

金属材料热处理过程中的瞬态温度场 与瞬态相变的数值计算方法

袁发荣 杨书申

(福建省闽江办) (河南纺织机械厂)
(蒋咏秋推荐, 1992年6月15日收到)

摘 要

本文首先将 Kirchhoff 变换推广到导热系数为温度的多项式的非常非线性热传导问题, 并用分析方法确定热传导问题的边界条件。

其次提出以孕育期叠加法并引用线性混合法则来模拟金属热处理过程的多相瞬态相变, 较为简便地确定相变的开始时间、相变的种类及相变组织的数量。

最后利用三维双重边界元法分析工件多种形式的热处理全过程, 算例的数值计算结果表明本文方法行之有效。

关键词 热处理 相变 温度场

一、非线性热传导问题的线性化处理 - Kirchhoff变换的引用

金属物体加热和冷却过程中的瞬态温度场问题, 可归结为如下非定常非线性热传导问题^[1]

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k_x \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k_y \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) + Q = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} \quad (\forall (x, y, z) \in \Omega) \quad (1.1a)$$

$$k \frac{\partial T}{\partial n} = -q \quad (\forall (x, y, z) \in \Gamma) \quad (1.1b)$$

$$T = T_0 \quad (\forall (x, y, z) \in \Omega, t = 0) \quad (1.1c)$$

其中 k_x, k_y, k_z 分别为物体沿坐标轴 x, y, z 方向的热传导系数, 对于金属可认为 $k_x = k_y = k_z = k, c_p$ 为比热, ρ 为密度, Q 为内热源, q 为热流密度, T 与 T_0 分别为物体的瞬时温度与初始温度, t 为时间, Ω 与 Γ 为求解区域与其边界, n 为边界外法线方向。

本文引用 Kirchhoff 变换

$$\psi = \int_{T_0}^T k(T) dT \quad (1.2)$$

将式(1.2)代入(1.1), 有

$$\frac{1}{\alpha} \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \bar{Q} \quad (\forall (x, y, z) \in \Omega) \quad (1.3a)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial n} = -q \quad (\forall (x, y, z) \in \Gamma) \quad (1.3b)$$

$$\psi = \psi_0 \quad (\forall (x, y, z) \in \Omega, t=0) \quad (1.3c)$$

式中 $\alpha = k/\rho C_p$ 为热扩散系数, \bar{Q} 为相变潜热, 它们在每一时间步长内可近似取为常数. 因此式(1.3a)可简化为线性方程

$$\frac{1}{\alpha} \frac{\partial \psi}{\partial t} = \nabla^2 \psi + \bar{Q} \quad (1.4)$$

二、Kirchhoff变换的推广及其逆变换收敛性的证明

为确定式(1.2)中 $k(T)$ 在多相组织情况下的具体表达式, 本文利用线性混合法则^[2]来确定金属物体的热传导系数. 设金属物体在某一时刻有 N 相存在, k_i 与 $V_i (i=1, 2, \dots, N)$ 分别表示第 i 相的热传导系数与所占的体积百分比, 并用多项来拟合热传导系数随温度而变化

$$k_i = a_i + b_i T + c_i T^2 + d_i T^3 + e_i T^4 \quad (2.1)$$

其中 a_i 等均为常数. 于是

$$K = A + BT + CT^2 + DT^3 + ET^5 \quad (2.2)$$

其中 $A = \sum_{i=1}^N a_i V_i$, $B = \sum_{i=1}^N b_i V_i, \dots, K = \sum_{i=1}^N k_i V_i$

将式(2.2)代入(1.2), 得

$$\psi = A(T - T_0) + B(T^2 - T_0^2)/2 + C(T^3 - T_0^3) + D(T^4 - T_0^4) + E(T^5 - T_0^5) \quad (2.3)$$

$$T = \psi/A + T_0 - B(T^2 - T_0^2)/2A - C(T^3 - T_0^3)/3A - D(T^4 - T_0^4)/4A - E(T^5 - T_0^5)/5A \quad (2.4)$$

记 $T = f(T)$, 则有迭代式

$$T_{n+1} = f(T_n) \quad (2.5)$$

当 $n \rightarrow \infty$ 时, 可求得 ψ 对应的.

下面证明迭代式(2.5)是收敛的, 即 Kirchhoff 逆交换是收敛的.

根据 Lipschitz 条件, 若对于任意的 T_1, T_2 都有

$$|f(T_1) - f(T_2)| \leq L |T_1 - T_2| \quad (L < 1) \quad (2.6)$$

其中 L 是与 T_1, T_2 无关的正常数 (Lipschitz 常数), 则迭代式(2.5)收敛.

先证明加热时迭代式(2.5)的收敛性. 设物体加热开始时为铁素体组织, 整个加热过程只可能有铁素体和奥氏体两个相, 且 $V_a + V_f = 1$, V_a 与 V_f 分别为奥氏体与铁素体的体积百分数. 于是式(2.4)可简化为

$$T = \frac{\psi}{a_a V_a + a_f V_f} - \frac{b_a V_a + b_f V_f}{2(a_a V_a + a_f V_f)} (T^2 - T_0^2) + T_0 \quad (2.7)$$

欲证式(2.7)满足(2.6), 只需证明下式成立

$$\left| \frac{b_a V_a + b_f V_f}{2(a_a V_a + a_f V_f)} (T_1 + T_2) \right| < 1 \quad (2.8)$$

这里 $a_a \gg b_a$, $a_f \gg b_f$, $V_a + V_f = 1$, $20^\circ\text{C} \leq T_1 \leq 850^\circ\text{C}$, $20^\circ\text{C} \leq T_2 \leq 850^\circ\text{C}$, 因此式(2.8)必然成立。

同理, 可证当存在着铁素体(F)、珠光体(P)、贝氏体(B)、马氏体(M)及奥氏体(A)的冷却过程中, 在 $V_f + V_p + V_b + V_m + V_a = 1$ 及 $20^\circ\text{C} \leq T_1 \leq 850^\circ\text{C}$ 与 $20^\circ\text{C} \leq T_2 \leq 850^\circ\text{C}$ 的条件下, Kirchhoff 逆变换收敛。

三、线性化的热传导问题的三维双重边界元法分析

利用双重边界元法DRBEM(Dual Reciprocity Boundary Element Method)^[9], 可将域内积分化成边界积分。

取基本解

$$u^* = 1/4\pi r \quad (3.1)$$

为权函数, 对式(1.4)做加权积分, 可得

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\alpha} \int_D \frac{\partial \psi(Q)}{\partial t} u^*(P, Q) d\Omega(Q) - \int_{\Gamma} q(Q) u^*(P, Q) d\Gamma(Q) + \psi(P) \\ & + \int_{\Gamma} \psi(Q) q^*(P, Q) d\Gamma(Q) - \int_D \bar{Q}(Q) u^*(P, Q) d\Omega(Q) = 0 \end{aligned} \quad (3.2)$$

其中 $q(Q) = \frac{\partial \psi(Q)}{\partial n}$, $q^*(P, Q) = \frac{\partial u^*(P, Q)}{\partial n}$, 而 $D = \int_D \frac{\partial \psi(Q)}{\partial t} u^*(P, Q) d\Omega(Q)$ 可用DRBEM处理如下。

设在区域内及边界上和可将 $\frac{\partial \psi(Q)}{\partial t}$ 表示为分离变量形式

$$\frac{\partial \psi(Q)}{\partial t} = \sum_{j=1}^N f^j(Q) \frac{d\alpha^j(t)}{dt} = \sum_{j=1}^N f^j(Q) \dot{\alpha}^j(t) \quad (3.3)$$

式中 $f^j(Q)$ 为一系列基函数, $\alpha^j(t)$ 为一系列时间函数, N 为插值项数。对于具体的 $f^j(Q)$, 总可以找到 $\phi^j(Q)$, 使

$$\nabla^2 \phi^j(Q) = f^j(Q) \quad (3.4)$$

将式(3.3)与(3.4)代入 D 并做分部积分, 于是将域内积分 D 化成为边界积分

$$\begin{aligned} D = \sum_{j=1}^N & \left[\int_{\Gamma} \eta^j(Q) u^*(P, Q) d\Gamma(Q) - \int_{\Gamma} \phi^j(Q) q^*(P, Q) d\Gamma(Q) \right. \\ & \left. - \phi^j(P) \right] \dot{\alpha}^j(t) \end{aligned} \quad (3.5)$$

其中 $\eta^j(Q) = \partial \phi^j(Q) / \partial n$, $\dot{\alpha}^j(t)$ 可用下述方法计算, 即对式(3.3)全部取边界上的点, 则有

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = F \dot{\alpha} \quad \text{或} \quad \dot{\alpha} = F^{-1} \frac{\partial \psi}{\partial t} \quad (3.6)$$

式中 $\frac{\partial \psi}{\partial t} = \left[\frac{\partial \psi_1}{\partial t} \quad \frac{\partial \psi_2}{\partial t} \quad \dots \quad \frac{\partial \psi_N}{\partial t} \right]^T$, $F_{ij} = f^j(x_i)$ ($i, j = 1, 2, \dots, N$)。

将式(3.5)代入(3.2), 并离散物体边界, 可得

$$H\psi - GQ + \frac{1}{\alpha} (G\eta - H\phi) F^{-1} \frac{\partial \psi}{\partial t} = B \quad (3.7)$$

由上式解得 ϕ ，并进行Kirchhoff逆变换，可得相应的温度 T 。

四、边界条件的分析与确定

在热处理加热和冷却过程中，主要是通过对流和辐射等物理过程使加热或冷却介质与工件之间形成热量流动，从而使工件获得加热和冷却。

(一) 加热过程

对流传热主要发生在工件温度在600 C ~ 700 C 以下的情形，当工件温度高于 >700 C 时金属加热主要靠辐射作用。

辐射传热可以根据Stiefen-Bolzman定律来计算

$$Q = \left[\left(\frac{T_1}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_2}{100} \right)^4 \right] \tag{4.1}$$

式中 Q为辐射换热量，c为当量辐射系数， T_1 与 T_0 分别为炉子与工件表面的绝对温度。

对流传热可按下式计算

$$q = \alpha(T_f - T_w) \tag{4.2}$$

式中 q为对流换热量， α 为对流换热系数， T_f 与 T_w 分别为流体与工件表面的温度。

算出对流和辐射的换热量，即可确定加热过程中热传导问题的边界条件。

(二) 冷却过程

人们对于冷却过程已做过较多的研究，测量了液体冷却介质在不同温度下的热流量曲线(如图1所示)，可由该曲线确定边界条件。

对于空冷的情况，可按上述原理来确定边界条件。

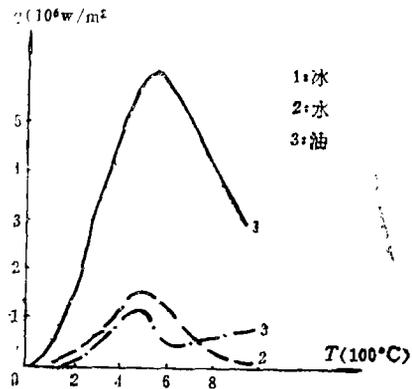


图1 热流量曲线

五、瞬态相变的模拟方法 ——孕育期叠加法

本文提出孕育期叠加原理，并运用等温转变图来确定相变的开始时间、相变的种类及相变组织的数量。

孕育期是指在加热或冷却过程中，在某一温度下保持等温直至开始发生相变所需的时间。若在温度 T_1 等温转变的孕育期为 z_1 ，而实际在该温度下保持等温的时间为 $\Delta\tau_1$ ，则当 $\Delta\tau_1 \geq z_1$ 时将发生相变。 $\Delta\tau_1/z_1$ 表示孕育期的相对消耗量，是否存在 $\frac{\Delta\tau_1}{z_1} \geq 1$ 可作为是否发生相变的判据。

假定已知钢的加热与冷却曲线及对应的加热等温转变图 ITH 与冷却等温转变图 ITC，将加热或冷却曲线在温度 $T_i (i=1, 2, \dots, n)$ 处分成若干阶段，设每一阶段保持的时间为 $\Delta\tau_i$ ，根据 ITH 或 ITC 图的转变开始线确定温度 T_i 对应的孕育期为 z_i ，则当加热或冷却至 T_n 时，孕育期的相对消耗量为

$$I.P.(T_n) = \sum_{i=1}^n (\Delta r_i / z_i) \tag{5.1}$$

若 $I.P.(T_n) \geq 1$ ，则开始发生相变。

相变产物的数量可确定如下^[4]。

对于加热过程中的奥氏体形成及冷却过程中的过冷奥氏体向铁素体、珠光体、贝氏体的转变，可按式计算

$$V_k = 1 - \exp[-b_k t^{n_k}] \tag{5.2}$$

其中 V_k 为第 k 相的体积百分比， t 为时间， b_k 与 n_k 为与温度及等温转变曲线有关的参数。

对于无扩散的马氏体转变，可用下式计算

$$V_m = 1 - \exp[-k(M_s - T)^n] \tag{5.3}$$

式中 V_m 为马氏体体积百分比， M_s 为马氏体开始转变温度， T 为冷却终止时的温度， k, n 为常数。

六、算 例

根据上述原理，本文编制了三维边界元法程序来计算热处理过程中的瞬态温度场及所发

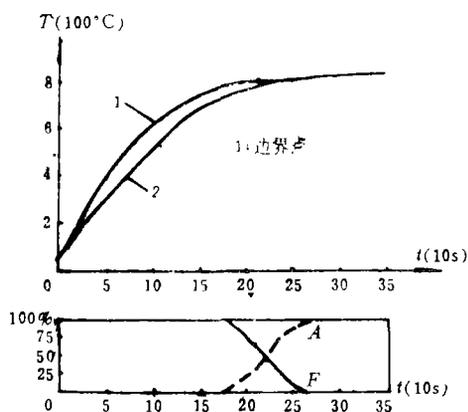


图2 加热曲线及中心点相组成(%)

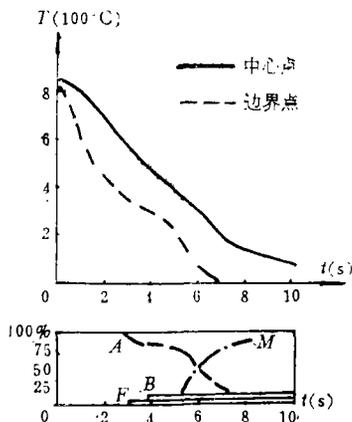


图3 冷却曲线及中心点相组成(%)

生的相变。算例取40Cr圆棒 $\phi 15 \times 60$ (mm)，自20℃加热至850℃，然后再水冷至20℃。数值计算结果如图2、3所示。

图4是用有限元法计算的结果^[1]。比较图3与图4，可见二者是吻合的，但本文边界元法计算量明显减少，因此用本文方法分析金属材料热处理问题将具有更大的优越性。

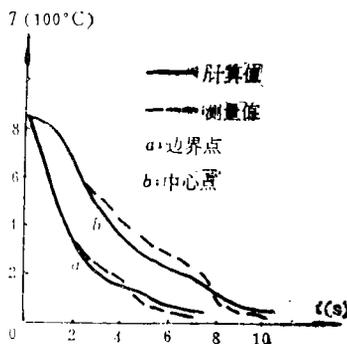


图4 有限元结果

参 考 文 献

- [1] Yuan Fa-rong and Wu Shan-li, Transient temperature and residual stress field in axisymmetric metal components after hardening, *Materials Science and Technology*, 10(1)(1985).
- [2] Wroble L. C. et. al., The Dual reciprocity boundary element formulation for nonlinear diffusion problem, computer methods, *Applied Mechanics and Engineering*, 65(1987), 147—185.
- [3] Tnoue, T., T. Yamaguchi and Wang Zhi-gang, Stresses and phase transformation occurring in quenching of carburized steel gearwheel, *Material Science and Technology*, 10(1)(1985).
- [4] Yao Shan-chang et. al., The computer simulation of the quenching process, *Metal Heat Treatment*, 8(1987), (in Chinese).

The Numerical Method for Analysing the Transient Temperature Field and Transient Phase Transformation of Metal Materials in Heat Treating

Yuan Fa-rong

(*The Min-River Valley Planning Office of Fujian Province, Fuzhou*)

Yang Shu-shen

(*Henan Textile Mechanical Factory*)

Abstract

In this paper, the kirchhoff's transformation is generalized to the nonlinear heat conduction problem which the heat conductivity can be expressed as a multinomial of temperature firstly, the boundary condition of heat conduction problem is determined by analytics.

Secondly, the incubation period superposition and the linear combination law is employed to simulate the transient phases transformation in the process of heat treatment of materials. That the beginning time of phase transformation and the amount of phase constitution is determined simply.

Finally, the three-dimension Dual Reciprocity Boundary Element Method is used to analyse the total process of various heat treatment of component, the results of numerical calculation of examples show that the method provided in this paper is effective.

Key words heat treatment, phase transformation, temperature field