m^k\cdot G_m^{jk}(S_n^j)=p_j(S_n^j) \qquad (n=0,1,2,\cdots,M_j;\ j=1,2,\cdots,N) \tag{3.13}$$

对于星状裂纹的情形，要从方程组(3.13) 和 (3.9)共$\sum_{j=1}^{N}M_j+1$个方程中解出$\sum_{j=1}^{N}M_j$个未知数λ_m^k，可采用最小二乘法求解．

当求得λ_m^k后，柱体的抗扭刚度和应力强度因子可由(2.11)～(2.13)离散成为：

$$D=\frac{\pi}{2}\mu R^4-2\mu\sum_{k=1}^{N}\left(\frac{b_k-a_k}{2}\right)^2\sum_{m=0}^{M_k}\lambda_m^k\int_{-1}^{1}(1-t)^{\alpha_k}(1+t)^{\beta_k}$$

$$\cdot\psi_m(t)\left(\frac{b_k-a_k}{2}t+\frac{b_k+a_k}{2}\right)dt \tag{3.14}$$

$$K(a_k)=\alpha\mu\sqrt{b_k-a_k}\,2^{\alpha_k-1}\sum_{m=0}^{M_k}\lambda_m^k\psi_m(-1), \qquad 当\beta_k=\frac{1}{2} \tag{3.15}$$

$$K(b_k) = -\alpha\mu\sqrt{b_k - a_k}\, 2^{\beta_k - 1}\sum_{m=0}^{M_k}\lambda_m^k \psi_m(1), \qquad 当\alpha_k = \frac{1}{2} \tag{3.16}$$

四、数 值 结 果

为了说明强奇性积分方程及其数值解的应用，本节讨论带有三根对称分布裂纹的扭转问题．在图1中，取参数$N=3$，参考角$\gamma_1=0$，$\gamma_2=2\pi/3$，$\gamma_3=4\pi/3$．各裂纹的长度相等：$a_1=a_2=a_3=a$，$b_1=b_2=b_3=b$，从而$\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=\alpha$，$\beta_1=\beta_2=\beta_3=\beta$，并取$M_1=M_2=M_3$．我们假设柱端作用的扭矩为$M$，且记常数$D_0=\pi\mu R^4/2$；$K_0=\mu MR\sqrt{(b-a)}/2/D_0$．

首先，我们对数值解的收敛性进行了讨论，结果在通常情况下，截断近似级数仅取5或6项时，解答已收敛得很好．下面给出三种不同形状裂纹的例子．

例1　内裂纹($a>0$，$b<R$)．取$\psi_m(t)$为第二类Chebyshev多项式：

$$\psi_m(t) = U_m(t) = \frac{\sin[(1+m)\arccos t]}{\sqrt{1-t^2}} \tag{4.1}$$

积分(3.11)成为：

$$R_m(s) = \int_{-1}^{1}\frac{U_m(t)}{(t-s)^2}\sqrt{1-t^2}\,dt - \pi(m+1)U_m(s) \tag{4.2}$$

图2和图3分别给出抗扭刚度D及应力强度因子$K(a)$，$K(b)$随参数$(b-a)/(b+a)$和$(b+a)/2R$的变化曲线．

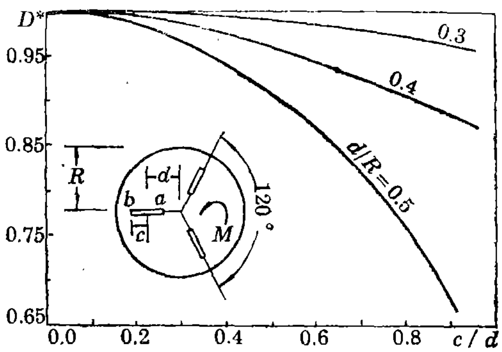

图2　$D^*=D/D_0$

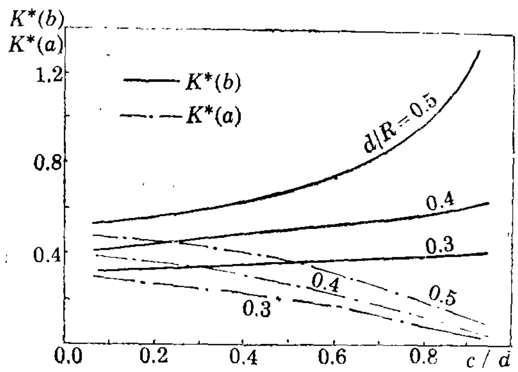

图3　$K^*(a)=K(a)/K_0$，$K^*(b)=K(b)/K_0$

例2　边裂纹($a>0$，$b=R$)．取函数$\psi_m(t)$为：

$$\psi_m(t) = t^m \tag{4.3}$$

积分(3.11)成为：

$$R_m(s) = \int_{-1}^{1}\frac{\sqrt{1+t}}{(t-s)^2}t^m dt = -S^m\left[\frac{1}{2\sqrt{1+s}}\ln|B_1| + \frac{\sqrt{2}}{1-s}\right]$$

$$-mS^{m-1}[\sqrt{1+s}\ln|B_1| - 2\sqrt{2}] + \sum_{k=0}^{m-2}(-1)^k A_k S^{m-k-2} \tag{4.4}$$

其中：
$$A_k=4\sqrt{2}\ (m-k-1)\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{k}{i}\frac{2^i}{2i+3} \tag{4.5}$$

$$B_1=\left(1+\sqrt{\frac{1+s}{2}}\right)\Big/\left(1-\sqrt{\frac{1+s}{2}}\right) \tag{4.6}$$

计算结果随a/R的变化如图4所示。当$a/R=0$时，三条边裂纹将圆柱切割成三个夹角为$2\pi/3$的扇形柱体，每一扇形柱的抗扭刚度为$D/D_0=0.091814$，而其精确解已由文献[6]解得：$D/D_0=0.091819$。

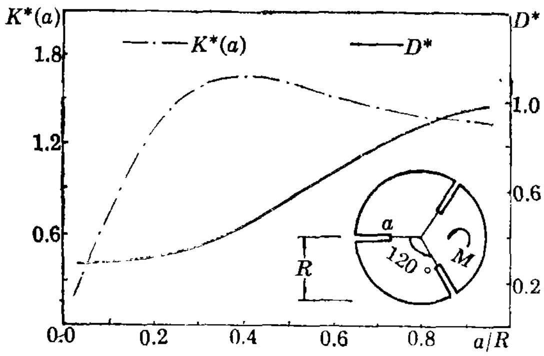

图4　$D^*=D/D_0$，$K^*(a)=K(a)/K_0$

例3　星形裂纹($a=0,b<R$)。这时函数$\psi_m(t)$仍取(4.3)的形式，则积分(3.11)成为：

$$R_m(s)=\int_{-1}^{1}\frac{\sqrt{1-t}}{(t-s)^2}t^m dt=-S^m\left[\frac{\ln|B_2|}{2\sqrt{1-s}}+\frac{\sqrt{2}}{1+s}\right]$$
$$+mS^{m-1}[\sqrt{1-s}\ \ln|B_2|-2\sqrt{2}]+\sum_{k=0}^{m-2}A_kS^{m-k-2} \tag{4.7}$$

$$B_2=\left(1+\sqrt{\frac{1-s}{2}}\right)\Big/\left(1-\sqrt{\frac{1-s}{2}}\right) \tag{4.8}$$

其中A_k仍由(4.5)给出。

计算结果随参数b/R的变化如图5所示。为了验证星形裂纹结果的可靠性，我们让两条共线裂纹在圆心交汇成一直线裂纹（取参数：$N=2$，$\gamma_1=0$，$\gamma_2=\pi$）进行计算，其结果与文献

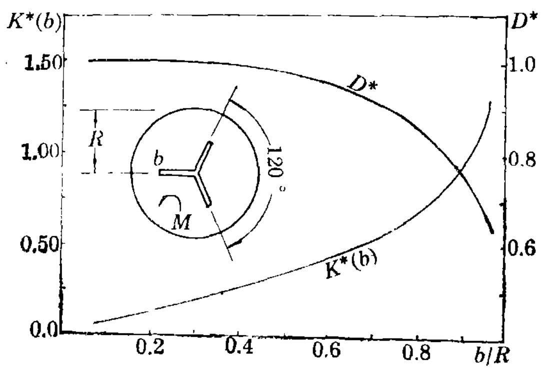

图5　$D^*=D/D_0$，$K^*(b)=K(b)/K_0$

[5]的结果符合很好．这说明本文的方法对星形裂纹的处理是成功的．

参 考 文 献

[1] Kaya, A. C. and F. Erdogan, On the solution of integral equations with strongly singular kernels, *Quart. Appl. Math.*, 45 (1987), 105—122.

[2] Kaya, A. C. and F. Erdogan, On the solution of integral equations with a generalized Cauchy kernal, *Quart. Appl. Math.*, 45 (1987), 455—469.

[3] Мусхелишвили Н. И., 《奇异积分方程》，赵惠元译，上海科学技术出版社（1966）.

[4] 汤任基，带裂纹圆柱体的Saint-Venant扭转，力学学报，(4) (1982), 332—340.

[5] 王晓春、汤任基，关于多裂纹圆柱体的扭转，应用数学和力学，9(8) (1988), 693—701.

[6] 钱伟长、林鸿荪、胡海昌、叶开沅，《弹性柱体的扭转理论》，科学出版社（1956）.

The Solution of Integral Equations with Strongly Singular Kernels Applied to the Torsion of Cracked Circular Cylinder

Li Yu-lan

(*Lanzhou University, Lanzhou*)

Ma Zhi-qing

(*The 9th Design & Research Institute, CSSC, Shanghai*)

Tang Ren-ji

(*Shanghai Jiaotong University, Shanghai*)

Abstract

In this paper, the functions of warping displacement interruption defined on the crack lines are taken for the fundamental unknown functions. The torsion problem of cracked circular cylinder is reduced to solving a system of integral equations with strongly singular kernels. Using the numerical method of these equations, the torsional rigidities and the stress intensity factors are calculated to solve the torsion problem of circular cylinder with star-type and other different types of cracks. The numerical results are satisfactory.

Key words torsion of cracked cylinder, strongly singular integral equation, star-type crack, torsional rigidity, stress intensity factor