

时空Chaos研究中的CML模型*

黄欣 刘曾荣 谢惠民

(苏州大学数学系, 中国科学院力学研究所LNM开放实验室; 1992年4月2日收到)

摘 要

通过对有关差分格式的稳定性分析, 我们提出了一类新的格点耦合映射(CML)模型. 数值试验表明: 我们提出的CML模型是一类有效的研究时空复杂性的模型, 特别是对于强耦合系统.

关键词 CML模型 强耦合 时空Chaos

一、引 言

在当前非线性科学中, 对于复杂系统动力学的研究是一个重要课题. 就低维动力系统而言, 对于chaos的研究, 无论是数值模拟还是理论论证都有了许多富有建设性的成果^[1]. 但是在现实世界中, 更大量存在的是高维的甚至是无穷维的动力系统. 它们的动力行为一方面随时间而演化, 另一方面由于系统内部诸元的相互作用产生了空间复杂的pattern图形. 这种时空复杂性与低维的chaos有着很大的不同. 为此, 近年来有人提出耦合映射格点(CML)动力系统作为研究这种时空复杂性的范例, 并用数值方法得到了一些初步的但是很有意义的成果^[2~4]. 这种模型的理论分析还很少见到, 就我们所知只有在[5~7]中提到.

CML模型的特点是时间和空间离散, 而状态为连续, 它既能使低维动力学理论运用到高维系统, 又能观察到随着参数改变时相应时空pattern的变化情况.

目前研究得最多的CML模型为

$$x_{n+1}(i) = (1-\varepsilon)f(x_n(i)) + \frac{\varepsilon}{2}[f(x_n(i-1)) + f(x_n(i+1))] \quad (1.1)$$

其中 n 是时间, i 是格点 ($i=1, 2, \dots, N$; N 是系统大小), ε 是耦合强度, 取周期边界条件, 并令 $f(x)$ 为logistic映射 $f(x) = 1 - ax^2$.

文[2]的结果表明: 取定耦合强度 ε , 随着logistic映射中非线性系数 a 的逐步增大, 系统的状态分别为: frozen random pattern, pattern选择, 局部的chaotic defect, defect turbulence, fully developed turbulence.

然而, 原有的工作仅限于研究弱的耦合强度 (如 $\varepsilon=0.1, 0.3$). 当我们取强耦合时 ($\varepsilon>1$), 用模型(1.1)或发现 pattern 表现出相当不规则的状态, 或出现计算机数值溢出.

* 钱伟长推荐.

国家自然科学基金资助项目.

这些现象显然是不合理的. 我们对差分格式的稳定性分析也说明模型(1.1)不适合于强耦合系统.

为了更有效地进行时空chaos研究, 我们在本文中提出以下的CML模型

$$\left. \begin{aligned} (1+\varepsilon)x_n(1) - \frac{\varepsilon}{2}x_n(2) &= f(x_{n-1}(1)) + \frac{\varepsilon}{2}f(x_{n-1}(N)) \\ -\frac{\varepsilon}{2}x_n(i-1) + (1+\varepsilon)x_n(i) - \frac{\varepsilon}{2}x_n(i+1) &= f(x_{n-1}(i)) \quad (i=2,3,\dots,N-1) \\ -\frac{\varepsilon}{2}x_n(N-1) + (1+\varepsilon)x_n(N) &= f(x_{n-1}(N)) + \frac{\varepsilon}{2}f(x_{n-1}(1)) \end{aligned} \right\} \quad (1.2)$$

仍取 f 为logistic映射, 我们对模型(1.2)进行了数值试验, 并把得到的结果与模型(1.1)的相应结果进行了比较. 从中我们知道, 模型(1.2)不仅保留了弱耦合时模型(1.1)非常丰富的pattern行为, 而且在强耦合时反映出更为合理的时空pattern行为. 因此, 我们认为对强耦合系统进行研究, 使用模型(1.2)更为有效.

二、CML模型的分析

CML模型反映反应—扩散效应, 本质上反映局部非线性动力性态(反应)和空间耦合(扩散)的相互作用, 与反应—扩散方程十分接近. 在某些极限情况下可建立两者之间的直接关系^[3].

我们考虑典型的扩散方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\varepsilon}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad \varepsilon > 0 \quad (2.1)$$

在 $y-t$ 平面的第一象限用坐标线

$$y = y_i = i \quad (i=1, 2, \dots, N)$$

$$t = t_n = n \quad (n=0, 1, 2, \dots)$$

分为格网. 记 $u_i^n = u(y_i, t_n) = u(i, n)$, 得扩散方程(2.1)的差分显格式为

$$u_i^{n+1} = (1-\varepsilon)u_i^n + \frac{\varepsilon}{2}(u_{i-1}^n + u_{i+1}^n) \quad (2.2)$$

由文[8]知, 差分格式(2.2)稳定的充要条件是网比 $r = \varepsilon/2 \leq 1/2$, 即 $\varepsilon \leq 1$. 当 $\varepsilon > 1$, 即格式(2.2)不稳定时, 随着时间 n 逐步增大, 误差积累恶性发展, 不仅要湮没真解, 而且会导致计算的垮台(如数值溢出).

在差分格式(2.2)中, 令 $u_i^n = f(x_n(j))$ ($j=1, 2, \dots, N$), $u_i^{n+1} = x_{n+1}(i)$ ($i=1, 2, \dots, N$), 即得CML模型(1.1). 特别若我们考虑均匀状态, 即取 $x_0(j)$ ($j=1, 2, \dots, N$)为 $f(x)$ 的不动点 x^* 时, 模型(1.1)就是差分格式(2.2). 上面的分析说明了模型(1.1)在 $\varepsilon > 1$ 时是不合理的.

我们也可以从数值试验结果上看到这种不合理性. 我们知道, 扩散项的存在使运动趋于空间有序状态, 反映在CML模型中, 耦合强度 ε 的增加应当使运动变得更为规则. 在弱耦合情况下, 模型(1.1)的研究也表明了pattern随 ε 的这种变化趋势(见图1). 随着 ε 的增加, 域长逐步增加, 状态趋于规则、均匀. 但当 ε 在1附近, 并继续增加时却出现相反的情况(比较图1(d) ($a=1.41$, $\varepsilon=0.8$)和图1(a) ($a=1.1$, $\varepsilon=1.0$). 系统的真实性质不能有效地反映出来.

为此，我们改进模型(1.1)，使之能适用于强耦合系统，我们考虑扩散方程(2.1)的差分隐格式

$$-\frac{\epsilon}{2}u_{i-1}^n + (1+\epsilon)u_i^n - \frac{\epsilon}{2}u_{i+1}^n = u_i^{n-1} \tag{2.3}$$

(2.3)是恒稳的。在其中令 $u_i^n = x_n(j)$ ($j=1, 2, \dots, N$)， $u_i^{n-1} = f(x_{n-1}(i))$ ($i=1, 2, \dots, N$)，并考虑对足够大的格点系统，系统的动力性态不依赖于边界条件（见文[3]）。取边界条件 $u_0^n = f(x_{n-1}(N))$ ， $u_{N+1}^n = f(x_{n-1}(1))$ 得我们定义的CML模型(1.2)

$$\begin{aligned} (1+\epsilon)x_n(1) - \frac{\epsilon}{2}x_n(2) &= f(x_{n-1}(1)) + \frac{\epsilon}{2}f(x_{n-1}(N)) \\ -\frac{\epsilon}{2}x_n(i-1) + (1+\epsilon)x_n(i) - \frac{\epsilon}{2}x_n(i+1) &= f(x_{n-1}(i)) \quad (i=2, 3, \dots, N-1) \\ -\frac{\epsilon}{2}x_n(N-1) + (1+\epsilon)x_n(N) &= f(x_{n-1}(N)) + \frac{\epsilon}{2}f(x_{n-1}(1)) \end{aligned}$$

数值结果表明，模型(1.2)给出了合理的pattern动力学行为。

三、两种CML模型数值结果的比较

我们知道局部格点的chaos运动由于对初值的敏感性驱使系统产生不均匀状态，而扩散项趋于产生空间均匀状态。在CML模型中，这两种倾向互相冲突、互相竞争，分别取不同的非线性系数 a 和耦合强度 ϵ ，系统就产生变化多端的动力学性态。

本文展示的所有空间振幅图均取映射 $f(x) = 1 - ax^2$ ，适当的参数 a, ϵ ，格点数 $N = 100$ ，随机选取初值，去暂态1000次，图示第1001步至1050步的振幅 $x_n(i)$ 而得到。

对模型(1.2)取与模型(1.1)在文[2]图2中相同的参数 $\epsilon = 0.1, a = 1.44, 1.64, 1.72, 1.8, 1.9$ 进行计算得一组图(图3)。比较图3和文[2]中图2这两组图，可以看到虽然它们略有不同，但同样反映了随logistic映射的非线性增加，系统动态从frozen pattern到pattern选择，到局部chaotic defect，直至defect turbulence的全过程。这表明在取弱耦合强度时，两种模型同样反映时空pattern的性态。

在以上参数条件下，计算模型(1.1)和模型(1.2)的静态pattern熵（去暂态1000次，对1001至6000时间步统计）

$$s_p = - \sum_j Q(j) \log Q(j)$$

其中 $Q(j)$ 为空间点进入长为 j 的域的概率，得表1。

表 1

模型 \ a	1.44	1.64	1.72	1.8	1.9
(1.1)	1.972	0.653	0.551	0.338	1.297
(1.2)	1.999	0.673	0.470	0.277	1.842

由文[4]可知，这些动力学行为在相同参数下表现的pattern是同种性质。由此进一步证实了在耦合比较小时，模型(1.1)和模型(1.2)表现出相同的时空性态。

但是我们加大耦合系数发现如下结果:

(1) 当 $\varepsilon < 0.9$ 时, 数值结果表明, 随 ε 的增加, 两种模型的pattern均表现为域长逐步

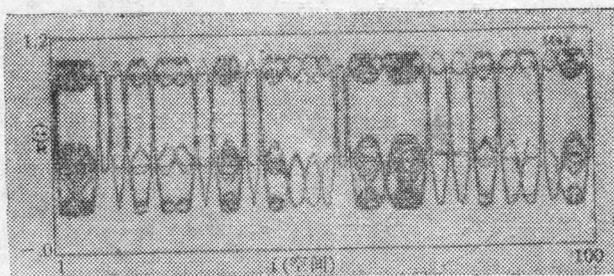


图1(a) $a=1.44, \varepsilon=0.2$

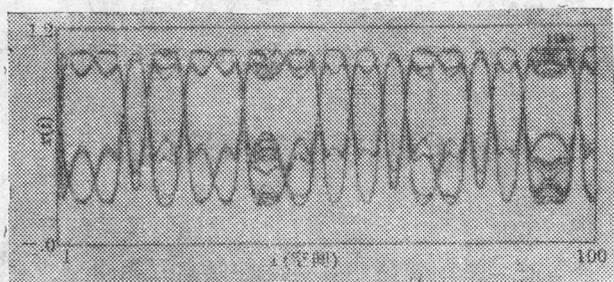


图1(b) $a=1.44, \varepsilon=0.4$

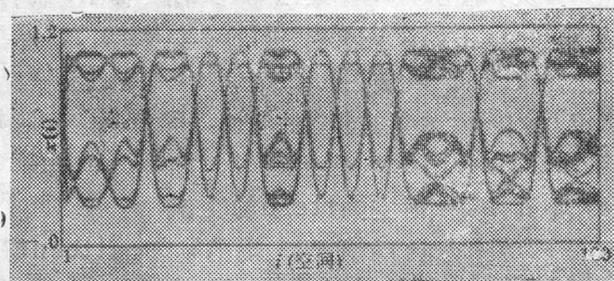


图1(c) $a=1.44, \varepsilon=0.6$



图1(d) $a=1.44, \varepsilon=0.8$

图1 CML模型(1.1)的空间-振幅图

增加, 状态趋于规则、均匀, 见图1 (模型(1.1)), 图4(模型(1.2)). 在这两组图中同取 $a=1.44, \varepsilon=0.2, 0.4, 0.6, 0.8$.

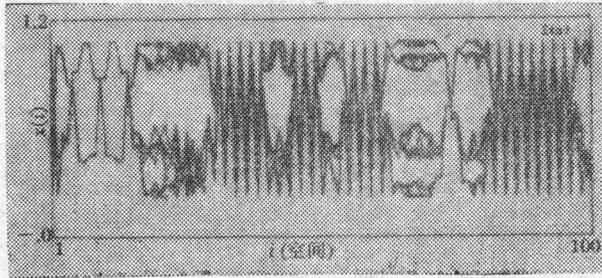


图2(a) $\varepsilon=1, a=1.44$

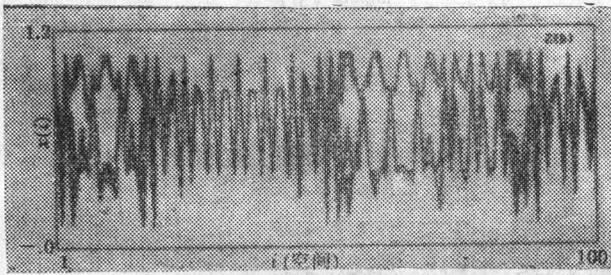


图2(b) $\varepsilon=1, a=1.64$

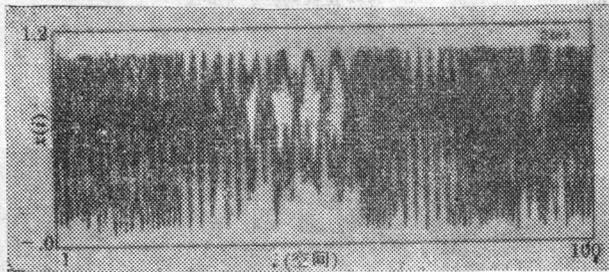


图2(c) $\varepsilon=1, a=1.72$

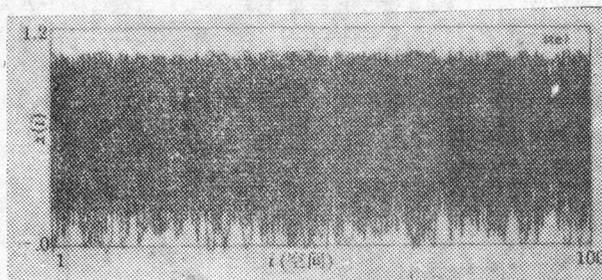


图2(d) $\varepsilon=1, a=1.8$

图2 CML模型(1.1)的空间-振幅图

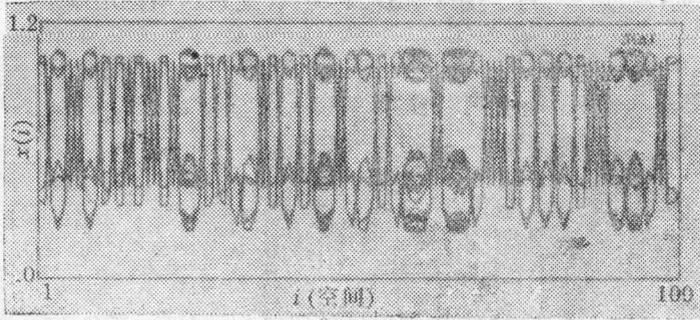


图3(a) $\epsilon=0.1, a=1.44$

图3(b) $\epsilon=0.1, a=1.64$

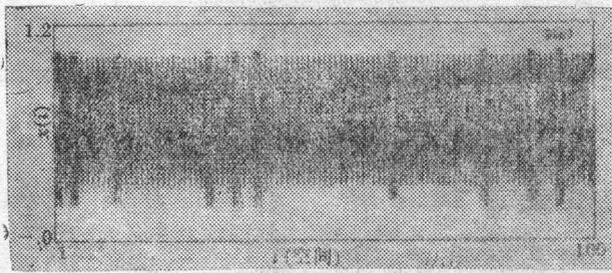
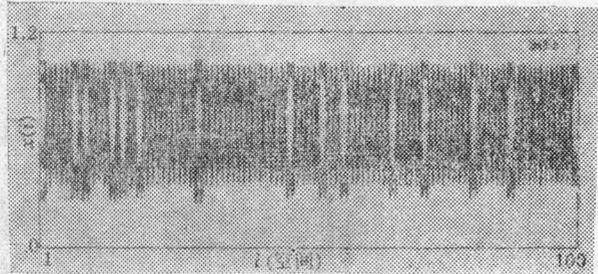


图3(c) $\epsilon=0.1, a=1.72$

图3(d) $\epsilon=0.1, a=1.8$

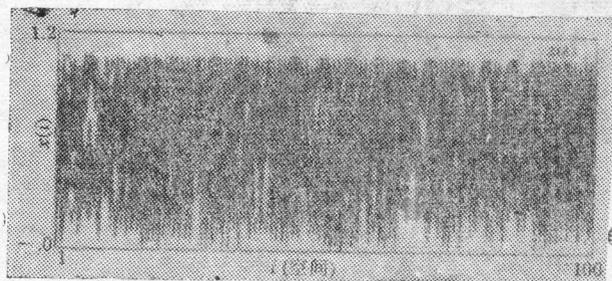
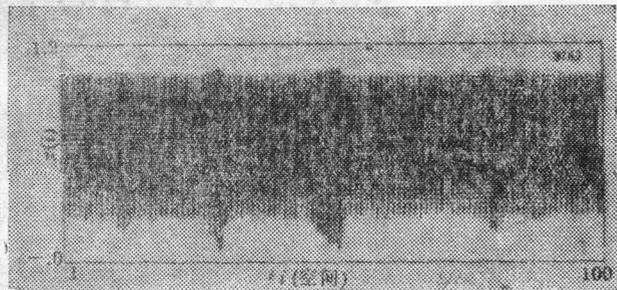


图 3(e) $\epsilon=0.1, a=1.9$

图3 CML模型(1.2)的空间-振幅图

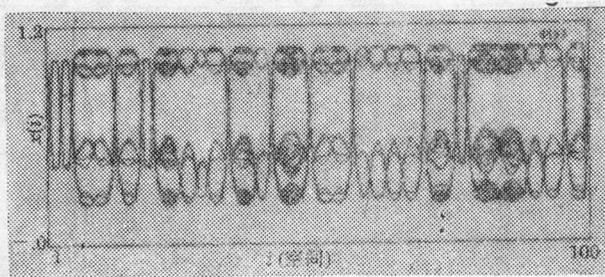


图4(a) $a=1.44, \epsilon=0.2$

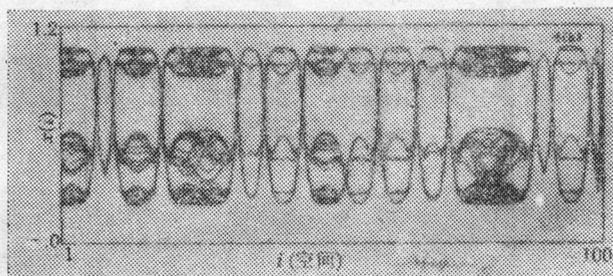


图4(b) $a=1.44, \epsilon=0.4$

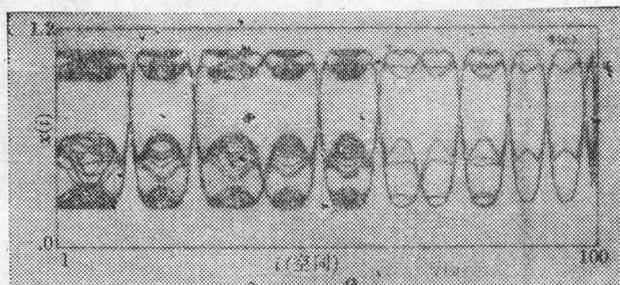


图4(c) $a=1.44, \epsilon=0.6$

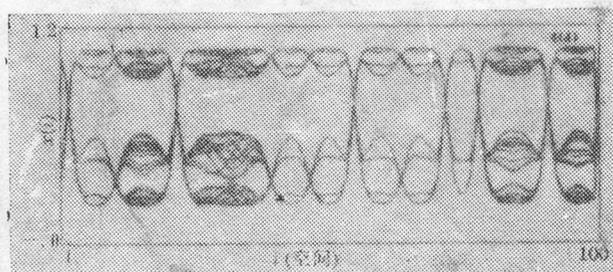


图4(d) $a=1.44, \epsilon=0.8$

图4 CML模型(1.2)的空间—振幅图

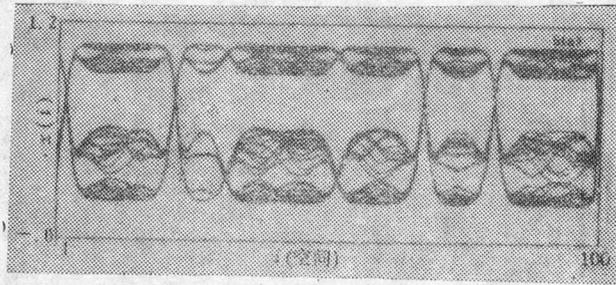


图5(a) $\epsilon=1, a=1.44$

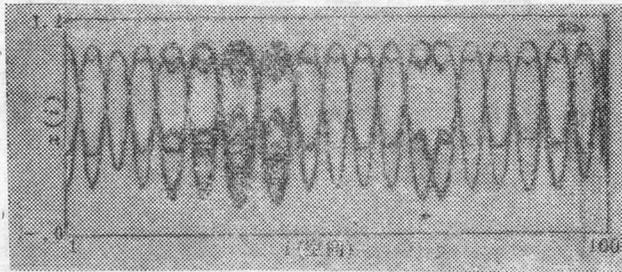


图5(b) $\epsilon=1, a=1.64$

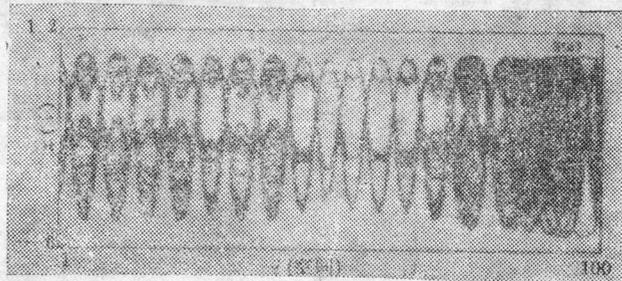


图5(c) $\epsilon=1, a=1.72$

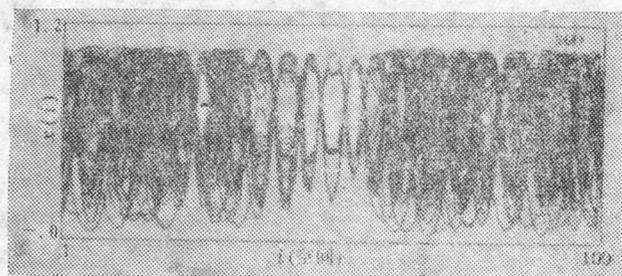


图5(d) $\epsilon=1, a=1.8$

图5 CML模型(1,2)的空间-振幅图

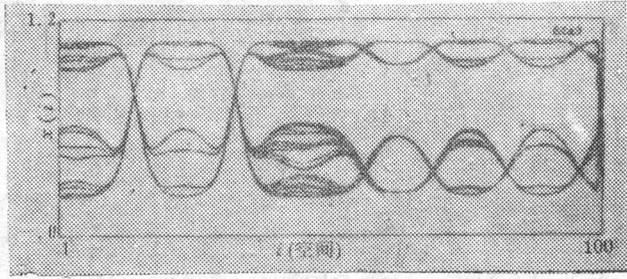


图6(a) $\epsilon=3, \alpha=1.44$

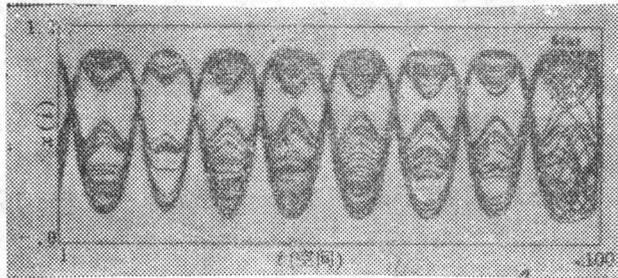


图6(b) $\epsilon=3, \alpha=1.64$

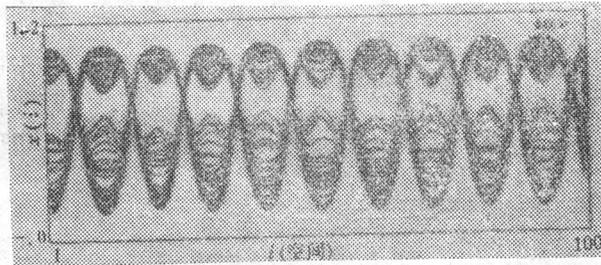


图6(c) $\epsilon=3, \alpha=1.72$

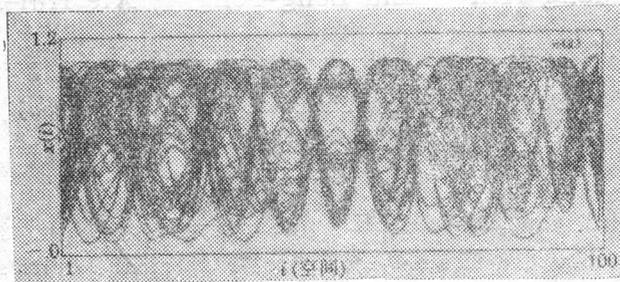


图6(d) $\epsilon=3, \alpha=1.8$

图6 CML模型(1.2)的空间-振幅图

(2) 取 $\varepsilon=1$ 时, 模型(1.2)的pattern继续反映(1)中性态; 而模型(1.1)的pattern突然改变趋于均匀性态的特点, 长的域崩溃, 表现出无规则状态, 见图2(模型(1.1)), 图5(模型(1.2)). 两组图同取 $\varepsilon=1$, $a=1.14, 1.64, 1.72, 1.8$.

(3) ε 继续增加, 模型(1.2)的pattern仍趋于规则; 而模型(1.1)数值溢出, 见图6(模型(1.2)). 图中取 $\varepsilon=3$, $a=1.14, 1.64, 1.72, 1.8$.

上述数值结果明确地表示了对于强耦合情况, 模型(1.2)能得到合理的结果, 而模型(1.1)就失效了. 因此我们认为在研究高维时间-空间复杂系统中, 当耦合强度比较弱时, 可以采用模型(1.1); 但当耦合强度大时, 采用模型(1.2)更有效.

1991年1月由中科院理论物理所召开的非线性工作周上的讨论给了我们不少启发, 尤其是与理论物理所杨维民同志的讨论给了我们很大的帮助, 在此表示谢意.

参 考 文 献

- [1] Berlin, Hao, *Chaos*, World Scientific, Singapore (1987).
- [2] Kaneko, K., Pattern dynamics in spatiotemporal chaos, *Physica*, **D34** (1989), 1-41.
- [3] Crutchfield, J. P. and K. Kaneko, Phenomenology of spatiotemporal chaos, *Directions in Chaos*, World Scientific, Singapore (1987).
- [4] Kaneko, K., Clustering, coding switching hierarchical ordering, and control in a network of chaotic elements, *Physica*, **D41** (1990), 137-172.
- [5] Livi, R., G. Mortinez-Mekler and S. Ruffo, Periodic orbit and long transients in coupled map lattices, *Physica*, **D45** (1990), 45-160.
- [6] Aranson, I. S., V. S. Afraimovich and M. I. Rabinovich, Stability of spatially homogeneous chaotic regimes in unidirectional chains, *Nonlinearity*, **3**(3) (1990), 639-651.
- [7] Volevich, V. L., Kinetics of coupled map lattices, *Nonlinearity*, **4**(1) (1991), 37-48.
- [8] 冯康, 《数值计算方法》, 国防工业出版社 (1979).

On CML Model for Study of Spatiotemporal Chaos

Huang Xin Liu Zeng-rong Xie Hui-min

(LNM, Institute of Mechanics, Academia Sinica, Beijing,

Dept. of Math., Suzhou University, Suzhou)

Abstract

A new coupled map lattice (CML) model is given by using some stability analysis for the related difference equations. Numerical results show that the new model is an effective one for studying spatiotemporal chaos, especially for strongly coupled systems.

Key words CML model, strong coupling, spatiotemporal chaos