应用数学和力学，第14卷 第9期（1993年9月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

渐近法在一类强非线性系统中的应用*

谢 柳 辉

（长沙铁道学院，1992年2月8日收到）

摘 要

本文采用文[1、2]的渐近解形式，将渐近法推广到如下较为广泛一类的强非线性振动系统

$$\ddot{x}+g(x,\dot{x})=\varepsilon f(x,\dot{x}) \tag{0.1}$$

式中 g和f为x，$\dot{x}$的非线性解析函数，$\varepsilon>0$为小参数，并假设对应于$\varepsilon=0$的派生系统有周期解。本文推得系统(0.1)的渐近解递推方法，并应用于实例。

关键词 强非线性系统 广义保守系统 渐近解

一、引 言

文[1～3]用渐近法研究了强非线性拟保守系统

$$\ddot{x}+g(x)=\varepsilon f(x,\dot{x}) \tag{1.1}$$

文[3]采用的渐近解形式与文[1、2]的不同．显然，系统(1.1)的派生系统是保守系统，有周期解，故易于构造系统(1.1)的渐近解，并确定出极限环及其稳定性．

但是，当函数g中还包含$\dot{x}$时，其派生系统也可能有周期解，可根据文[4]定性判断；事实上，有的系统(0.1)的派生系统是一个广义保守系统[5,6]．因此，完全可以将文[1～3]的结果推广到其派生系统具有周期解的系统(0.1)，文[7]就是利用文[3]的结果做了这一工作．而本文是将文[1,2]的渐近解形式应用到系统(0.1)．

系统(0.1)也曾在文[8]中研究过，但该文用的是文[9]的平均法，只能求系统(0.1)的一次近似解．

二、渐近解的递推方程

当$\varepsilon=0$时，方程(0.1)的派生系统为

$$\ddot{x}+g(x,\dot{x})=0 \tag{2.1}$$

按文[4]判断有周期解，或式(2.1)为广义保守系统，设其周期解为

$$x=x_0(a,\varphi) \tag{2.2}$$

式中 a为任意常数，且已知φ的导数

* 李骊推荐．

$$\dot{\varphi}=\Phi_0(a,\varphi) \tag{2.3}$$

将(2.2)、(2.3)式代入(2.1)式，得等式

$$\frac{\partial^2 x_0}{\partial\varphi^2}\Phi_0^2+\frac{\partial x_0}{\partial\varphi}\frac{\partial\Phi_0}{\partial\varphi}\Phi_0+g\left(x_0,\ \frac{\partial x_0}{\partial\varphi}\Phi_0\right)=0 \tag{2.4}$$

当$\varepsilon\neq0$时，我们寻求系统(0.1)的文[1]所述形式的渐近解

$$\left.\begin{aligned}&x=x_0(a,\varphi)+\varepsilon x_1(a)+\varepsilon^2x_2(a)+\cdots\\&\dot{a}=\varepsilon A_1(a)+\varepsilon^2A_2(a)+\cdots\\&\dot{\varphi}=\Phi_0(a,\varphi)+\varepsilon\Phi_1(a,\varphi)+\varepsilon^2\Phi_2(a,\varphi)+\cdots\end{aligned}\right\} \tag{2.5}$$

式中$\Phi_i(a,\varphi)\ (i=0,1,2,\cdots)$为$\varphi$的周期函数，例如周期为$2\pi$。

将(2.5)式代入(0.1)式，使等式两边ε的同次幂的系数相等，并注意到等式(2.4)，最后得系统(0.1)的渐近解递推微分方程

$$D(a,\varphi)\frac{\partial\Phi_i}{\partial\varphi}+E(a,\varphi)\Phi_i+G(a,\varphi)A_i+H(a,\varphi)x_i=f_{i-1}(a,\varphi)\qquad(i=1,2,\cdots) \tag{2.6}$$

式中

$$\left.\begin{aligned}&D(a,\varphi)=\frac{\partial x_0}{\partial\varphi}\Phi_0\\&E(a,\varphi)=2\frac{\partial^2x_0}{\partial\varphi^2}\Phi_0+\frac{\partial x_0}{\partial\varphi}\frac{\partial\Phi_0}{\partial\varphi}+g'_{\dot{x}}\left(x_0,\ \frac{\partial x_0}{\partial\varphi}\Phi_0\right)\frac{\partial x_0}{\partial\varphi}\\&G(a,\varphi)=2\frac{\partial^2x_0}{\partial\varphi\partial a}\Phi_0+\frac{\partial x_0}{\partial\varphi}\frac{\partial\Phi_0}{\partial a}+g'_{\dot{x}}\left(x_0,\ \frac{\partial x_0}{\partial\varphi}\Phi_0\right)\frac{\partial x_0}{\partial a}\\&H(a,\varphi)=g'_x\left(x_0,\ \frac{\partial x_0}{\partial\varphi}\Phi_0\right)\end{aligned}\right\} \tag{2.7}$$

而

$$f_0(a,\varphi)=f\left(x_0,\ \frac{\partial x_0}{\partial\varphi}\Phi_0\right) \tag{2.8}$$

$$\begin{aligned}f_1(a,\varphi)=&f'_x\left(x_0,\frac{\partial x_0}{\partial\varphi}\Phi_0\right)x_1+f'_{\dot{x}}\left(x_0,\ \frac{\partial x_0}{\partial\varphi}\Phi_0\right)\left(A_1\frac{\partial x_0}{\partial a}+\Phi_1\frac{\partial x_0}{\partial\varphi}\right)\\&-g'_{\dot{x}}\left(x_0,\frac{\partial x_0}{\partial\varphi}\Phi_0\right)\frac{dx_1}{da}A_1-\frac{1}{2!}g''_{xx}\left(x_0,\ \frac{\partial x_0}{\partial\varphi}\Phi_0\right)x_1^2\\&-g''_{x\dot{x}}\left(x_0,\ \frac{\partial x_0}{\partial\varphi}\Phi_0\right)\left(A_1\frac{\partial x_0}{\partial a}+\Phi_1\frac{\partial x_0}{\partial\varphi}\right)x_1\\&-\frac{1}{2!}g''_{\dot{x}\dot{x}}\left(x_0,\frac{\partial x_0}{\partial\varphi}\Phi_0\right)\left(A_1\frac{\partial x_0}{\partial a}+\Phi_1\frac{\partial x_0}{\partial\varphi}\right)^2-\frac{dA_1}{da}\frac{\partial x_0}{\partial a}A_1\\&-2\frac{\partial^2x_0}{\partial\varphi\partial a}A_1\Phi_1-\frac{\partial^2x_0}{\partial a^2}A_1^2-\frac{\partial\Phi_1}{\partial a}\frac{\partial x_0}{\partial\varphi}A_1-\frac{\partial\Phi_1}{\partial\varphi}\frac{\partial x_0}{\partial\varphi}\Phi_1-\frac{\partial^2x_0}{\partial\varphi^2}\Phi_1^2\end{aligned} \tag{2.9}$$

$$\cdots\cdots$$

式(2.6)是Φ_i关于φ的一阶偏微分方程，其积分的递推方程是

$$P(a,\varphi)\Phi_i+Q(a,\varphi)A_i+R(a,\varphi)x_i=C_i+F_{i-1}(a,\varphi)\qquad(i=1,2,\cdots) \tag{2.10}$$

式中

$$\left.\begin{aligned}&P(a,\varphi)=\exp\left[\int\frac{E(a,\varphi)}{D(a,\varphi)}d\varphi\right],\quad Q(a,\varphi)=\int\frac{G(a,\varphi)}{D(a,\varphi)}P(a,\varphi)d\varphi\\&R(a,\varphi)=\int\frac{H(a,\varphi)}{D(a,\varphi)}P(a,\varphi)d\varphi,\ F_{i-1}(a,\varphi)=\int\frac{f_{i-1}(a,\varphi)}{D(a,\varphi)}P(a,\varphi)d\varphi\end{aligned}\right\}$$

而C_i为积分常数 (2.11)

再由(2.10)式，取不同的φ值可相应求得A_i、x_i.从而可逆推得Φ_i、A_i和$x_i(i=1,2,\cdots)$，代入(2.5)式，即得系统(0.1)的渐近解.

由$A_1(a_0)=0$，得定常解a_0，若$A_1'(a_0)<0$，则定常解是稳定的；若$A_1'(a_0)>0$，则不是稳定的．对于孤立的非零定常值，且$A_1'(a_0)<0$，则其定常解为稳定的极限环.

系统(1.1)为(0.1)的特殊情况，这时$g=g(x)$，从而$g'_{\dot{x}}=0$，直接由式(2.6)，(2.7)可得系统(2)的渐近解递推微分方程

$$\begin{aligned}&\frac{\partial x_0}{\partial\varphi}\Phi_0\frac{\partial\Phi_i}{\partial\varphi}+\left(2\frac{\partial^2x_0}{\partial\varphi^2}\Phi_0+\frac{\partial x_0}{\partial\varphi}\frac{\partial\Phi_0}{\partial\varphi}\right)\Phi_i+\left(2\frac{\partial^2x_0}{\partial\varphi\partial a}\Phi_0+\frac{\partial x_0}{\partial\varphi}\frac{\partial\Phi_0}{\partial a}\right)A_i\\&\quad+g'_x(x_0)x_i=f_{i-1}(a,\varphi)\qquad(i=1,2,\cdots)\end{aligned}\tag{2.12}$$

显然，上式两边同乘$\partial x_0/\partial\varphi$，若从$0\to\varphi$进行积分，则式(2.12)成为积分形式

$$\begin{aligned}&\left[\left(\frac{\partial x_0}{\partial\theta}\right)^2\Phi_0\Phi_i\right]_0^\varphi+A_i\int_0^\varphi\left(2\frac{\partial^2x_0}{\partial\theta\partial a}\Phi_0+\frac{\partial x_0}{\partial\theta}\frac{\partial\Phi_0}{\partial a}\right)\frac{\partial x_0}{\partial\theta}d\theta\\&\quad+x_i\int_0^\varphi g'_x(x_0)\frac{\partial x_0}{\partial\theta}d\theta=\int_0^\varphi f_{i-1}(a,\theta)\frac{\partial x_0}{\partial\theta}d\theta\qquad(i=1,2,\cdots)\end{aligned}\tag{2.13}$$

在文[2]中，研究了g为x的奇函数情况，取$x_0=a\cos\varphi$,将其代入(2.4)、(2.12)和(2.13)式中，即得文[2]的有关结果.

三、实例计算

下面研究文[8]讨论过的系统

$$\ddot{x}-\frac{\dot{x}^2}{x+1}+(x+1)\ln(x+1)=\varepsilon\dot{x}[\ln(x+1)]^2\left[1-\frac{\dot{x}^2}{(x+1)^2}\right]\qquad(x>-1)\tag{3.1}$$

其派生系统

$$\ddot{x}-\dot{x}^2/(x+1)+(x+1)\ln(x+1)=0\tag{3.2}$$

这里

$$g(x,\dot{x})=-\dot{x}^2/(x+1)+(x+1)\ln(x+1)\tag{3.3}$$

显然，函数$g(x,\dot{x})$满足下述条件：(a)当$x>-1$时，它是连续的，且满足解的存在与唯一性条件；(b)当$x>-1$，且$x\neq0$时，$g(x,0)\cdot x>0$；(c)$[(\partial g/\partial\dot{x})\cdot(0,0)]^2<4(\partial g/\partial x)(0,0)$；(d)它对称于相平面的$x$轴．因此，按文[4]的定理1，系统(3.2)可围绕奇点$x=0$，$\dot{x}=y=0$画出一簇封闭的相轨线，即有周期解.

事实上，系统(3.2)属于$\ddot{x}+g_1(x)\dot{x}^2+g_2(x)=0$一类的广义保守系统，它可化为标准形式的保守系统$\ddot{u}+f(u)=0$，这里$f(u)=u=\ln(x+1)$，因此，系统(3.2)的周期解可写为$x=\exp[a\cos\varphi]-1$，其中$a$为任意常数，而由(2.4)式可知，$\dot{\varphi}=1$，即对于原系统(3.1)，有

$$\left.\begin{aligned}&x_0(a,\varphi)=\exp[a\cos\varphi]-1\\&\Phi_0(a,\varphi)=1\end{aligned}\right\}\tag{3.4}$$

将x_0，Φ_0及其偏导以及g_2^1，g_3^1的值代入(2.1)式，即得

$$\left.\begin{aligned} D(a,\varphi)&=-a\sin\varphi\exp[a\cos\varphi]\\ E(a,\varphi)&=-2a\cos\varphi\exp[a\cos\varphi]\\ G(a,\varphi)&=-2\sin\varphi\exp[a\cos\varphi]\\ H(a,\varphi)&=a^2\sin^2\varphi+a\cos\varphi+1 \end{aligned}\right\} \tag{3.5}$$

而由(2.8)式，得

$$f_0(a,\varphi)=-a^3\sin\varphi\cos^2\varphi(1-a^2\sin^2\varphi)\exp[a\cos\varphi] \tag{3.6}$$

将(3.5)、(3.6)式代入(2.11)、(2.10)式($i=1$)，可得系统(3.1)的一次近似解方程；但是，也可以将(3.5)、(3.6)式直接代入(2.6)式($i=1$)，根据其具体情况，作适当处理，然后作定积分．现将(3.5)、(3.6)式代入(2.6)式，并乘以$-\sin\varphi\exp[-a\cos\varphi]$该方程成为

$$\frac{\partial}{\partial\varphi}(a\sin^2\varphi\cdot\Phi_1)+2\sin^2\varphi\cdot A_1-\sin\varphi(a^2\sin^2\varphi+a\cos+1)$$
$$\cdot\exp[-a\cos\varphi]\cdot x_1=a^3\sin^2\varphi\cos^2\varphi(1-a^2\sin^2\varphi) \tag{3.7}$$

$0\to\varphi$进行积分，得

$$a\sin^2\varphi\cdot\Phi_1+\left(\varphi-\frac{1}{2}\sin2\varphi\right)\cdot A_1-(a\sin^2\varphi\exp[-a\cos\varphi]$$
$$-\cos\varphi\exp[-a\cos\varphi]+\exp[-a])x_1$$
$$=\frac{a^3}{8}\left(\varphi-\frac{1}{4}\sin4\varphi\right)-\frac{a^5}{2}\left(\frac{1}{8}\varphi-\frac{1}{16}\sin2\varphi\right.$$
$$\left.-\frac{1}{12}\cos\varphi\sin^3\varphi+\frac{1}{3}\cos\varphi\sin^5\varphi\right) \tag{3.8}$$

由上式，取$\varphi=2\pi$，得

$$A_1(a)=\frac{a^3}{8}\left(1-\frac{a^2}{2}\right) \tag{3.9}$$

取$\varphi=\pi$，得

$$x_1(a)=0 \tag{2.10}$$

将结果(3.9)、(3.10)代回(3.8)式，得

$$\Phi_1(a,\varphi)=\frac{a^2}{8}\left[\left(1-\frac{a^2}{6}\right)\sin2\varphi+\frac{a^2}{6}\sin\varphi\right] \tag{3.11}$$

为求二次近似，只需由(2.9)式计算出$f_1(a,\varphi)$，将求得的f_1和(3.5)式代入(2.6)式($i=2$)，如上述一样处理，并进行计算，最后得结果

$$\left.\begin{aligned} &A_2(a)=0,\quad x_2(a)=0\\ &\Phi_2(a,\varphi)=\frac{A_1}{2}\frac{dA_1}{da}+\frac{a}{96}\Big[A_1(-48+21a^2)\\ &+\frac{a^3}{96}(108-162a^2+25a^6)^4\Big]+\frac{a^3}{96}\Big[-17A_1+\frac{a}{960}(-960+1810a^2\\ &-379a^4)\Big]\cos2\varphi+\frac{a^3}{24}\cdot\Big[-A_1+\frac{a}{960}(-30+5a^2+28a^4)\Big]\cos4\varphi\\ &+\frac{a^6}{92160}(-210+43a^2)\cos6\varphi-\frac{13}{46080}a^8\cos8\varphi \end{aligned}\right\} \tag{3.12}$$

从理论上还可以继续求出A_3，x_3，φ_3，…．

将结果(3.9)～(3.12)代入(2.5)式，即得系统(3.1)的二次近似解.

由$A_1(a_0)=0$，得极限环的$a_0=\sqrt{2}=1.414$，且由$A_1'(a_0)=-1/2<0$，可知其极限环是定稳的 .则以φ为参变量的极限环曲线的二次近似方程为

$$\left.\begin{aligned} x&=\exp[\sqrt{2}\cos\varphi]-1 \\ \dot{x}&=\sqrt{2}\exp[\sqrt{2}\cos\varphi]\sin\varphi(1+\varepsilon\Phi_1+\varepsilon^2\Phi_2) \end{aligned}\right\} \tag{3.13}$$

其中 Φ_1,Φ_2分别由(3.11)、(3.12)式确定（式中$a=\sqrt{2}$）.由此可在相平面上画出极限环，对于$\varepsilon=0.2$的极限环形状如图所示，图中还给出了数值解结果（点表示数值解，线表示解析解）. 可见解析解与数值解结果基本上相同.

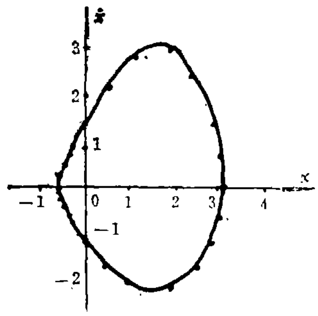

图 1

四、小　　结

本文推得的渐近解的递推方程(2.6)是非常简洁的；同样因为采用派生系统的周期解为其零次近似，故易于把握原系统的渐近解；不论从系统本身或派生系统周期解形式，本文所得结果，其应用范围较广；所推得的递推方程是Φ_i关于φ的一阶偏微分方程，其积分较简便.

本文方法与其它渐近法一样，其主要困难在于判断与求得派生系统的周期解.

参 考 文 献

[1] Li Li (李骊), The periodic solution of quasi-conservative system, *Proc. Int. conf. Nonl. Mech.* Beijing Science Press, (1985).

[2] 徐兆，非线性力学中的一种新的渐近方法，力学学报，17(3) (1985)，266—271.

[3] 戴世强、庄峰青，一类非线性振动系统的渐近解，中国科学（A辑），1,(1986)，34—40.

[4] Villar, G. and F. Zanolin, Some remarks on non-conservative ascillatory systems with periodic solutions, *Int. J. Non-linear Mech*, 23(11)(1988), 1—7.

[5] 舒仲周，《运动稳定性》，西南交通大学出版社(1989)，168—172.

[6] 黄安基，非线性保守系统的几种形式，第五届全国铁路高校理论力学教学讨论会，长沙(1986).

[7] 戴德成、陈建彪，强非线性振动系统的渐近解法，力学学报，22(2)(1990)：206—212.

[8] 曹登庆，强非线性振动方程的渐近分析，西南交通大学学报，(1)(1988)，40—51.

[9] 戴世强，强非线性振子的渐近分析，应用数学与力学，6(5)(1985)，395—400.

The Application of the Asymptotic Method to a Class of Strongly Nonlinear Systems

Xie Liu-hui

(*Changsha Railway Institute, Changsha*)

In this paper, according to the form of the asymptotic solution of papers [1, 2], the asymptotic method is extended to the following class of more general strong nonlinear vibration systems

$$\ddot{x}+g(x,\dot{x})=\varepsilon f(x,\dot{x}) \tag{0.1}$$

where g and f are the nonlinear analytical-functions of x and $\dot{x}$, and $\varepsilon>0$ is a small parameter. We assume that the derivative system corresponding to $\varepsilon=0$ has periodic solution. The recurrence equations of the asymptotic solution for the system (0.1) are deduced in the paper, and they are appiled to practical examples.

Key words strongly nonlinear system, generalized conservative system, asymptotic solution