应用数学和力学，第14卷 第9期（1993年9月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

多体机械手的一般动力学模型*

赵育善 谷良贤

（西北工业大学，1991年11月25日收到）

摘 要

本文建立了多体机械手的一般动力学方程．设多体系统是由任意数目的刚体组成的树形拓扑结构，并认为铰是柱铰链，允许具有相对转动和滑动．考虑到实际问题中摩擦力的影响，采用Newton-Euler 方法，建立了运动方程．进一步通过构造分配矩阵，将动力学方程分离，得到了一组实用的力方程和运动方程．

关键词 多体问题 动力学模型 机器人动力学

符 号 说 明

$OX_0Y_0Z_0$为惯性坐标系

$O_ix_iy_iz_i$为体i上的连体坐标系，O_i为体i与体$i-1$的接触点

m_i为体i的质量

C_i为体i的质心

$\mathbf{I}_i$为体i在连体坐标系上的惯性张量

$\mathbf{S}_{ij}$为由$O_ix_iy_iz_i$到$O_jx_jy_jz_j$的变换矩阵

$\mathbf{Y}$为广义坐标列阵

$\boldsymbol{\omega}_{ij}$为体j相对体i的角速度

${}_N\boldsymbol{\omega}_{ON}$为体$N$的角速度在连体坐标系上的投影

$\mathbf{a}_i$为体i质心加速度

$\boldsymbol{\alpha}_i$为体i的角加速度

$\mathbf{J}_T(\mathbf{Y})$，$\mathbf{J}_R(\mathbf{Y})$为一阶动力响应系数矩阵

$\mathbf{K}_T(\mathbf{Y})$，$\mathbf{K}_R(\mathbf{Y})$为二阶动力响应系数矩阵

$\mathbf{f}_i{}^e$为作用于体i的主动力矢量

$\mathbf{f}_i{}^r$为作用于体i的反作用力矢量

$\mathbf{l}_i{}^e$为作用于体i的主动力对C_i的矩

$\mathbf{l}^r{}_i$为作用于体i的反作用力对C_i的矩

$\mathbf{g}(t)$为广义约束力矢量

$\mathbf{F}_i$，$\mathbf{L}_i$为广义约束力分配矩阵

一、引 言

在机械手动力学问题中通常有两种处理方法．一种认为约束是理想的，用拉格朗日方程或其它方程描述系统，此类方程不含反作用力；另一种则是从牛顿-欧拉方程出发，然后消除反作用力使方程简化．这些方法都不易研究摩擦力和约束反力，而实际问题中必须考虑这些因素．本文考虑这些因素建立一种实用模型．首先用 Newton-Euler 方法建立多体系统的动力学方程，然后通过分配矩阵描述作用在系统上的力，利用分配矩阵和雅可比矩阵将动力学方程分离成运动方程和反作用力方程．

* 赵兴华推荐．

二、系统描述

本文研究单开链系统，如图1所示．运动付是转动付，移动付或转动加移动付，广义坐标是相对转角和相对位移量．臂的编号由基体向手腕依次由小到大．

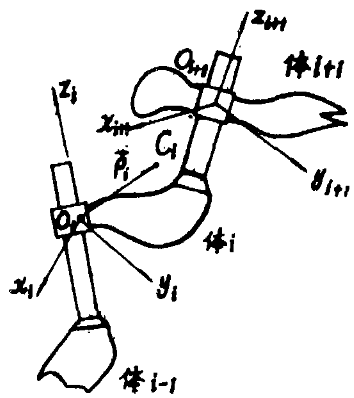

图 1

三、多体运动学关系

根据角速度合成及坐标交换公式，可以得到如下递推公式

$$ {}_N\boldsymbol{\omega}_{ON}=\mathbf{S}_{N(N-1)}\left({}_{(N-1)}\boldsymbol{\omega}_{0(N-1)}+\boldsymbol{\omega}_{(N-1)N}\right). \tag{3.1}$$

用广义坐标表示的角速度为

$$ {}_N\boldsymbol{\omega}_{ON}=\mathbf{J}_{RN}\dot{\mathbf{Y}}, \tag{3.2}$$

体 i 的质心C_i的速度为

$$\mathbf{V}_{Ci}=\mathbf{J}_{Ti}(\mathbf{Y})\dot{\mathbf{Y}}, \tag{3.3}$$

由式(3.2)得体 i 的角加速度为

$$\boldsymbol{\alpha}_i=\mathbf{J}_{Ri}\ddot{\mathbf{Y}}+\mathbf{K}_{Ri}\dot{\mathbf{Y}}^2 \qquad (i=1,2,\cdots,P) \tag{3.4}$$

由式(3.3)得体i的质心C_i的加速度为

$$\mathbf{a}_i=\mathbf{J}_{Ti}\ddot{\mathbf{Y}}+\mathbf{K}_{Ti}\dot{\mathbf{Y}}^2 \tag{3.5}$$

四、作用在系统上的力

作用在系统上的力可分为主动力和反作用力．主动力包括重力，控制力和摩擦力，其中摩擦力是与反作用力有关的非理想力．可以将主动力向质心C_i简化，得$\mathbf{f}_i^a$和$\mathbf{l}_i^a$，反作用力简化得$\mathbf{f}_i^r$和$\mathbf{l}_i^r$．重力和控制力容易向质心简化，下面讨论摩擦力和约束反力向质心的简化问题．

设系统由P个刚体组成，有q个约束，需要f个广义坐标描述．那么可将反作用力表示为一般形式

$$\left.\begin{aligned}\mathbf{f}_i^r&=\mathbf{F}_i(\mathbf{Y},t)\mathbf{g}(t)\\ \mathbf{l}_i^r&=\mathbf{L}_i(\mathbf{Y},t)\mathbf{g}(t)\end{aligned}\right\}\quad(i=1,2,\cdots,P)\tag{4.1}$$

称$\mathbf{g}(t)$为广义约束力矢量，$\mathbf{F}_i$和$\mathbf{L}_i$为广义约束力的分配矩阵，其中$\mathbf{g}$是$q\times1$阶矢量，$\mathbf{F}_i$和$\mathbf{L}_i$为$3\times q$阶矩阵.

广义摩擦力与反作用力，运动方向和两材料的性质有关. 类似于式(4.1)，可以将广义摩擦力表示为

$$\left.\begin{aligned}\mathbf{f}_i^c&=\mathbf{F}_i^c(\mathbf{Y},t)\mathbf{q}_R(\dot{\mathbf{Y}},\mathbf{g})\\ \mathbf{l}_i^c&=\mathbf{L}_i^c(\mathbf{Y},t)\mathbf{q}_R(\dot{\mathbf{Y}},\mathbf{g})\end{aligned}\right\}\quad(i=1,2,\cdots,P)\tag{4.2}$$

这样，摩擦力向C_i简化的结果是广义坐标，广义速度和反作用力的函数.

以上引入的分配矩阵是广义坐标的函数.

五、动力学方程

为了列写Euler方程方便，引入坐标系$C_ix_i'y_i'z_i'$，其x_i',y_i',z_i'轴分别与x_i，y_i和z_i轴平行. 在$C_ix_i'y_i'z_i'$坐标系中$\bar{\mathbf{I}}_i$保持常量. 于是有牛顿方程和欧拉方程：

$$m_ia_i(t)=f_i(t)+\sum_{j=1}^{P}f_{ij}(t)\tag{5.1}$$

$$\bar{\mathbf{I}}_i\boldsymbol{\alpha}_i(t)+\tilde{\boldsymbol{\omega}}_i(t)\bar{\mathbf{I}}_i\boldsymbol{\omega}_i(t)=\mathbf{l}_i(t)+\sum_{j=1}^{P}l_{ij}(t)\tag{5.2}$$

其中 $\mathbf{f}_i(t)$是作用在体i上的主动力，$\mathbf{l}_i(t)$是主动力对C_i的矩，$\mathbf{f}_{ij}$是体j作用于体i的约束反力，$\mathbf{l}_{ij}$是约束反力对C_i的矩.

反作用力之间有系关：

$$\mathbf{f}_{ij}+\mathbf{f}_{ji}=0\tag{5.3}$$

$$\mathbf{l}_{ij}+\mathbf{l}_{ji}+\tilde{\mathbf{r}}_{ij}\mathbf{f}_{ji}=0\tag{5.4}$$

将式(3.2)(3.4)和式(3.5)代入式(5.1)和式(5.2)，并把力分为主动力和反作用力，则可得牛顿-欧拉方程.

引入

$$\bar{\mathbf{M}}=\mathrm{diag}\{m_1\mathbf{E}\ \cdots\ m_P\mathbf{E}\bar{\mathbf{I}}_1\ \cdots\ \bar{\mathbf{I}}_P\}\tag{5.5}$$

其中$\mathbf{E}$是3×3单位矩阵.

$$\bar{\mathbf{J}}=[\mathbf{J}_{T1}^T\ \cdots\ \mathbf{J}_{TP}^T\mathbf{J}_{R1}^T\ \cdots\ \mathbf{J}_{RP}^T]^T\tag{5.6}$$

和

$$\bar{\mathbf{Q}}=[\mathbf{F}_1^T\ \cdots\ \mathbf{F}_P^T\mathbf{L}_1^T\ \cdots\ \mathbf{L}_P^T]^T\tag{5.7}$$

则可得矩阵形式的 Newton-Euler 方程

$$\bar{\mathbf{M}}\bar{\mathbf{J}}\ (t)+\bar{\mathbf{q}}^c(\mathbf{Y},\dot{\mathbf{Y}},t)=\bar{\mathbf{q}}^e(\bar{\mathbf{Y}},\dot{\mathbf{Y}},\mathbf{g},t)+\bar{\mathbf{Q}}\mathbf{g}(t)\tag{5.8}$$

其左端第二项是惯性力项，右端第一二项分别是主动力和反作用力项.

由式(3.8)可得到$6P$个标量方程，这些方程可以确定广义坐标y_j $(j=1,\cdots,f)$ 和广义约束力$g_k(k=1,\cdots,q)$. 其中

$$f+q=6P\tag{5.9}$$

六、运动方程和力方程

达朗贝尔原理指出，在多体系统中反作用力不做功，特别是反作用力的虚功也为零，即

$$\delta W=\sum_{i=1}^{p}(\delta r_i^T f_i^r+\delta \mathbf{S}_i^T \mathbf{l}_i^r)=0, \tag{6.1}$$

其中 $\mathbf{S}_i$是体 i 的无穷小转动的3×1矢量．

利用式(4.1)，(5.6)和(5.7)可以将式(6.1)写成

$$\delta \mathbf{Y}^T \mathbf{J}^T \overline{\mathbf{Q}} \mathbf{g}=0. \tag{6.2}$$

由于$\delta\mathbf{Y}$独立，所以可得

$$\mathbf{J}^T \overline{\mathbf{Q}}=0 \tag{6.3}$$

这表明一般的雅可比矩阵$\mathbf{J}$和分配矩阵$\mathbf{Q}$是正交的．利用这一性质可以使 Newton-Euler 方程分离．

由式(5.8)左乘以转置的雅可比矩阵 $\mathbf{J}^T$可得运动方程

$$\mathbf{M}(\mathbf{Y})\ddot{\mathbf{Y}}(t)+\mathbf{K}(\mathbf{Y},\dot{\mathbf{Y}})=\mathbf{q}(\mathbf{Y},\dot{\mathbf{Y}},\mathbf{g},t) \tag{6.4}$$

这就是消除了约束反力后的动力学方程．另一方面，若用$\overline{\mathbf{Q}}^T\overline{\overline{\mathbf{M}}}^{-1}$左乘以式(5.8)，则得

$$\mathbf{N}(\mathbf{Y})\mathbf{g}(t)+\hat{\mathbf{q}}(\mathbf{Y},\dot{\mathbf{Y}},\mathbf{g},t)=\hat{\mathbf{K}}(\mathbf{Y},\dot{\mathbf{Y}}) \tag{6.5}$$

此式不依赖于广义加速度$\ddot{\mathbf{Y}}$．方程(6.5)称为反作用力方程．

机器人中的广义主动力由三部分组成

$$\mathbf{q}(\mathbf{Y},\dot{\mathbf{Y}},\mathbf{g},t)=\mathbf{q}_G(\mathbf{Y})+\mathbf{q}_{St}(t)+\mathbf{q}_R(\dot{\mathbf{Y}},\mathbf{g}) \tag{6.6}$$

其右端第一项为广义坐标所决定，第三项由摩擦引起．

一般情况下运动方程 (6.4) 和反作用力方程(6.5)是彼此耦合的，参见图2，通过计算可得数值解．

在理想情况下不出现摩擦力，$\mathbf{q}_R=0$，因而只保留了理想的主动力，这样可以使运动方程和力方程退耦，如图3．此时运动方程为

$$\mathbf{M}(\dot{\mathbf{Y}})\ddot{\mathbf{Y}}+\mathbf{K}(\mathbf{Y},\dot{\mathbf{Y}})=\mathbf{q}(\mathbf{Y},t), \tag{6.7}$$

而力方程为

$$\mathbf{N}(\mathbf{Y})\mathbf{g}(t)+\hat{\mathbf{q}}(\mathbf{Y},\dot{\mathbf{Y}},t)=\hat{\mathbf{K}}(\mathbf{Y},\dot{\mathbf{Y}}). \tag{6.8}$$

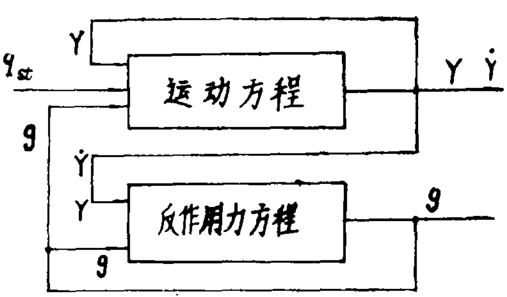

图 2

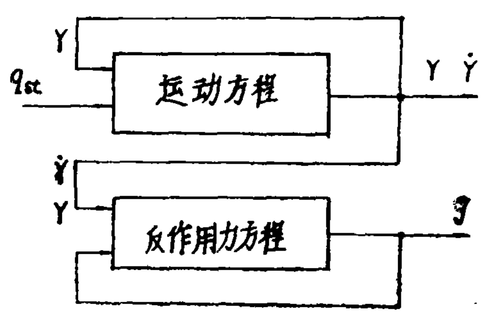

图 3

七、结　论

本文建立了多体机械手的动力学模型，考虑了摩擦力的作用，并通过分配矩阵和雅可比矩阵将动力学方程分距为实用的运动方程和反作用力方程．本文为了刚体编号方便而采用了单开链系统，而所得结论适用于各种树结构和闭链系统．对于闭链结构，可根据J. Wittenburg的思路将其转化成开链结构．

参 考 文 献

[1] Kane, T. R. and D. A. Levinson, The use of Kane's dynamical equations in robotics, *The International Journal of Roboties Research*, 2(3)(1983), 3—21.

[2] Siloer, W. M., On the Equivalence of Lagrangian and Newton—Euler dynamics for manipulators, *The International Journal of Roboties Research* 1(2)(1982), 60—70.

[3] 周起钊，树形多刚体系统的动力学普遍方程，力学学报，3(1973)，267—277.

[4] Schielen, W., Generalized constraint forces in ordinary multiboby systems, *Preprint 14th Yugoslav Congress Rational Applied Mechanics*, C_3—16, Beograd(1978), 301—308.

[5] Wittenburg, J., *Dynamics of Systems of Rigid Bodies*, B. G. Teubner Stuttgart, (1977).

Generalized Dynamic Model for Multibodies Manipulator

Zhao Yu-shan　　Gu Liang-xian

(*North-western Polytechnical University, Xi'an*)

Abstract

In this paper the general dynamical equations were given for multibodies manipulator. The system is a topologic tree structure consisting of arbitrary number of rigid bodies. The hinges allow the rotational and/or translational motion. In consideration of influence of friction the dynamic equations are established by means of Newton—Euler's method. Further, the equations are separated by way of constructing the distribution matrices and a group of force and motion equations are obtained.

Key words multibodies problem, dynamic model, dynamics of robot