

刚塑性圆柱壳的冲击扭转屈曲*

王德禹** 张善元 杨桂通

(太原工业大学应用力学研究所, 1992年5月11日收到)

摘 要

本文将文献[3]给出的能量准则用于处理刚塑性圆柱壳的冲击扭转屈曲, 文中推导了圆柱壳塑性动力扭转屈曲线性方程, 获得了临界冲击速度。

关键词 塑性动态屈曲 能量准则 刚塑性体 圆柱壳

一、引 言

结构的塑性动力稳定研究起始于本世纪60年代, 由于在强冲击载荷下材料产生较大的塑性变形以及波和动力响应的交叉等强烈的物理非线性和几何非线性, 也由于实验和测试上的困难, 使得这一问题的研究成为塑性力学的前沿领域之一, Jones曾于1989年对此进行了较简洁的总结^[1]。

总的来看, 有关结构在冲击载荷下的塑性动态屈曲研究有如下的特点:

(1) 采用小变形理论, 不考虑弹性的影响。

(2) 在分析上多数限于扰动分析(也称之为放大函数法), 详见文献[2]。近年来有些研究采用了能量的方法, 如茹重庆和王仁对圆柱壳和锥壳在轴向撞击下的塑性动态屈曲分析^[3,4]。

(3) 大部分研究不考虑波的传播效应, 揭敏采用有限元法对杆的弹塑性动态屈曲进行了研究^[5], 他考虑了波的效应。显然由于波传播的复杂性, 试图给出一个解析表达式是极为困难的。

(4) 对于圆柱壳来讲, 人们的研究主要限于壳体受径向和轴向冲击, 而壳体受扭转冲击载荷作用的塑性动力屈曲问题至今未见公开报导, 包括理论分析和实验研究。

本文应用文献[3]中的能量准则, 给出刚塑性线性强化圆柱壳在冲击扭矩作用下的塑性动态屈曲分析。

二、问题的提法及有关假定

考虑一刚塑性线性强化材料的圆柱壳, 密度为 ρ , 长为 L , 半径为 R , 厚为 H , 壳体的

* 国家自然科学基金资助课题。

** 现在工作单位: 上海交通大学一系。

右端有一质量为 M 的附着物，附着物绕壳轴线的转动惯量为 MR^2 。现壳体和附着物一起以角速度 V/R 绕壳体的轴线旋转，若壳体的左端突然固定不动（见图1），我们的问题是研究此时壳体的动态屈曲行为。为此进行如下的假定：

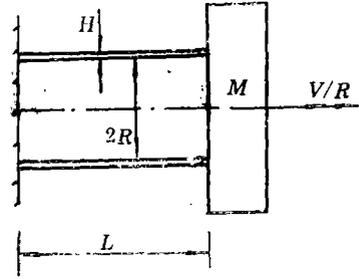


图1 扭转屈曲问题

(1) 忽略弹性变形，取材料的本构关系为刚塑性应变线性强化，即其广义应力 σ 和广义应变 ε 的关系为：

$$\sigma = \sigma_0 + E_h \varepsilon \quad (2.1)$$

这里 σ_0 是由单向拉伸试验所确定的初始屈服应力， E_h 为强化模量。

(2) 类似于Florence和Goodier在文献[6]中关于圆柱壳受轴向冲击问题的研究，这里也假定壳体的左端突然停止转动以后，右端仍以原来的角速度 V/R 旋转，当全部动能完全转化为塑性功时，壳体才停止承受冲击作用，由此可以算出冲击持续时间 t_f 为：

$$t_f = [\sqrt{3}LV\rho(1+M/m)]/2\sigma_0 \quad (2.2)$$

这里 m 为壳体的质量， $m=2\pi RLH\rho$ 。

(3) 在屈曲模态的发展过程中，壳体内部的应变率取决于壳体右端以角速度 V/R 所进行的旋转运动，此即所谓的主导运动，也即假定没有应变率的反向问题。

(4) 不考虑端部效应，材料不可压缩。

三、圆柱壳的塑性理论基本关系式

以下用 x, y, z 分别表示壳体中面任意一点的轴向、周向以及法向坐标， z 轴的正向指向壳的外法线， $(\dot{\quad})$ 表示率， $(\quad)_{,x} = \partial(\quad)/\partial x$ 。采用薄壳理论有：

$$\dot{\gamma}_{yz} = \dot{\gamma}_{xz} = 0, \quad \sigma_x = \sigma_{xz} = \sigma_{yz} = 0 \quad (3.1)$$

这样以应力偏量表示的应力为：

$$\sigma_y = 2\sigma'_y + \sigma'_z, \quad \sigma_z = 2\sigma'_z + \sigma'_y, \quad \sigma_{xy} = \sigma'_{xy} \quad (3.2)$$

$\sigma'_z, \sigma'_y, \sigma'_{xy}$ 为应力偏量。又由材料的不可压缩性有：

$$\delta_z = -(\delta_x + \delta_y) \quad (3.3)$$

由(3.3)、(3.1)，广义应变率 $\dot{\varepsilon}$ 和广义应力可写为：

$$\dot{\varepsilon} = \left[\frac{4}{3} \left(\dot{\varepsilon}_x^2 + \dot{\varepsilon}_y^2 + \dot{\varepsilon}_z^2 + \frac{1}{4} \dot{\gamma}_{xy}^2 \right) \right]^{1/2} \quad (3.4)$$

$$\sigma = (\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x \sigma_y + 3\sigma_z^2)^{1/2} \quad (3.5)$$

再应用Levy-Mises塑性流动理论有：

$$\frac{\delta_x}{\sigma'_x} = \frac{\delta_y}{\sigma'_y} = \frac{\delta_z}{\sigma'_z} = \frac{\dot{\gamma}_{xy}}{2\sigma'_{xy}} = \frac{3\dot{\varepsilon}}{2\sigma} \quad (3.6)$$

将(3.6)代入(3.2)，最后得：

$$\sigma_x = \frac{2\sigma}{3\dot{\varepsilon}} (2\dot{\varepsilon}_x + \dot{\varepsilon}_y), \quad \sigma_y = \frac{2\sigma}{3\dot{\varepsilon}} (2\dot{\varepsilon}_y + \dot{\varepsilon}_x), \quad \sigma_{xy} = \frac{2\sigma}{3\dot{\varepsilon}} \left(\frac{\dot{\gamma}_{xy}}{2} \right) \quad (3.7)$$

四、塑性扭转屈曲动力方程

令壳体的法向屈曲挠度为 $w(x, y, t)$, t 为时间, 按照薄壳理论^[7], 可得壳体内任意一点的应变率为:

$$\dot{\epsilon}_x = z\dot{w}_{,xx}, \quad \dot{\epsilon}_y = \dot{w}/R + z\dot{w}_{,yy}, \quad \dot{\gamma}_{xy} = V/L + 2z\dot{w}_{,xy} \quad (4.1a, b, c)$$

将(4.1)代入(3.4)并略去 w 和 z 的高阶项, 而仅保留其线性项有:

$$\dot{\epsilon} = \frac{V}{\sqrt{3}L} \left(1 + \frac{2L}{V} z\dot{w}_{,xy} \right) \quad (4.2)$$

$$\epsilon = \frac{V}{\sqrt{3}L} \left(t + \frac{2L}{V} z\dot{w}_{,xy} \right) \quad (4.3)$$

$$\sigma = \sigma_0 + \frac{VE_h}{\sqrt{3}L} t + \frac{2E_h}{\sqrt{3}} z\dot{w}_{,xy} \quad (4.4)$$

$$\frac{2\sigma}{3\dot{\epsilon}} = \frac{2\sqrt{3}L}{3V} \left[\bar{\sigma} + z \left(\frac{2E_h}{\sqrt{3}} \dot{w}_{,xy} + \frac{2L\bar{\sigma}}{V} \dot{w}_{,xy} \right) \right] \quad (4.5)$$

其中: $\bar{\sigma} = \sigma_0 + VE_h t / \sqrt{3}L$

这样将(4.1)~(4.5)代入(3.7), 并略去 w , \dot{w} 及 z 的高阶项, 可得应力的表达式为:

$$\sigma_x = \frac{2\sqrt{3}L\bar{\sigma}}{3V} \left[\frac{w}{R} + z(2w_{,xx} + w_{,yy}) \right] \quad (4.6a)$$

$$\sigma_y = \frac{2\sqrt{3}L\bar{\sigma}}{3V} \left[\frac{2w}{R} + z(w_{,xx} + 2w_{,yy}) \right] \quad (4.6b)$$

$$\sigma_{xy} = \frac{2\sqrt{3}L\bar{\sigma}}{3V} \left[\frac{V}{2L} + z \left(2\dot{w}_{,xy} + \frac{VE_h}{\sqrt{3}L\bar{\sigma}} \dot{w}_{,xy} \right) \right] \quad (4.6c)$$

由此可得壳体的内力表达式为:

$$N_x = \frac{2\sqrt{3}L\bar{\sigma}H}{3V} \frac{w}{R}, \quad N_y = \frac{2\sqrt{3}L\bar{\sigma}H}{3V} \frac{2w}{R}, \quad N_{xy} = \frac{2\sqrt{3}L\bar{\sigma}H}{3V} \frac{V}{2L} \quad (4.7a, b, c)$$

$$M_x = \frac{2\sqrt{3}L\bar{\sigma}H}{3V} \cdot \frac{H^2}{12} (2w_{,xx} + w_{,yy}) \quad (4.8a)$$

$$M_y = \frac{2\sqrt{3}L\bar{\sigma}H}{3V} \cdot \frac{H^2}{12} (2w_{,yy} + w_{,xx}) \quad (4.8b)$$

$$M_{xy} = \frac{2\sqrt{3}L\bar{\sigma}H}{3V} \cdot \frac{H^2}{12} \left(2\dot{w}_{,xy} + \frac{VE_h}{\sqrt{3}L\bar{\sigma}} \dot{w}_{,xy} \right) \quad (4.8c)$$

又壳体的动力平衡方程为:

$$-N_y/R + Q_{x,x} + Q_{y,y} + \rho H w_{,tt} = 0 \quad (4.9a)$$

$$N_{xy}w_{,x} + M_{xy,x} + M_{y,y} + N_y w_{,y} = Q_y \quad (4.9b)$$

$$N_{xx}w_{,y} + M_{xy,y} + M_{x,x} + N_x w_{,x} = Q_x \quad (4.9c)$$

将(4.9)的后面两式代入其第一式, 进一步消去剪力 Q_x 和 Q_y 有:

$$\begin{aligned} & -N_y/R + 2M_{xy,xy} + M_{y,yy} + M_{x,xx} + 2N_{xy}w_{,xy} \\ & + N_{xy,y}w_{,x} + N_{xy,x}w_{,y} + N_x w_{,xx} \\ & + N_y w_{,yy} + N_{x,x}w_{,x} + N_{y,y}w_{,y} + \rho H w_{,tt} = 0 \end{aligned} \quad (4.10)$$

再将(4.7)、(4.8)两式代入上式,并略去 w 的高阶项有:

$$\begin{aligned} & \frac{3\rho V}{2\sqrt{3}L\sigma_0} \dot{w} + \frac{H^2}{12} (6w_{,zzyy} + 2w_{,zzzz} + 2w_{,yyyy}) \\ & + \frac{H^2 V E_h}{6\sqrt{3}L\sigma_0} w_{,zzyy} + \frac{V}{L} w_{,zy} - \frac{2}{R^2} w = 0 \end{aligned} \quad (4.11)$$

和文献[6]相同,这里我们也近似地取 $\sigma \approx \sigma_0$ 。方程(4.11)即我们所求的刚塑性线性强化材料圆柱壳的塑性动力扭转屈曲线性方程。

五、临界冲击速度

针对有限时间 t_f 内的结构塑性冲击屈曲问题,茹重庆和王仁提出了如下的能量准则^[3,4]:结构在冲击载荷下,若对于它所处的基本运动的一个几何可能偏离,必将使系统在此偏离过程中所吸收的能量大于载荷所做的功,即违背能量守恒原理,则结构不可能屈曲。通过定义泛函 $F(v, w)$ 给出了如下的稳定性条件:

$$F(v, w) = \int_0^{t_f} \int_0^L f w dt dX > 0 \quad (5.1)$$

这里扰动运动 $w(x, t)$ 满足的运动方程为:

$$f(v, w) = 0 \quad (5.2)$$

v 是冲击参数, L 是空间坐标 X 的区间, t_f 是冲击时间。偏离运动 $w(x, t)$ 除满足边界条件外,还具有如下的几条性质:

(1) $w(x, t)$ 所对应的初始扰动能量在计算泛函 $F(v, w)$ 时可以略去不计。

(2) $w(x, t)$ 及其各阶导数在 $t=0$ 时初始值在平均意义下相对于它们在 $t=t_f$ 时的末态值可以略去不计。

(3) 略去 $F(v, w)$ 中的动能项。

现对于本文所讨论的圆柱壳冲击扭转屈曲问题,取屈曲形态为如下的形式:

$$w(x, y, t) = 2f(t) \cos \frac{n(y+kx)}{R} \cos \frac{\pi x}{L} = f(t) [f_1(x, y) + f_2(x, y)] \quad (5.3)$$

$$\text{其中: } f_1(x, y) = \cos \left[\frac{ny}{R} + \left(\frac{kn}{R} - \frac{\pi}{L} \right) x \right] \quad (5.4a)$$

$$f_2(x, y) = \cos \left[\frac{ny}{R} + \left(\frac{kn}{R} + \frac{\pi}{L} \right) x \right] \quad (5.4b)$$

这里 n 为周向屈曲波纹数, k 为常数,它反映了屈曲波纹和壳体轴线的夹角。

将(5.3)式代入(4.11),并将(4.11)式两边乘以 w ,再对时间在 $[0, t_f]$ 上进行积分,同时空间坐标也在整个壳体上进行积分。这样应用前述能量法的基本思想,并利用下述不等式:

$$\int_0^d w^2 dt \geq \frac{1}{d} [w(d) - w(0)]^2 \quad (d > 0) \quad (5.5)$$

于是得到不发生冲击扭转屈曲的充分条件为:

$$\frac{1}{t_f} \left[\frac{H^2}{6} S_1 - S_2 \right] + \frac{H^2 V E_h}{6\sqrt{3}L\sigma_0} S_3 \geq \frac{VS_4}{L} \quad (5.6)$$

其中:

$$S_1 = (3\alpha^2\beta_1^2 + \beta_1^4 + \alpha^2)R_2 + (3\alpha^2\beta_2^2 + \beta_2^4 + \alpha^2)R_1 \quad (5.7)$$

$$S_2 = 2(R_x + R_y)/R^2 \quad (5.8)$$

$$S_3 = \alpha^2(\beta_1^2 R_x + \beta_2^2 R_y)/2 \quad (5.9)$$

$$S_4 = V\alpha(\beta_1 R_x + \beta_2 R_y)/2L \quad (5.10)$$

$$R_x = \int_{-L/2}^{L/2} \int_{-\pi}^{\pi} f_1(x, y) [f_1(x, y) + f_2(x, y)] dx dy \quad (5.11)$$

$$R_y = \int_{-L/2}^{L/2} \int_{-\pi}^{\pi} f_2(x, y) [f_1(x, y) + f_2(x, y)] dx dy \quad (5.12)$$

$$\alpha = \frac{n}{R}, \quad \beta_1 = \frac{nk}{R} - \frac{\pi}{L}, \quad \beta_2 = \frac{nk}{R} + \frac{\pi}{L} \quad (5.13)$$

另一方面由(2.2)式得:

$$V_{t_f} = \sqrt{3} L \rho (1 + M/m) V^2 / 2 \sigma_0 \quad (5.14)$$

因此当 L , ρ , σ_0 , M 和 m 均给定时, V_{t_f} 就代表了 V^2 , 这样在以后的临界速度计算中, 只需计算 V_{t_f} 的临界值即可, 于是由(5.6)式可得:

$$(V_{t_f})_{cr} = \frac{L(H^2 S_1 / 6 - S_2)}{S_4 - H^2 E_b S_3 / 6 \sqrt{3} \sigma_0} \quad (5.15)$$

在实际 $(V_{t_f})_{cr}$ 的计算中, 应对(5.15)式中的不同 n 和 k 取值, 以确定其最小值。

六、算例及讨论

由于圆柱壳的塑性冲击扭转屈曲问题至今未见公开报导, 下面仅和茹重庆等关于圆柱壳的轴向冲击屈曲研究结果进行对比。对于轴向冲击问题, 若忽略 $(V_{t_f})_{cr}$ 中的 E_b 项, 文献[3]指出:

$$(V_{t_f})_{cr} = 4HL/3^{3/2}R \quad (6.1)$$

对于扭转问题的(5.15)式来讲, 若也忽略其 E_b 项的影响, 可得:

$$(V_{t_f})_{cr} = L(H^2 S_1 / 6 - S_2) / S_4 \quad (6.2)$$

图2至图4分别给出了不同 H , L , R 时, 由(6.2)式计算所得的 $(V_{t_f})_{cr}$ 值, 由此可见, 在这类扭转冲击问题中, $(V_{t_f})_{cr}$ 随 H , L , R 的变化规律和轴向冲击时基本相同。

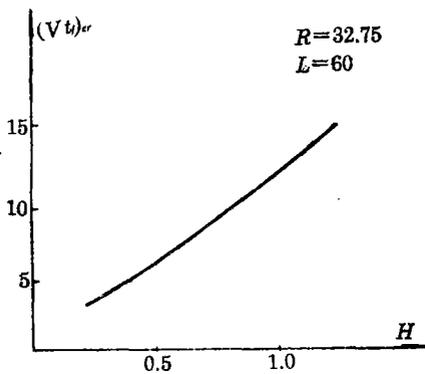


图2 不同 H 时的 $(V_{t_f})_{cr}$

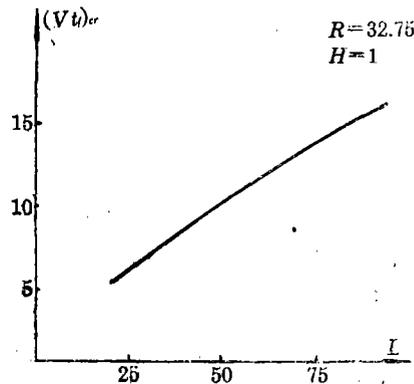


图3 不同 L 时的 $(V_{t_f})_{cr}$

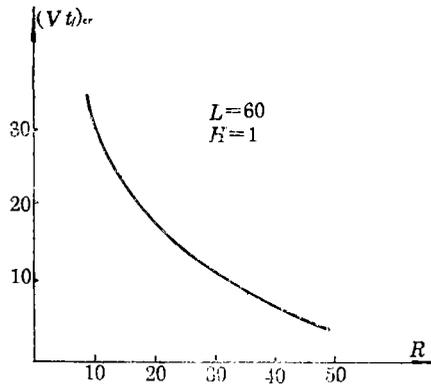


图4 不同 R 时的 $(V_{t_f})_{cr}$

参 考 文 献

- [1] Jones, N., Recent studies on the dynamic plastic behavior of structures, *Appl. Mech. Review.*, 42(4) (1989), 95—115.
- [2] Lindberg, H. E. and A. L. Floreccc, *Dynamic Pulse Buckling: Theory and Experiment*, Martinus Nijhoff (1987).
- [3] 茹重庆、王仁, 关于冲击载荷下圆柱壳塑性屈曲的两个问题, 固体力学学报, 9(1) (1988), 62—66.
- [4] 茹重庆、王仁, 轴向冲击载荷下圆锥壳的塑性屈曲, 工程力学, 5(2) (1988), 1—9.
- [5] 揭敏, 一定初缺陷杆在轴向冲击下弹塑性动态屈曲有限元计算, 爆炸与冲击, 11(2) (1991), 153—160.
- [6] Florence, A. L. and J. N. Goodier, Dynamic plastic buckling of cylindrical shells in sustained axial compressive flow, *J. Appl. Mech.*, ASME, 35 (1968), 80—86.
- [7] 薛大为, 《板壳理论》, 北京工业大学出版社 (1988).

The Impact Torsional Buckling for the Rigid Plastic Cylindrical Shell

Wang De-yu Zhang Shan-yuan Yang Gui-tong

(*Institute of Applied Mechanics, Taiyuan University of Technology, Taiyuan*)

Abstract

By using the energy criterion in [3], the impact torsional buckling for the rigid plastic cylindrical shell is studied. The linear dynamic torsional buckling equations for the rigid plastic shell is derived, and the critical impact velocity is given.

Key words dynamic plastic buckling, energy criterion, rigid plastic material, cylindrical shell