

文章编号: 1000-0887(2004) 02-0189-08

薄板的局部 Petrov_Galerkin 方法^{*}

熊渊博, 龙述尧

(1. 湖南大学 工程力学系, 长沙 410082)

(程昌钧推荐)

摘要: 利用薄板控制微分方程的等效积分对称弱形式和对变量(挠度)采用移动最小二乘近似函数进行插值, 研究了薄板弯曲问题的无网格局部 Petrov_Galerkin 方法。这是一种真正的无网格方法, 它不需要任何有限元或边界元网格, 不管这种网格是用于能量积分还是进行插值的目的。所有的积分都在规则形状的子域及其边界上进行, 并用罚因子法施加本质边界条件。数值例子表明, 无网格局部 Petrov_Galerkin 法不但能够求解二阶微分方程的边值问题, 而且求解四阶微分方程的边值问题也很有效, 也具有收敛快、稳定性好、对挠度和内力都具有精度高的特点。

关键词: 薄板; 无网格局部 Petrov_Galerkin 方法; 移动最小二乘近似; 微分方程的等效积分对称弱形式

中图分类号: O302 文献标识码: A

引 言

最近几年, 无网格方法的研究愈来愈受到人们的重视。无网格方法的主要优点是摆脱或至少是减轻了对整个结构划分网格的困难。特别是在自适应方法中, 在结构需要增加或减少网格的地方, 只需增加或删除节点, 而不需要对整个结构重新划分网格。

最近 Atluri 等人提出了无网格局部 Petrov_Galerkin 方法, 并用这种方法求解了二维位势问题和梁的弯曲问题^[1-4]。这种方法利用局部子域上的积分方程的等效弱形式和采用移动最小二乘函数进行插值, 所有的积分都在规则形状的子域及其边界上进行, 而不需要任何有限元或边界元网格。

本文将无网格局部 Petrov_Galerkin 方法应用于求解薄板弯曲问题。由于采用移动最小二乘函数来近似解变量(挠度), 不便于施加本质边界条件, 所以采用罚因子法施加本质边界条件。

1 薄板弯曲问题的局部 Petrov_Galerkin 法

以横向挠度 w 为变量的薄板弯曲问题的控制微分方程为

* 收稿日期: 2001_11_27; 修订日期: 2003_06_27

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10372030); 湖南省自然科学基金资助项目(02JJY4071)

作者简介: 熊渊博(1959—), 男, 湖南湘潭人, 副教授

(联系人, Tel: 86_731_8821161, Fax: 86_731_8824525; E-mail: yuabox@msn.com);

龙述尧(1945—), 男, 湖南湘潭人, 教授, 博士生导师(E-mail: shuyulong@hotmail.com)。

$$D \cdot^{\cdot 4} w(x_1, x_2) = q(x_1, x_2), \quad (x_1, x_2) \in \Omega, \quad (1)$$

式中 $q(x_1, x_2)$ 为横向分布载荷集度, $\cdot^{\cdot 4}$ 是双调和算子, 在直角坐标系下, 它为

$$\cdot^{\cdot 4} = \frac{\partial^4}{\partial x_1^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + \frac{\partial^4}{\partial x_2^4}, \quad (2)$$

D 为弯曲刚度,

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}. \quad (3)$$

式中, E 为弹性模量, ν 为泊松比, h 为板厚. 薄板的区域 Ω 的边界为 Γ , 在 Γ 上有下列边界条件:

本质边界条件:

$$w = \bar{w}, \quad \Gamma_{u1} \text{ 上}; \quad (4)$$

$$\frac{\partial w}{\partial n} = \bar{\theta}_n, \quad \Gamma_{u2} \text{ 上}. \quad (5)$$

自然边界条件:

$$M_n = \bar{M}_n, \quad \Gamma_{t1} \text{ 上}; \quad (6)$$

$$V_n = \bar{V}_n, \quad \Gamma_{t2} \text{ 上}. \quad (7)$$

式中, w 、 θ_n 、 M_n 和 V_n 分别是边界 Γ 上给定的横向挠度、法向转角、法向弯矩和法向等效剪力.

微分方程(1)和边界条件(4)、(5)在子域 $\Omega_s (\in \Omega)$ 上的等效积分弱形式为

$$\int_{\Omega_s} (D \cdot^{\cdot 4} w - q) v \, d\Omega + \alpha_1 \int_{\Gamma_{u1}} (w - \bar{w}) v \, d\Gamma + \alpha_2 \int_{\Gamma_{u2}} \left[\frac{\partial w}{\partial n} - \bar{\theta}_n \right] v \, d\Gamma = 0, \quad (8)$$

式中, w 和 v 分别为试函数和权函数, Γ_{u1} 和 Γ_{u2} 是边界 $\partial \Omega_s$ 给定边界的部分, $\alpha_1, \alpha_2 (\gg 1)$ 是施加本质边界条件的罚因子.

利用格林恒等式和散度定理, 方程(8)可以表示为

$$\int_{\Omega_s} \left\{ D \cdot^{\cdot 2} w \cdot^{\cdot 2} v - D(1-\nu) \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} - 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 x_2} \frac{\partial^2 v}{\partial x_1 x_2} \right] - qv \right\} d\Omega + \int_{\partial \Omega_s} \left[\frac{\partial v}{\partial n} M_n(w) - v V_n(w) \right] d\Gamma + \sum_T [M_t(w)] J^{\pm} v + \alpha_1 \int_{\Gamma_{u1}} (w - \bar{w}) v \, d\Gamma + \alpha_2 \int_{\Gamma_{u2}} \left[\frac{\partial w}{\partial n} - \bar{\theta}_n \right] v \, d\Gamma = 0, \quad (9)$$

式中, $\partial \Omega_s$ 是子域 Ω_s 的边界, n 是边界 $\partial \Omega_s$ 的外法线方向. 我们将子域边界 $\partial \Omega_s$ 再分为 L_s 和 Γ_s 两部分, 即 $\partial \Omega_s = L_s \cup \Gamma_s$, 其中 L_s 是 $\partial \Omega_s$ 上无边界条件给定的部分, 而 Γ_s 是 $\partial \Omega_s$ 给定边界条件的部分. 于是, 方程(9)变为

$$\int_{\Omega_s} \left\{ D \cdot^{\cdot 2} w \cdot^{\cdot 2} v - D(1-\nu) \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} - 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 x_2} \frac{\partial^2 v}{\partial x_1 x_2} \right] - qv \right\} d\Omega + \int_{L_s} \left[\frac{\partial v}{\partial n} M_n(w) - v V_n(w) \right] d\Gamma + \int_{\Gamma_s} \left[\frac{\partial v}{\partial n} M(w) - v V_n(w) \right] d\Gamma + \alpha_1 \int_{\Gamma_{u1}} (w - \bar{w}) v \, d\Gamma + \alpha_2 \int_{\Gamma_{u2}} \left[\frac{\partial w}{\partial n} - \bar{\theta}_n \right] v \, d\Gamma + \sum_T [M_t(w)] J^{\pm} v = 0, \quad (10)$$

式中, $[M_t(\cdot)]^+$ 表示扭矩在角点的跳跃值, T 为角点总数. 方程(10)中其他符号的意义如下:

$$\begin{cases} M_n(w) = \frac{-D}{2}(1-\nu)\left[\frac{1+\nu}{1-\nu}\Delta^2 w + \cos 2\beta L_1(w) + 2\sin 2\beta L_2(w)\right], \\ M_t(w) = D(1-\nu)\left[\frac{1}{2}\sin 2\beta L_1(w) - \cos 2\beta L_2(w)\right], \\ V_n(w) = Q_n(w) + \frac{\partial M_t}{\partial s} = -D\frac{\partial}{\partial n}(\Delta^2 w) + L_3(M_t), \end{cases} \quad (11)$$

式中

$$\begin{cases} \Delta^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}, \\ L_1 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\partial^2}{r^2\partial \theta^2}, \\ L_2 = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\right), \\ L_3 = -\left[\sin \beta \frac{\partial}{\partial r} - \cos \beta \frac{\partial}{r\partial \theta} + \left(\frac{\cos \beta}{r} - \frac{1}{\rho}\right)\frac{\partial}{\partial \theta}\right]. \end{cases} \quad (12)$$

在上面的式子中, ρ 是边界 Γ_s 的曲率半径, 并规定 ρ 位于凸的一方为正; n, t 是边界曲线的外法向和切向, r, θ 是极坐标轴; β 是边界外法向 n 与距离 r 之间的夹角.

在通常的伽辽金方法中, 试函数和权函数取自同一函数空间, 而现在的 Petrov_Galerkin 方法, 试函数和权函数取自不同的函数空间. 试函数 w 用移动最小二乘函数近似, 而权函数 v 选取已知函数. 我们特意选择权函数 v 及其法向导数 $\partial v/\partial n$ 在局部边界 L_s 上(对于位于 Ω 内的节点, L_s 为一圆; 对于位于整体边界 Γ 上的节点, L_s 为一段圆弧)为零. 而移动最小二乘函数的加权函数却具有上述性质, 即加权函数及其一阶法向导数在加权函数的支持域半径 r_i 上为零, 只要选择加权函数的支持域半径 r_i 与子域 Ω_s 的半径 r_0 相等就可以了. 于是, 对于完全位于 Ω 内的节点的子域 Ω_s , 由于没有边界条件给定且不存在角点, $L_s \equiv \partial \Omega_s, \Gamma_s = 0$, 在方程(10)中, 沿 L_s 和 Γ_s 上的积分为零, 方程(10)变为

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_s} \left\{ D \Delta^2 w \Delta^2 v - D(1-\nu) \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} - \right. \right. \\ & \quad \left. \left. 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 x_2} \frac{\partial^2 v}{\partial x_1 x_2} \right] - qv \right\} d\Omega + \alpha_1 \int_{\Gamma_{ul}} (w - \bar{w}) v d\Gamma + \\ & \quad \alpha_2 \int_{\Gamma_{u2}} \left(\frac{\partial w}{\partial n} - \theta_n \right) v d\Gamma = 0. \end{aligned} \quad (13)$$

对于位于整体边界 Γ 上的节点的子域 Ω_s , 由二部分组成, 即 $\partial \Omega_s = L_s \cup \Gamma_s$, 其中 L_s 为中心在节点的一段圆弧, Γ_s 为整体边界的一段. 在 Γ_s 上, 权函数 v 及其法向导数 $\partial v/\partial n$ 不再为零, 因此在方程(10)中, 沿 Γ_s 上的积分不消失. 我们把 Γ_s 划分为本质边界条件 Γ_u 和自然边界条件 Γ_l 两部分, 并对方程(10)施加自然边界条件, 则有

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_s} \left\{ D \Delta^2 w \Delta^2 v - D(1-\nu) \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} - \right. \right. \\ & \quad \left. \left. 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 x_2} \frac{\partial^2 v}{\partial x_1 x_2} \right] - qv \right\} d\Omega + \int_{\Gamma_{ul}} \left(\frac{\partial v}{\partial n} M_n(w) - v V_n(w) \right) d\Gamma + \\ & \quad \int_{\Gamma_{u2}} \left(\frac{\partial v}{\partial n} M_n(w) - v V_n(w) \right) d\Gamma + \int_{\Gamma_{l1}} \left(\frac{\partial v}{\partial n} M_n(w) - v V_n(w) \right) d\Gamma + \end{aligned}$$

$$\int_{\Gamma_{i2}} \left[\frac{\partial v}{\partial n} M_n(w) - v V_n(w) \right] d\Gamma + \alpha_1 \int_{\Gamma_{u1}} (w - w) v d\Gamma + \alpha_2 \int_{\Gamma_{u2}} \left[\frac{\partial w}{\partial n} - \theta_n \right] v d\Gamma + \sum_T [M_t(w)]^+ v = 0 \quad (14)$$

重新排列上式, 我们得到薄板弯曲问题局部等效积分对称弱形式的方程

$$\int_{\Omega_s} \left\{ D \nabla^2 w \nabla^2 v - D(1-\nu) \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} - 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 x_2} \frac{\partial^2 v}{\partial x_1 x_2} \right] \right\} d\Omega + \int_{\Gamma_{u1}} \left[\frac{\partial v}{\partial n} M_n(w) - v V_n(w) \right] d\Gamma + \int_{\Gamma_{u2}} \left[\frac{\partial v}{\partial n} M_n(w) - v V_n(w) \right] d\Gamma - \int_{\Gamma_{i1}} v V_n(w) d\Gamma + \int_{\Gamma_{i2}} \frac{\partial v}{\partial n} M_n(w) d\Gamma + \alpha_1 \int_{\Gamma_{u1}} w v d\Gamma + \alpha_2 \int_{\Gamma_{u2}} \frac{\partial w}{\partial n} v d\Gamma + \sum_T [M_t(w)]^+ v = \int_{\Omega_s} q v d\Omega - \int_{\Gamma_{i1}} \frac{\partial v}{\partial n} M_n d\Gamma + \int_{\Gamma_{i2}} v V_n d\Gamma + \alpha_1 \int_{\Gamma_{u1}} w v d\Gamma + \alpha_2 \int_{\Gamma_{u2}} \theta_n v d\Gamma \quad (15)$$

2 离散和数值实施

在这里, 对横向挠度 w , 我们采用移动最小二乘函数进行近似, 移动最小二乘法的详细论述参见文献[5]和[6]•

$$w^a(x) = \Phi^T \mathbf{W} = \sum_{j=1}^N \phi_j(x) \hat{w}_j, \quad (16)$$

式中 \hat{w}_j 是未知虚拟节点值, N 是子域 Ω_s 上加权函数 $g_i(x) > 0$ 的节点总数, $\phi(x)$ 是移动最小二乘近似函数的形函数•

由方程(11)可得到内力的形函数为

$$M_n^a(x) = \sum_{j=1}^N M_{nj}(x) \hat{w}_j, \quad (17)$$

$$M_t^a(x) = \sum_{j=1}^N M_{tj}(x) \hat{w}_j, \quad (18)$$

$$V_n^a(x) = \sum_{j=1}^N V_{nj}(x) \hat{w}_j, \quad (19)$$

式中

$$M_{nj}(x) = -D[v \phi_{,pp} + (1-\nu) n_{kn} \phi_{,kl}], \quad (20)$$

$$M_{tj}(x) = -D(1-\nu)(-1)^l n_{kn} \phi_{,kl}, \quad (21)$$

$$V_{nj}(x) = -D[\phi_{,ppkn} + (1-\nu)(-1)^{l+m} n_{kn} n_{3-l} n_{3-m} \phi_{,klm}], \quad (22)$$

($p, k, l, m = 1, 2$)•

在用移动最小二乘函数近似横向挠度 w 时, 首先必须选择基函数和加权函数• 由方程(15)可以看出, 在子域 Ω_s 内出现挠度的二阶导数, 而在整体域的边界上出现了挠度的三阶导数, 为保证积分在域内及其边界上存在, 必须选择 C^2 连续可微函数• 移动最小二乘函数的连续可微性由基函数和加权函数的连续可微性确定• 因此在本文中, 我们选择基函数为 3 次、4 次和 5 次, 以及五次样条加权函数, 五次样条函数具有 3 阶连续可微的性质•

五次样条函数定义为

$$g_i(x) = \begin{cases} 1 - 10\left(\frac{d_i}{r_i}\right)^2 + 20\left(\frac{d_i}{r_i}\right)^3 - 15\left(\frac{d_i}{r_i}\right)^4 + 4\left(\frac{d_i}{r_i}\right)^5, & 0 \leq d_i \leq r_i; \\ 0, & d \geq r_i. \end{cases} \quad (23)$$

式中, $d_i = \|x - x_i\|$, r_i 是节点 x_i 的加权函数 g_i 支持域半径.

把式(16)~(19)代入方程(15), 得到离散线性方程组

$$\sum_{j=1}^N K_{ij} \hat{v}_j = f_i \quad (i = 1, 2, \dots, N), \quad (24)$$

式中, N 是节点总数,

$$\begin{aligned} K_{ij} = & \int_{\Omega} [D\phi_{kk}g_i, ll - D(1-\nu)(-1)^{k+l}\phi_{kl}g_i, (3-k)(3-l)] d\Omega + \\ & \int_{\Gamma_{u1}} \left[\frac{\partial g_i}{\partial n} M_{nj} - g_i V_{nj} \right] d\Gamma + \int_{\Gamma_{u2}} \left[\frac{\partial g_i}{\partial n} M_{nj} - g_i V_{nj} \right] d\Gamma - \int_{\Gamma_{t1}} g_i V_{nj} d\Gamma + \\ & \int_{\Gamma_{t2}} \frac{\partial g_i}{\partial n} M_{nj} d\Gamma + \alpha_1 \int_{\Gamma_{u1}} \phi_j g_i d\Gamma + \alpha_2 \int_{\Gamma_{u2}} \phi_j g_i d\Gamma + \sum_T [M_j]_{\pm}^+ g_i, \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} f_i = & \int_{\Omega} q g_i d\Omega - \int_{\Gamma_{t1}} \frac{\partial g_i}{\partial n} M_n d\Gamma + \int_{\Gamma_{t2}} g_i V_n d\Gamma + \\ & \alpha_1 \int_{\Gamma_{u1}} g_i w d\Gamma + \alpha_2 \int_{\Gamma_{u2}} \theta_n g_i d\Gamma, \end{aligned} \quad (26)$$

式中, $g_i = g_i(x) = g(x, x_i)$ 是节点 i 的加权函数在 x 点计算的值. 在这里应注意, 对于完全位于域 Ω 内的节点, $L_s \equiv \partial\Omega_s$; 在式(25)和(26)中沿 Γ_{u1} 、 Γ_{u2} 和 Γ_{t1} 、 Γ_{t2} 上的积分为零. 还应注意: 根据所考虑问题的边界条件, 沿 Γ_{u1} 、 Γ_{u2} 和 Γ_{t1} 、 Γ_{t2} 上 4 个积分中选择二项积分, 因为 $\Gamma_{u1} \cap \Gamma_{t2} = f$ 和 $\Gamma_{u2} \cap \Gamma_{t1} = f$. 如果所考虑问题的边界 Γ 上存在自由角点或有角点支承, 则在式(25)中还应选择角点扭跳跃项 $\sum_T [M_j]_{\pm}^+ g_i$. 例如, 对于铰支边, 应选择 Γ_{u1} 和 Γ_{t1} 两项积分.

3 数值例子

各种载荷下的方板是标准的试验例子, 因为有许多数值解和解析解进行对照. 本文算例的计算结果与用整体边界元法计算的结果^[7]和解析解^[8]进行对照.

在计算中, 每一个子域的半径应尽可能大, 以使得所有子域的并集能尽可能多地覆盖整体域 Ω . 在下面的所有例子中, 对于内点, 子域半径为 2.5 倍最小网格尺寸; 对边界点, 子域半径为 2.5 倍最大网格尺寸. 在数值计算中, 在 Γ_s 上取 9 点高斯积分, 在子域 Ω_s 内取 6×9 个高斯点积分.

3.1 四边固支方板

为验证局部 Petrov-Galerkin 法应用于薄板弯曲问题的有效性和可行性, 首先分析一个四边固支承受均布载荷的方板. 为了与文献[7]的结果相对照, 采用了 $25(5 \times 5)$ 、 $81(9 \times 9)$ 和 $289(17 \times 17)$ 的规则网格节点. 表 1 给出了板中心挠度和弯矩, 以及板边中点弯矩的数值. 由表 1 可以看出, 与文献[7]和[8]的结果相当吻合.

在表中, q 是均布载荷集度, a 是板边长, D 是板的弯曲刚度. 在移动最小二乘函数中采用四次基函数和五次样条函数进行近似, 而文献[7]采用整体边界元方法并将整板划分为 32

个单元

表 1 承受均布载荷的四边固支方板的挠度和弯矩

方法		中点挠度 $w_c(\times D/qa^4)$	中点弯矩 $M_c(\times 1/qa^2)$	边中点弯矩 $M_e(\times 1/qa^2)$
本法	5×5	0.001 250	0.022 75	0.051 70
	9×9	0.001 253	0.022 80	0.051 45
	17×17	0.001 257	0.022 88	0.051 42
参考文献[7]		0.012 55	0.022 82	0.051 40
参考文献[8]		0.012 60	0.023 10	0.051 30

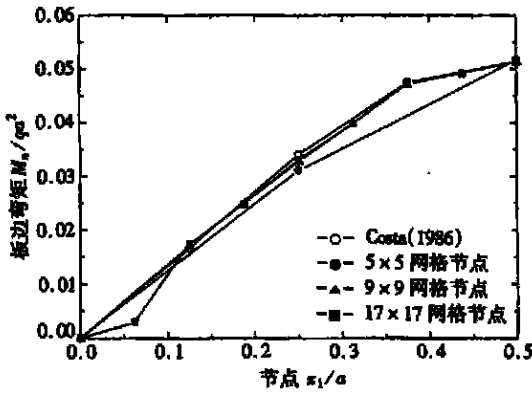


图 1 承受均布载荷的四边固支方板板边弯矩变化曲线

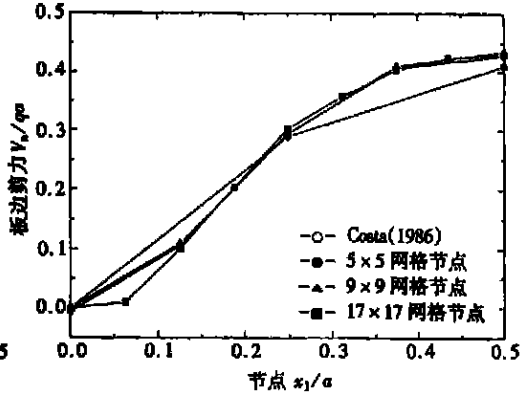


图 2 承受均布载荷的四边固支方板板边剪力变化曲线

在图 1 和图 2 中, 分别给出了板边弯矩和剪力的变化曲线。从图中可以看到, 各种网格节点, 甚至 5×5 网格节点的结果都与文[7]的结果吻合相当好。

3.2 四边简支方板

为了说明局部 Petrov_Galerkin 方法的收敛性和进行误差估计, 分析了承受均布载荷四边简支的方板, 并计算了板的挠度和能量模。挠度和能量模分别定义为

$$\|w\| = \left[\int_{\Omega} w^2 d\Omega \right]^{1/2}, \tag{27}$$

$$\|e\| = \left[\frac{D}{2} \int_{\Omega} (\nabla^2 w)^2 d\Omega \right]^{1/2}. \tag{28}$$

相对误差分别定义为

$$r_w = \frac{\|w^n - w^e\|}{\|w^e\|}, \tag{29}$$

$$r_e = \frac{\|e^n - e^e\|}{\|e^e\|}. \tag{30}$$

式中, w^n 和 e^n 分别表示用现在的数值方法计算的挠度和能量, w^e 和 e^e 分别表示用解析方法计算的精确挠度和能量。由文献[8]可知, 四边简支承受均布载荷的挠度精确解为

$$w = \frac{16q}{\pi^6 D} \sum_{m=1,3,\dots} \sum_{n=1,3,\dots} \frac{\sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{a}}{mn \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{a^2} \right)}, \tag{31}$$

式中, q 是均布载荷集度, a 是板边长。

在计算时, 移动最小二乘函数采用三次、四次和五次基函数和五次样条加权函数, 并采用

49(7×7), 81(9×9) 和 289(17×17) 的规则网格节点。

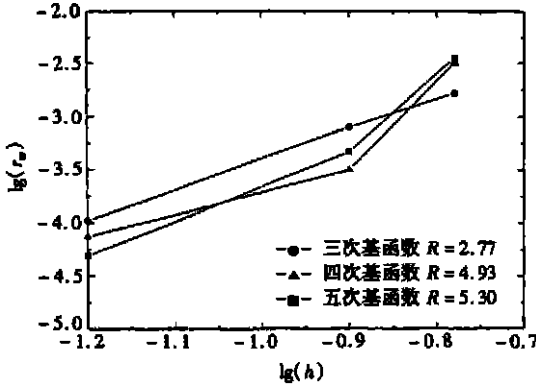


图 3 四边简支方板挠度模 $\|w\|$ 的相对误差和收敛率

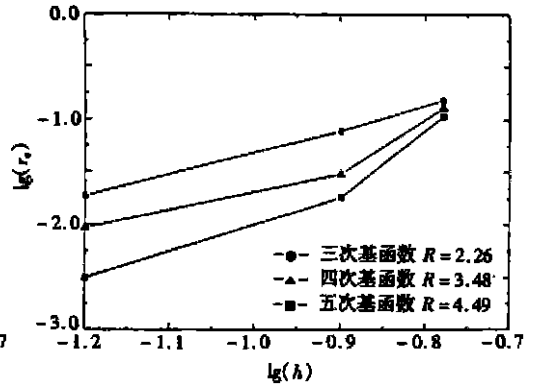


图 4 四边简支方板能量模 $\|e\|$ 的相对误差和收敛率

在图 3 和图 4 中, 分别给出了挠度模 $\|w\|$ 和能量模 $\|e\|$ 的相对误差和收敛率。由图可以看出, 局部 Petrov_Galerkin 法对挠度和能量模都具有较高的收敛率, 而且对挠度及其导数(能量)都有较高的精度。由图还可以看出, 五次基函数比三次和四次基函数给出了好一些的结果。

4 结 论

在本文中, 推导了用局部 Petrov_Galerkin 法求解薄板弯曲问题的公式及其实施方法和计算步骤。数值例子的收敛性研究表明, 这种方法对挠度和能量模具有较高的收敛率。同时由于试函数和权函数具有较高的连续光滑性, 内力也具有较高的精度。数值结果还表明, 较高次数的基函数和样条加权函数能给出较好的精度。

[参 考 文 献]

- [1] Atluri S N, Zhu T. A new meshless local Petrov_Galerkin(MLPG) approach in computational mechanics[J]. Comput Mech, 1998, 22(1): 117—127.
- [2] Atluri S N, Cho J Y, Kim H G. Analysis of thin beams, using the meshless local Petrov_Galerkin method, with generalized moving least squares interpolation[J]. Comput Mech, 1999, 24(4): 334—347.
- [3] Atluri S N, Kim H G, Cho J Y. A critical assessment of the truly meshless local Petrov_Galerkin (MLPG), and local boundary integral equation(LBIE) methods[J]. Comput Mech, 1999, 24(2): 348—372.
- [4] Atluri S N, Zhu T. New concepts in meshless methods[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2000, 47(3): 537—556.
- [5] Belytschko T, Lu Y Y, Gu L. Element_free Galerkin methods[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1994, 37(2): 229—256.
- [6] 龙述尧. 弹性力学问题的局部 Petrov_Galerkin 方法[J]. 力学学报, 2001, 33(4): 508—518.
- [7] Costa J A. The boundary element method applied to plate problems [D]. Southampton, UK: Southampton University, 1986.
- [8] Timoshenko S, Woinowsky_Krieger S. Theory of Plates and Shells [M]. 2nd ed. New York: McGraw_Hill, 1959.

Local Petrov_Galerkin Method for a Thin Plate

XIONG Yuan_bo, LONG Shu_yao

(Department of Engineering Mechanics, Hunan University,
Changsha 410082, P. R. China)

Abstract: The meshless local Petrov_Galerkin(MLPG) method for solving the bending problem of the thin plate were presented and discussed. The method used the moving least_squares approximation to interpolate the solution variables, and employed a local symmetric weak form. The present method was a truly meshless one as it did not need a finite element or boundary element mesh, either for purpose of interpolation of the solution, or for the integration of the energy. All integrals could be easily evaluated over regularly shaped domains (in general, spheres in three_dimensional problems) and their boundaries. The essential boundary conditions were enforced by the penalty method. Several numerical examples were presented to illustrate the implementation and performance of the present method. The numerical examples presented show that high accuracy can be achieved for arbitrary grid geometries for clamped and simply_supported edge conditions. No post processing procedure is required to compute the strain and stress, since the original solution from the present method, using the moving least squares approximation, is already smooth enough.

Key words: thin plate; meshless local Petrov_Galerkin method; moving least square approximation; symmetric weak form of equivalent integration for differential equation