

轴对称圆板(含叠层板) 的三维非线性分析*

江晓禹 张相周

(西安 西北工业大学强度所, 1991年11月28日收到)

摘 要

本文提出了轴对称固支圆板(含叠层板)受均布横向载荷作用下的三维非线性摄动解答。文中所考虑的是一种中等大挠度的几何非线性, 并采用一种发展的摄动方法对复杂的三维非线性平衡微分方程进行求解。该方法的基本思想是以二维解答为基础, 对板的厚度参数进行摄动而求得相应的三维解答。文中给出了一般板及叠层板的三维非线性理论结果及数值结果, 并图示出了各个应力的分布情况。而且, 该三维非线性结果能退化为完全一致的相应的二维板理论非线性结果。结果表明, 该方法对板的三维非线性分析是一种行之有效的方法。

关键词 三维分析 几何非线性 摄动法 轴对称

一、引 言

当代科学技术的高度发展, 要求我们采用三维弹性理论以获得板的力学特征的高精确度预测, 特别是夹心板、叠层板等新型结构, 更是如此。因为, 对这样的板, 由横向正应力及层间剪应力引起的层间脱胶是一种主要的破坏形式。虽然板的二维分析可以很容易在弹性力学书中找到, 但三维分析特别是三维非线性分析却很少。Timoshenko^[1]提出了仅具有应力边界条件的轴对称各向同性圆板的三维线性弹性解答, 但该解答不满足位移边界条件; Vlasov^[4]提出了简支各向同性板的三维线性解答, 但对于一般板及叠层板的比较准确的三维非线性分析还是几乎没有的。本文提出了轴对称固支各向同性圆板及不同材料的叠层板受均布横向载荷作用下的三维非线性解答。同时, 获得该解答的摄动方法是有效易行的, 对板的三维非线性分析也是一种有效的方法。

二、一般板的三维非线性分析

在应力分析中, 许多具有实际重要性的问题都是与旋转轴对称变形的旋转体相联系的, 对于这类问题利用柱坐标是很方便的(见图1)。如变形关于 z 轴对称, 则应力分量、应变分量及位移分量都与坐标 θ 无关, 所有对 θ 的导数都消失了。同时, 因轴对称性, 剪应力分量 $\tau_{r\theta}$, $\tau_{\theta z}$ 以及环向的位移分量 v 都为零。取 u , w 分别代表径向及 z 向位移分量, 略去体力, 且

* 钱伟长推荐。

板由弹性模量为 E ，泊松比为 ν 的均匀各向同性材料构成。

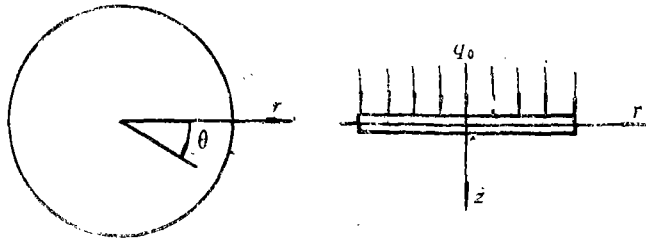


图1 圆板的坐标系及形状

我们将考虑这样一种非线性，即：板的微小单元的线应变 ϵ_i 和转动角的平方 ω_i^2 与1相比可略去，并且适用虎克定律。也就是说，板具有中等大挠度的变形。对于圆板的轴对称变形，由于在板的大多数工程应用中，板的厚度/跨度之比是很小的，板在其自身平面内为一大块，故绕 z 轴的转动 $\omega_z=0$ ，则得到如下应变—位移关系⁽²⁾：

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_r &= u_{,r} + w^2_{,r}/2, & \gamma_{rz} &= u_{,z} + w_{,r} \\ \epsilon_\theta &= u/r, & \gamma_{r\theta} &= 0 \\ \epsilon_z &= w_{,z} + u^2_{,z}/2, & \gamma_{\theta z} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

式中下标逗号表示对相应坐标的偏微分。同时，根据虎克定律有：

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= E_1(\mu\epsilon + \epsilon_r) \\ \sigma_\theta &= E_1(\mu\epsilon + \epsilon_\theta) \\ \sigma_z &= E_1(\mu\epsilon + \epsilon_z) \\ \tau_{rz} &= E_1 \cdot \gamma_{rz}/2 \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

其中， $E_1 = E/(1+\nu)$ ， $\mu = \nu/(1-2\nu)$

三维非线性平衡微分方程为⁽²⁾：

$$\left. \begin{aligned} (\sigma_r + u_{,z}\tau_{rz})_{,r} + (\tau_{rz} + u_{,z}\sigma_z)_{,z} + (\sigma_r - \sigma_\theta + u_{,z}\tau_{rz})/r &= 0 \\ (\tau_{rz} + w_{,r}\sigma_r)_{,r} + (\sigma_z + w_{,r}\tau_{rz})_{,z} + (\tau_{rz} + w_{,r}\sigma_r)/r &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.3)$$

基于摄动方法，我们引用如下的无量纲参数：

$$\xi = \frac{r}{a}, \quad Z = \frac{z}{h}, \quad U = \frac{u}{h}, \quad W = \frac{w}{h}, \quad P = \frac{q_0 a^4}{E_1 h^4} \quad (2.4)$$

式中 a 和 h 分别为板的半径及半厚度。由于在绝大多数工程应用中，板的厚跨比是很小的，取 $\epsilon = h/a$ 为无量纲小参数。把方程(2.1)、(2.2)代入方程(2.3)，得如下用位移表示的无量纲三维非线性平衡微分方程。

$$\begin{aligned} & U_{,zz}W_{,z} + U_{,z}W_{,zz} + \frac{3}{2}U^2_{,z}U_{,zz} + \frac{1}{2}U_{,zz} \\ & + \mu \cdot (\epsilon\epsilon_{,z} + \epsilon U_{,zz} + \epsilon_{,z}U_{,z}) \\ & + \epsilon \cdot \left(\frac{1}{2}W_{,z}z + U_{,z}U_{,zz} + \frac{1}{2\xi}U^2_{,z} \right) \\ & + \epsilon^2 \left(U_{,zz} + \frac{1}{\xi}U_{,z} - \frac{1}{\xi^2}U + \frac{1}{2}U_{,zz}W_{,z} + \frac{1}{2}U_{,z}W_{,zz} \right. \\ & \left. + \frac{1}{2\xi}U_{,z}W_{,z} \right) + \epsilon^3 \left(W_{,z}W_{,zz} + \frac{1}{2\xi}W^2_{,z} \right) = 0 \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned}
& W_{,zz} + U_{,z}U_{,zz} + \mu \left[e_{,z} + e^2 \cdot e \left(W_{,\xi\xi} + \frac{1}{\xi} W_{,\xi} \right) + e^2 W_{,\xi} e_{,\xi} \right] \\
& + \frac{e}{2} \left(U_{,\xi z} + U_{,z}W_{,\xi z} + U_{,zz}W_{,\xi} + \frac{1}{\xi} U_{,z} \right) \\
& + e^2 \left(\frac{1}{2} W_{,\xi\xi} + W_{,\xi}W_{,\xi z} + \frac{1}{2\xi} W_{,\xi} \right) \\
& + e^3 \left(W_{,\xi\xi}U_{,\xi} + W_{,\xi}U_{,\xi\xi} + \frac{1}{\xi} U_{,\xi}W_{,\xi} \right) \\
& + e^4 \left(\frac{3}{2} W_{,\xi\xi}^2 W_{,\xi\xi} + \frac{1}{2\xi} W_{,\xi\xi}^3 \right) = 0
\end{aligned} \tag{2.6}$$

式中
$$e = eU_{,\xi} + e \frac{U}{\xi} + W_{,z} + \frac{e^2}{2} W_{,\xi}^2 + \frac{1}{2} U_{,\xi}^2 z$$

同时, 固支板的边界条件和轴对称条件可写成如下的无量纲形式:

$$\left. \begin{aligned}
\sigma_z &= -E_1 P \cdot e^4, \quad \tau_{z\xi} = 0 && \text{当 } Z = -1 \\
\sigma_z &= \tau_{z\xi} = 0 && \text{当 } Z = 1 \\
U = W = W_{,\xi} &= 0 && \text{当 } \xi = 1, Z = 0 \\
U = W_{,\xi} &= 0 && \text{当 } \xi = 0
\end{aligned} \right\} \tag{2.7}$$

然后, 把 U, W 展开为无量纲小参数 e 的摄动级数, 以求得方程(2.5)至(2.7)的解答:

$$U = \sum_{n=0}^{\infty} U_n e^n, \quad W = \sum_{n=0}^{\infty} W_n e^n \tag{2.8}$$

本文摄动方法的基本思想是以所解问题的二维解答作为相应三维解答的一个基本解的形式, 在该基本解的基础上利用摄动方法求解该三维问题的其余摄动解. 则有基本解:

$$U_0 = 0, \quad W_0 = C_0(1 - \xi^2)^2 \tag{2.9}$$

把方程(2.8)、(2.9)代入(2.5)至(2.7), 并使 e 的同阶量系数相等, 我们可得到一系列可依次求解的偏微分方程和边界条件.

e^0 : 方程(2.5)、(2.6)自动满足. 边界条件为:

$$\left. \begin{aligned}
\sigma_{z1} = \tau_{z\xi 1} &= 0, && \text{当 } Z = \pm 1 \\
U_0 = W_0 = W_{0,\xi} &= 0, && \text{当 } \xi = 1, Z = 0 \\
U_0 = W_{0,\xi} &= 0, && \text{当 } \xi = 0
\end{aligned} \right\} \tag{2.10}$$

e^1 : $U_{1,zz} = 0, W_{1,zz} = 0$

边界条件为:

$$\left. \begin{aligned}
\sigma_{z1} = \tau_{z\xi 1} &= 0, && \text{当 } Z = \pm 1 \\
U_1 = W_1 = W_{1,\xi} &= 0, && \text{当 } \xi = 1, Z = 0 \\
U_1 = W_{1,\xi} &= 0, && \text{当 } \xi = 0
\end{aligned} \right\} \tag{2.11}$$

其中
$$\sigma_{z1} = E_1 \cdot (1 + \mu) \cdot W_{1,z}, \quad \tau_{z\xi 1} = \frac{E_1}{2} (U_{1,z} + W_{0,\xi})$$

则解答为:
$$U_1 = 4C_0(1 - \xi^2)\xi Z + F(\xi), \quad W_1 = 0 \tag{2.12}$$

其中 $F(\xi)$ 是由 ε^2 , ε^3 级的边界条件决定的。结果为:

$$F(\xi) = 16C_0^2 \left\{ -\frac{1}{8} \alpha_1 \frac{(1-\xi^2)^4}{\xi} + \frac{1}{12} \frac{(1-\xi^2)^3}{\xi} \right\} - \frac{C_0^2}{3} (\alpha_0 - 1) \left(\xi - \frac{1}{\xi} \right)$$

$$\alpha_0 = \frac{1+\mu}{2(1+2\mu)}, \quad \alpha_1 = \frac{1}{6} \alpha_0 + \frac{1}{2}$$

经类似的推导可得:

$$\varepsilon^2: U_2 = 0, \quad W_2 = -\frac{\mu}{1+\mu} 4C_0(1-2\xi^2)Z^2 + H(\xi) \cdot Z \quad (2.13)$$

边界条件为:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{z_2} = \tau_{\xi z_2} = 0, & \quad \text{当 } Z = \pm 1 \\ U_2 = W_2 = W_{2,\xi} = 0, & \quad \text{当 } \xi = 1, Z = 0 \\ U_2 = W_{2,\xi} = 0, & \quad \text{当 } \xi = 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.14)$$

其中 $H(\xi) = 16C_0^2 \left\{ \alpha_2(1-\xi^2)^3 - \frac{1}{2}(1-\xi^2)^2 \right\} + \frac{2\mu}{1+\mu} \frac{C_0^2}{3} (\alpha_0 - 1)$

$$\alpha_2 = \frac{-\mu}{1+\mu} \alpha_1 + \frac{1+2\mu}{2(1+\mu)}$$

$$\varepsilon^3: \left. \begin{aligned} U_3 = \frac{2+3\mu}{1+\mu} \left[\frac{16}{3} C_0 \xi Z^3 + 8C_0^2(1-\xi^2)\xi(1-3\xi^2)Z^2 \right] \\ - \frac{\mu}{1+2\mu} \cdot 4C_0^2(1-\xi^2)^2 \xi Z^2 - \frac{1+2\mu}{1+\mu} \cdot 32C_0 \xi Z \\ W_3 = 0, \quad \tau_{\xi z_3} = 16C_0 \xi (Z^2 - 1) \end{aligned} \right\} \quad (2.15)$$

边界条件为:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{z_3} = \tau_{\xi z_3} = 0, & \quad \text{当 } Z = \pm 1 \\ U_3 = W_3 = W_{3,\xi} = 0, & \quad \text{当 } \xi = 1, Z = 0 \\ U_3 = W_{3,\xi} = 0, & \quad \text{当 } \xi = 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.16)$$

$$\varepsilon^4: U_4 = 0, \quad W_4 = A_1 Z + \frac{A_2}{2} Z^2 + \frac{A_3}{3} Z^3 + \frac{A_4}{4} Z^4 \quad (2.17)$$

边界条件为:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{z_4} = -E_1 P, \quad \tau_{\xi z_4} = 0, & \quad \text{当 } Z = -1 \\ \sigma_{z_4} = \tau_{\xi z_4} = 0, & \quad \text{当 } Z = 1 \\ U_4 = W_4 = W_{4,\xi} = 0, & \quad \text{当 } \xi = 1, Z = 0 \\ U_4 = W_{4,\xi} = 0, & \quad \text{当 } \xi = 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.18)$$

式中

$$\begin{aligned}
 A_1 &= 64C_0^2 \left(\frac{1+2\mu}{1+\mu} \right)^2 (1-\xi^2)\xi^2 - \frac{16C_0^2}{(1+\mu)^2} [(1+3\mu) - 4(2+5\mu)\xi^2 \\
 &\quad + 3(3+7\mu)\xi^4] - \frac{1}{2(1+\mu)} \frac{q_0 a^4}{E_1 h^4} \\
 A_2 &= \left(\frac{1+2\mu}{1+\mu} \right)^2 \cdot 32C_0 + \frac{C_0^3}{1+\mu} \{ 64\alpha + 32(1-\xi^2)^2 \xi^2 [-(2+3\mu) + (6+11\mu)\xi^2] \} \\
 A_3 &= \frac{16C_0^2}{1+\mu} \left\{ -(2+3\mu)(1-\xi^2)\xi^2 + \frac{\mu^2}{2(1+2\mu)} (1-\xi^2)^2 \right. \\
 &\quad \left. - \mu(1-3\xi^2)(1-2\xi^2) + \frac{1}{1+\mu} [(1+3\mu) - 4(2+5\mu)\xi^2 \right. \\
 &\quad \left. + 3(3+7\mu)\xi^4] \right\} \\
 A_4 &= -\frac{32}{3} C_0 \frac{1+3\mu}{1+\mu}
 \end{aligned} \tag{2.19}$$

对以上解答(2.19), W 中的 A_2 不是精确解答, 但解答(2.9)至(2.17)都是精确解答, 即它们都满足各自的平衡微分方程及边界条件. 但对于 ε^4 级, 由于几何非线性对平衡微分方程及边界条件的影 响, 要同时满足平衡微分方程及上下表面的边界条件是很困难的, 所以此处我们引入变分原理来进行求解. 对解答(2.19)满足上下表面的应力边界条件, 并满足位移边界条件, 则可用变分原理来近似地满足的平衡微分方程如下:

$$\iiint_{\Omega} \left[\sum_{i=0}^n P_i \cdot \sum_{j=0}^n \delta U_j + \sum_{i=0}^n Q_i \cdot \sum_{j=0}^n \delta W_j \right] d\Omega = 0 \tag{2.20}$$

式中 P_i , Q_i 分别代表方程(2.5)、(2.6)的左边的 ε^i 级量, 对无量纲板中心挠度 C_0 求变分, 且

$$\left. \begin{aligned}
 P_i &= Q_i = 0 \quad (i=1, 2, 3) \\
 P_4 &= 0, Q_4 \neq 0 \\
 \sum_{j=1}^n \delta U_j &= \varepsilon \cdot \delta U_1 + \varepsilon^3 \cdot \delta U_3 + \\
 \sum_{j=1}^n \delta W_j &= \varepsilon \cdot \delta W_0 + \varepsilon^2 \cdot \delta W_2 + \varepsilon^4 \cdot \delta W_4 +
 \end{aligned} \right\} \tag{2.21}$$

将式(2.21)代入(2.20), 并仅保留至 ε^4 级微量, 则有

$$[\alpha(10.666\mu^2 + 16\mu + 5.3333) - (0.88004\mu^2 + 0.841753\mu + 0.183208)] \cdot C_0^3 \cdot \delta C_0 = 0 \tag{2.22}$$

由于 $C_0 \neq 0$, 故由上式得

$$\alpha = (0.88004\mu^2 + 0.841753\mu + 0.183208) / (10.666\mu^2 + 16\mu + 5.3333) \tag{2.23}$$

由边界条件(2.18), $\sigma_{z_i}|_{z_{i-1}} = -E_1 P$, $\sigma_{z_i}|_{z_{i-1}} = 0$ 则有

$$C_0 + \frac{1+\mu}{1+2\mu} 3\alpha C_0^3 = \frac{1+\mu}{1+2\mu} \cdot \frac{3}{2} \frac{q_0 a^4}{64E_1 h^4} \tag{2.24}$$

于是,

$$C_0 = \frac{1+\mu}{1+2\mu} \cdot \frac{3}{2} \frac{q_0 a^4}{64 E_1 h^4} \cdot \left[1 + \frac{1+\mu}{1+2\mu} \cdot 3\alpha \cdot C_0^2 \right]^{-1} \quad (2.25)$$

当无量纲板中心挠度 $C_0 = 1$, 即板中心挠度等于板的半厚度 h 时, 取泊松比 $\nu = 0.3$, 即 $\mu = 0.75$, 则从式 (2.25) 可得

$$W = C_0 h = 0.89464 \cdot \frac{3}{2} (1-\nu^2) \frac{q_0 a^4}{64 E h^3} \quad (2.26)$$

结果 (2.26) 所表示的板中心挠度与钱伟长教授按二维板理论求得的固支圆板结果是完全一致的。在 $\nu = 0.3$, 板中心的挠度为厚度 $2h$ 的一半时, 他的结果是^[3]:

$$W = 0.89 \cdot \frac{3}{2} (1-\nu^2) \frac{q_0 a^4}{64 E h^3}$$

为了进一步了解结果的准确性, 我们在泊松比 $\nu = 0.3$ 的情况下求出更高阶的近似解。由于满足平衡微分方程及上下表面的边界条件很困难, 所以用类似于 ε^4 的方法来求解, 即对于变分方程 (2.20) 保留至 ε^6 级微量, 且有

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon^5: P_6 \neq 0, Q_6 = 0 \\ \varepsilon^6: P_6 = 0, Q_6 \neq 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.27)$$

边界条件为: ($i = 5, 6$)

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{z_i} = \tau_{\xi z_i} = 0, & \quad \text{当 } Z = \pm 1 \\ U_i = W_i = W_{i,\xi} = 0, & \quad \text{当 } \xi = 1, Z = 0 \\ U_i = W_{i,\xi} = 0, & \quad \text{当 } \xi = 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.28)$$

在 $C_0 = 1$ 时, 则可求得:

$$\tau_{\xi z_5} = 52.236\xi(Z^2 - 1), \quad \sigma_{z_6} = 0 \quad (2.29)$$

$$\left. \begin{aligned} U_6 = & (26.808 - 54.035\xi^2)\xi Z^4 + (-347.426\xi^6 + 598.852\xi^4 \\ & - 277.333\xi^2 - 8.91925)\xi Z^3 + (519.83\xi^2 - 250.774)\xi Z^2 \\ & + 104.472\xi Z - 3500(1 - \xi^2)\xi^8 \\ W_6 = & U_6 = 0 \\ W_6 = & -(4.59564 + 134.474\xi^2)Z^5 + (-120.442\xi^6 + 608.57\xi^4 \\ & - 156.453\xi^2 + 1.911265)Z^4 + (-2480.37\xi^{10} + 6692.75\xi^8 \\ & - 6136.49\xi^6 + 1976.871\xi^4 + 242.2887\xi^2 + 71.6492)Z^3 \\ & + (4012.735\xi^6 - 5756.55\xi^4 + 1743.845\xi^2 - 44.7736)Z^2 \\ & + (417.887\xi^4 - 1462.78\xi^2)Z + 1500(9 - 11\xi^2)\xi^7 Z \end{aligned} \right\} \quad (2.30)$$

对于以上所求得的各项解答, 取 $\nu = 0.3$, 对板的不同厚跨比 ε , 求得 W, U 的前四级之和, 前六级之和, 列于表1、表2中。

$$\left. \begin{aligned} W \text{ 的前 } n \text{ 项之和} &= \sum_{i=0}^n W_i \varepsilon^i \\ \sigma_z &= \sigma_{z_i} \varepsilon^i \\ \tau_{\xi z} &= \tau_{\xi z_3} \cdot \varepsilon^3 + \tau_{\xi z_5} \cdot \varepsilon^5 \end{aligned} \right\} \quad (2.31)$$

表1 板内各点的位移 (板中心点挠度 $W_0=h$, 即 $C_0=1, \nu=0.3$)

$\epsilon=0.05$						$\epsilon=0.1$					
Z	ξ	W_4	W_6	U_4	U_6	Z	ξ	W_4	W_6	U_4	U_6
1	0	0.994225	0.994225	0	0	-1	0	0.994859	0.994749	0	0
	0.2	0.915585	0.915586	0.043525	0.043517		0.2	0.919439	0.919436	-0.057511	-0.05809
	0.4	0.699497	0.699497	0.072233	0.072225		0.4	0.710517	0.710703	-0.107156	-0.10803
	0.6	0.404983	0.404982	0.076234	0.076233		0.6	0.421333	0.42145	-0.13056	-0.13162
	0.8	0.133115	0.133111	0.056763	0.056830		0.8	0.14541	0.14517	-0.09552	-0.09765
	1.0	0.003742	0.003682	-0.004095	-0.003998		1.0	0.02601	0.02682	0.03276	0.03448
0.5	0	0.998136	0.998136	0	0	1	0	0.976599	0.97662	0	0
	0.4	0.703249	0.703248	0.0391107	0.0391108		0.4	0.682707	0.682705	0.13543	0.135076
	0.8	0.128919	0.128918	0.024440	0.024398		0.8	0.129875	0.129726	0.082427	0.08148

* 表中 $W_4(U_4), W_6(U_6)$ 分别表示 $W(U)$ 的前4项及前6项之和。

表2 板内各点的位移 ($C_0=1, \nu=0.3$)

$\epsilon=0.2$						$\epsilon=0.3$					
Z	ξ	W_4	W_6	U_4	U_6	Z	ξ	W_4	W_6	U_4	U_6
1	0.6	0.397957	0.394025	0.15345	0.14157	1	0	0.76058	0.77822	0	0
-1	0.6	0.47856	0.48603	-0.14643	-0.15024	0.5	0.6	0.47364	0.40261	-0.10555	-0.15196
1	0.2	0.828837	0.82969	0.133436	0.125757	0.5	0.8	0.237172	0.16600	-0.31404	-0.69514
1	0	0.90159	0.90315	0	0	1	0.6	0.57006	0.52733	-0.07278	-0.16299
0.5	0.2	0.880486	0.87954	0.06829	0.06789	1	0.4	0.64529	0.64703	0.117203	0.03053
0.5	0.4	0.67651	0.672626	0.094714	0.094936	-0.5	0.8	0.23717	0.16600	-0.31404	-0.69514
0.5	0.6	0.403248	0.397012	0.058414	0.05230	0.5	0.2	0.80476	0.79394	0.04296	0.03999
1	0.4	0.63832	0.63847	0.198592	0.18718	1	0.2	0.72329	0.74451	0.118826	0.06051

* 表中 $W_4(U_4), W_6(U_6)$ 分别表示 $W(U)$ 的前4项及前6项之和。

从表1、表2可以看出, 在 $\epsilon < 0.2$ 的情况下, W, U 的前四项之和与前六项之和的差别是很小的, 在 $\epsilon = 0.05$ 时, 前四项之和与前六项之和几乎完全一样。但在 $\epsilon > 0.2$ 的情况下, 如表2中 $\epsilon = 0.3$ 时, W, U 的前四项之和与前六项之和的差别是比较大的。所以, 可以认为在 $\epsilon < 0.2$ 时, 摄动级数只取到前四级就可以获得比较准确的结果, 而对于板的厚跨比 $\epsilon > 0.2$ 时, 为获得准确的结果就必须取摄动级数的更多级。同时, 对于 $\tau_{\xi z}$, 从 (2.15) 和 (2.29) 可知, 略去 $\tau_{\xi z}$ 所引起的误差在 $\epsilon < 0.2$ 时, 小于 1.7%。所以, 在板的厚跨比 $\epsilon < 0.2$ 的情况下, 对板的三维非线性分析只取前四级近似解就可以获得较为准确的结果。最终的解答为:

$$\left. \begin{aligned} W &= W_0 + \epsilon^2 W_2 + \epsilon^4 W_4 \\ U &= \epsilon U_1 + \epsilon^3 U_3 \end{aligned} \right\} \quad (2.32)$$

其中 W_0, W_2, W_4, U_1, U_3 见式 (2.9) 至 (2.19)。对于该四级近似解答, 当板很薄时, 即 $\epsilon \rightarrow 0$, 可知 $W = C_0(1 - \xi^2)^2$, 板中心挠度 $W = C_0 h$, 该中心点解答与钱伟长教授所得的板中心挠度完全一致。即是说, 本文只取前四项近似所获得的摄动解在板很薄时 $\epsilon \rightarrow 0$, 可以退化为相应的二维板理论解, 而且本文的三维非线性解答 (2.31), 在板中心挠度 $C_0 \rightarrow 0$ 时, 可退化为相应的三维线性解答^[8]。

三、层合板的三维非线性解答

我们研究受均布横向载荷 q_0 的一块固支边界层合圆板。叠层板的构造及坐标系如图 2 所

示。取(1)层(3)层为同样材料的层，其弹性模量和泊松比分别为 $E_{(1)}, \nu_{(1)}$ ，(2)层的为 $E_{(2)}, \nu_{(2)}$ ；(2)层的厚度为 $2h_1$ ，整个叠层板厚为 $2h$ 。

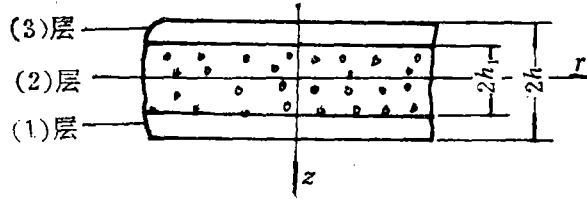


图2 层合板(三层)的构造及坐标系

层合板的求解过程分两步。第一步，我们求出各个单层满足平衡微分方程(2.3)或(2.5)、(2.6)，但不考虑边界条件的解。第二步，对第一步求得的解再去满足层合板的边界条件及层间连接条件。通过以上两步的求解，我们即可获得层合板的满足平衡微分方程及边界条件和层间连接条件的解答。

1. 单层板的满足平衡微分方程(2.5)、(2.6)的解

引用无量纲参数如下：

$$e = \frac{h}{a}, \quad \xi = \frac{r}{a}, \quad W = \frac{w}{h}, \quad U = \frac{u}{h}, \quad Z = \frac{z}{h} \quad (3.1)$$

则根据一般板的求解，我们可求出各个单层的四级近似解答，

$$\left. \begin{aligned} U_{(i)} &= U_{1(i)}e + U_{3(i)}e^3 \\ W_{(i)} &= W_{0(i)} + W_{2(i)}e^2 + W_{4(i)}e^4 \\ \tau_{\xi Z_{3(i)}} &= \tau_{\xi Z_{3(i)}}e^3 \\ \sigma_{Z_{4(i)}} &= \sigma_{Z_{4(i)}}e^4 \end{aligned} \right\} \quad (3.2)$$

当 $i=1$ 时，即为层合板的(1)层， $Z_1 \leq Z \leq 1$ ；当 $i=2$ 时，即为(2)层， $-Z_1 \leq Z \leq Z_1$ ；当 $i=3$ 时，即为(3)层， $-1 \leq Z \leq -Z_1$ ， $Z_1 = h_1/h$ 。

$$W_{0(i)} = C_{0(i)}(1 - \xi^2)^2 \quad (3.3)$$

$$U_{1(i)} = 4C_{0(i)}(1 - \xi^2)\xi Z + F_{(i)}(\xi) \quad (3.4)$$

$$W_{2(i)} = -\frac{\mu_{(i)}}{1 + \mu_{(i)}} \cdot 4C_{0(i)}(1 - 2\xi^2)Z^2 + H_{(i)}(\xi) \cdot Z + h_{2(i)}(\xi) \quad (3.5)$$

$$\begin{aligned} U_{3(i)} &= \frac{2 + 3\mu_{(i)}}{1 + \mu_{(i)}} \cdot \frac{16}{3}C_{0(i)}\xi Z^3 + 8C_{0(i)}^2 \{6a_{2(i)}(1 - \xi^2)^2\xi \\ &\quad - 2(1 - \xi^2)\xi\} Z - (2K_{(i)} + h'_{2(i)})Z + I_{2(i)}(\xi) \end{aligned} \quad (3.6)$$

$$\tau_{\xi Z_{3(i)}} = E_{1(i)} \left[\frac{1 + 2\mu_{(i)}}{1 + \mu_{(i)}} \cdot 16C_{0(i)}\xi Z^2 - K_{(i)}(\xi) \right] \quad (3.7)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{Z_{4(i)}} &= E_{1(i)} \left\{ -\frac{1 + 2\mu_{(i)}}{1 + \mu_{(i)}} \cdot \frac{32}{3}C_{0(i)}Z^3 + \left(K'_{(i)} + \frac{K_{(i)}}{3} \right) Z + 64C_{0(i)}^2 a_{1(i)} Z \right. \\ &\quad \left. + \left[64C_{0(i)}^2 (1 - \xi^2)^2 \xi^2 \frac{1 + 2\mu_{(i)}}{1 + \mu_{(i)}} + \frac{16C_{0(i)}^2}{1 + \mu_{(i)}} ((1 + 3\mu_{(i)}) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - 4(2 + 5\mu_{(i)})\xi^2 + 3(3 + 7\mu_{(i)})\xi^4 \right] Z^2 + L_{(i)}(\xi) \right\} \end{aligned} \quad (3.8)$$

其中 $h_{2(i)}(\xi)$ ， $K_{(i)}(\xi)$ ， $I_{2(i)}(\xi)$ ， $L_{(i)}(\xi)$ 等为待定函数， $F_{(i)}(\xi)$ ， $H_{(i)}(\xi)$ 为

$$F_{(t)}(\xi) = 16C_{0(t)}^2 \left\{ -\frac{1}{8} \alpha_{1(t)} \frac{(1-\xi^2)^4}{\xi} + \frac{1}{12} \frac{(1-\xi^2)^3}{\xi} \right\} - \frac{C_{0(t)}^2}{3} (\alpha_0 - 1) \left(\xi - \frac{1}{\xi} \right) \quad (3.9)$$

$$H_{(t)}(\xi) = 16C_{0(t)}^2 \left\{ \alpha_2 (1-\xi^2)^3 - \frac{1}{2} (1-\xi^2)^2 \right\} + \frac{2\mu_{(t)}}{1+\mu_{(t)}} \cdot \frac{C_{0(t)}^2}{3} (\alpha_0 - 1) \quad (3.10)$$

式(3.9)中,

$$\alpha_{0(t)} = \frac{1+\mu_{(t)}}{2(1+2\mu_{(t)})}, \quad \alpha_{1(t)} = \frac{1}{6} \alpha_0 + \frac{1}{2}, \quad \alpha_{2(t)} = -\frac{\mu_{(t)}}{1+\mu_{(t)}} \alpha_{1(t)} + \frac{1+2\mu_{(t)}}{2(1+\mu_{(t)})}$$

对于式(3.9)的 $F_{(t)}(\xi)$ 中的 $\alpha_{1(t)}$ 项, 我们取 $\alpha_{1(t)} = 1/2 + 1/24$, 当泊松比 ν 在0.3附近时, 所引起的误差约为3%, 可见作这样的简化是可以的. 则有

$$F_{(t)}(\xi) = C_{0(t)}^2 \left\{ -\frac{13}{12} \frac{(1-\xi^2)^4}{\xi} + \frac{4}{3} \frac{(1-\xi^2)^3}{\xi} + \frac{1}{4} \left(\xi - \frac{1}{\xi} \right) \right\} \quad (3.11)$$

2. 层合板的满足边界条件及层间连接条件的解

层合板的边界条件为^[7]:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_z = -q_0, \quad \tau_{\xi z} = 0, & \quad \text{当 } Z = -1 \\ \sigma_z = \tau_{\xi z} = 0, & \quad \text{当 } Z = 1 \\ U = W = W_{,\xi} = 0, & \quad \text{当 } \xi = 1, Z = 0 \\ U = W_{,\xi} = 0, & \quad \text{当 } \xi = 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.12)$$

层间连接条件为:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{z(m)} = \sigma_{z(m+1)}, \quad \tau_{\xi z(m)} = \tau_{\xi z(m+1)} \\ U_{(m)} = U_{(m+1)}, \quad W_{(m)} = W_{(m+1)} \end{aligned} \right\} \quad (3.13)$$

当 $m=1$ 时, $Z=Z_1$; 当 $m=2$ 时, $Z=-Z_1$

则可求得三层层合板的满足非线性平衡微分方程(2.5)、(2.6), 边界条件(3.12)和层间连接条件(3.13)的解答, 我们取 $\nu_{(1)} = \nu_{(3)} = 0.25$, $\nu_{(2)} = 0.33$, $E_{(1)} = E_{(3)}$, $E_{(1)}/E_{(2)} = 2.82$, 求出的结果为:

$$\left. \begin{aligned} C_{0(1)} = C_{0(2)} = C_{0(3)} = C_0 \\ C_0 = [\beta_1 + \beta_3 C_{0(2)}^2]^{-1} \cdot 0.665 \frac{q_0 a^4}{E_{(2)} h^4} \\ \beta_1 = 95.5127 + 33.53 Z_1^3 - 100.6 Z_1 \\ \beta_3 = 11.361 - 8.064 Z_1 \end{aligned} \right\} \quad (3.14)$$

$$W_{0(1)} = W_{0(2)} = W_{0(3)} = C_0 (1-\xi^2)^2 \quad (3.15)$$

$$\begin{aligned} U_{1(1)} = U_{1(2)} = U_{1(3)} = 4C_0 (1-\xi^2) \xi Z \\ + C_0^2 \left\{ -\frac{13}{12} \frac{(1-\xi^2)^4}{\xi} + \frac{4}{3} \frac{(1-\xi^2)^3}{\xi} + \frac{1}{4} \left(\xi - \frac{1}{\xi} \right) \right\} \end{aligned} \quad (3.16)$$

$$\begin{aligned}
 W_{2,1}) &= C_0[(1.27362\xi^2 - 0.63681)Z_1^2 + (2.6666\xi^2 - 1.3333)Z^2] \\
 &\quad + C_0^2[(0.10665\xi^6 - 0.32\xi^4 + 0.32\xi^2 - 0.186125)Z_1 \\
 &\quad + (-7.6667\xi^6 + 15\xi^4 - 7\xi^2 - 0.472232)Z] \\
 W_{2,2}) &= C_0(3.9403\xi^2 - 1.97014)Z^2 + C_0^2(-7.56\xi^6 + 14.68\xi^4 \\
 &\quad - 6.68\xi^2 - 0.6584)Z \\
 W_{2,3}) &= C_0[(1.2736\xi^2 - 0.6368)Z_1^2 + (2.6667\xi^2 - 1.3333)Z^2] \\
 &\quad + C_0^2[(-0.10665\xi^6 + 0.32\xi^4 - 0.32\xi^2 + 0.186125)Z_1 \\
 &\quad + (-7.6667\xi^6 + 15\xi^4 - 7\xi^2 - 0.472232)Z]
 \end{aligned} \tag{3.17}$$

$$\begin{aligned}
 U_{3,1}) &= C_0\xi(83.635Z_1^3 - 2.5472Z_1^2Z - 85.3324Z_1 + 12.444Z^3 \\
 &\quad - 42.6666Z) + C_0^2\xi[(0.3199Z_1^3\xi^4 - 0.64Z_1^2\xi^2 + 0.32Z_1^2) \\
 &\quad + (-0.6399Z_1\xi^4 + 1.28Z_1\xi^2 - 0.64Z_1)Z + (23\xi^4 - 30\xi^2 + 7)Z^2] \\
 U_{3,2}) &= C_0\xi Z(13.2934Z^2 + 80.2386Z_1^2 - 127.999) \\
 &\quad + C_0^2\xi Z^2(22.68\xi^4 - 29.36\xi^2 + 6.68) \\
 U_{3,3}) &= C_0\xi[12.4444Z^3 - (42.6666 + 2.5472Z_1^2)Z + (85.3324Z_1 \\
 &\quad - 83.6348Z_1^3)] + C_0^2\xi[(23\xi^4 - 30\xi^2 + 7)Z^2 + (0.6399Z_1\xi^4 \\
 &\quad - 1.28Z_1\xi^2 + 0.64Z_1)Z + (0.3199Z_1^3\xi^4 - 0.64Z_1^2\xi^2 + 0.32Z_1^2)]
 \end{aligned} \tag{3.18}$$

$$\begin{aligned}
 W_{4,1}) &= -4.4444C_0Z^4 + C_0^2Z^3(59.3322\xi^4 - 57.7766\xi^2 + 4.3703) \\
 &\quad + C_0Z^2[(28.4443 + 0.849Z_1^2) + C_0Z_1(0.6399\xi^4 - 0.8533\xi^2 \\
 &\quad + 0.2133) + C_0^2(122.666\xi^6 - 282.666\xi^6 + 197.333\xi^4 \\
 &\quad - 37.333\xi^2 + 1.099)] + C_0Z[(-55.756Z_1^3 + 56.888Z_1 - 18.963) \\
 &\quad + C_0(-14.225Z_1^3\xi^4 + 14.4385Z_1^2\xi^2 - 0.2133Z_1^2 - 252.44\xi^4 \\
 &\quad + 241.775\xi^2 - 17.778) + C_0^2(-3.4128Z_1\xi^6 + 10.239Z_1\xi^6 \\
 &\quad - 10.24Z_1\xi^4 + 3.4133Z_1\xi^2 - 2.1976)] + C_0Z_1[(21.325Z_1^3 \\
 &\quad + 10.19Z_1 - 24.34) + C_0(439.212Z_1^3\xi^4 - 124.88Z_1^2\xi^2 \\
 &\quad + 23.288Z_1^2 - 446.295\xi^4 + 432.6\xi^2 - 22.82) + C_0^2(16.15Z_1\xi^8 \\
 &\quad - 38.259Z_1\xi^6 + 28.07Z_1\xi^4 - 5.96Z_1\xi^2 + 2.959Z_1 - 2.82)] \\
 W_{4,2}) &= -5.2935C_0Z^4 + C_0^2Z^3(49.85\xi^4 - 50.2\xi^2 + 3.18) \\
 &\quad + C_0Z^2[(-59.88Z_1^2 + 95.52) + C_0^2(135.4\xi^6 - 310.68\xi^6 + 215.16\xi^4 \\
 &\quad - 39.88\xi^2 + 0.961)] + C_0Z[(27.15Z_1^3 - 43.3) + C_0(435.1Z_1^2\xi^4 \\
 &\quad + 418.87Z_1^2\xi^2 + 24.48Z_1^2 - 698.74\xi^4 + 674.38\xi^2 - 40.59) \\
 &\quad + C_0^2(3.096Z_1 - 5.018)]
 \end{aligned} \tag{3.19}$$

$$\begin{aligned}
 W_{4,3}) &= -4.4444C_0Z^4 + C_0Z^2[(0.849Z_1^2 + 28.444) + C_0Z_1(-0.64\xi^4 \\
 &\quad + 0.853\xi^2 - 0.2133) + C_0^2(122.67\xi^6 - 282.67\xi^6 + 256.67\xi^4 \\
 &\quad - 95.11\xi^2 + 5.47)] + Z[C_0(55.756Z_1^3 - 56.888Z_1 + 18.963) \\
 &\quad + C_0^2(-14.225Z_1^3\xi^4 + 14.439Z_1^2\xi^2 - 0.2133Z_1^2 - 252.441\xi^4 \\
 &\quad + 241.775\xi^2 - 17.778) + C_0^2(3.413Z_1\xi^6 - 10.239Z_1\xi^6 + 10.24Z_1\xi^4 \\
 &\quad - 3.413Z_1\xi^2 + 2.198)] + Z_1[C_0(-32.966Z_1^3 + 10.189Z_1 + 62.267) \\
 &\quad + C_0^2(-498.544Z_1^3\xi^4 + 482.659Z_1\xi^2 - 27.658Z_1^2 + 446.295\xi^4 \\
 &\quad - 432.6\xi^2 + 22.819) + C_0^2(16.149Z_1\xi^8 - 38.259Z_1\xi^6 - 31.262Z_1\xi^4 \\
 &\quad + 51.816Z_1\xi^2 - 7.605Z_1 + 7.216) - 0.6667(Z-1)q_0e^{-4}]
 \end{aligned}$$

在以上位移解答的基础上,我们取不同的板中心挠度 $C_0=1, 0.5, 0.01$,并取 $Z_1=0.5$,求出应力 $\sigma_r, \sigma_\theta, \tau_{rz}$ 等,结果见图3至图10。

从应力的表达式和图3至图10所示的应力可见,

(1) 在外载 q_0 的作用下,板变薄,即 ϵ 变小时,应力 σ_θ, σ_r 增加得很快, τ_{rz} 次之,而 σ_z 则几乎与板的厚薄无关。

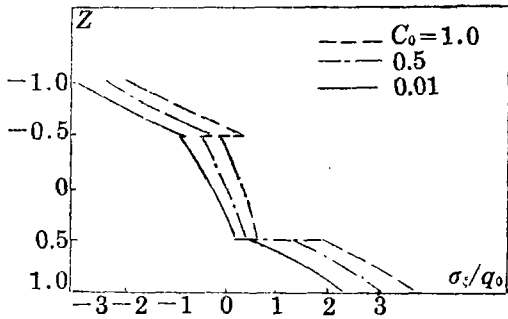


图3 应力 σ_r 在Z向的分布($\epsilon=0.1$)

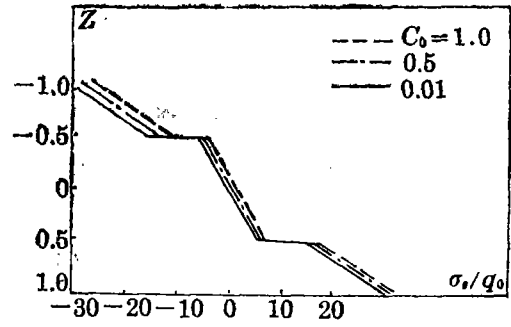


图4 应力 σ_θ 在Z向的分布($\epsilon=0.05$)

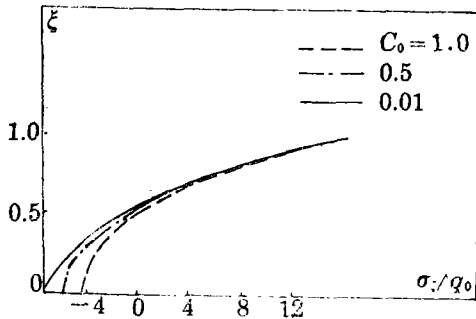


图5 应力 σ_r 在xi向的分布($\epsilon=0.1$)

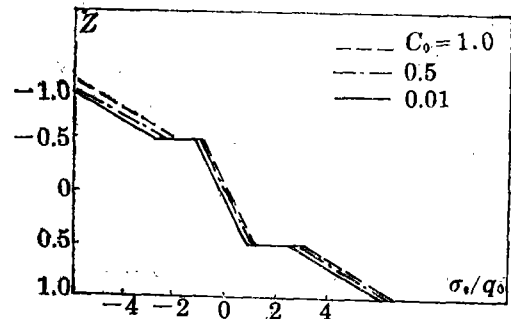


图6 应力 σ_θ 在Z向的分布($\epsilon=0.1$)

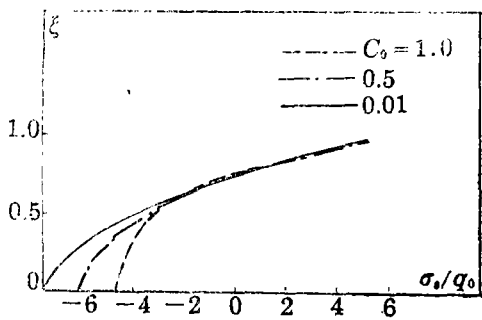


图7 应力 σ_θ 在xi向的分布($\epsilon=0.1$)

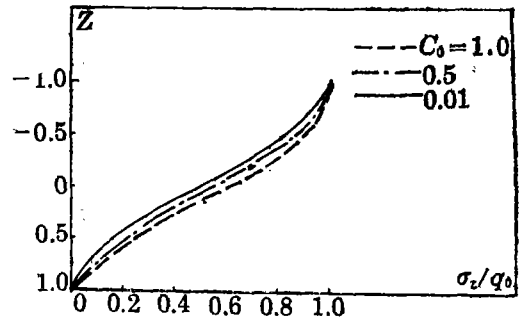
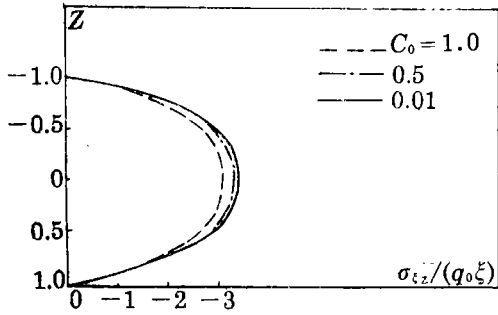
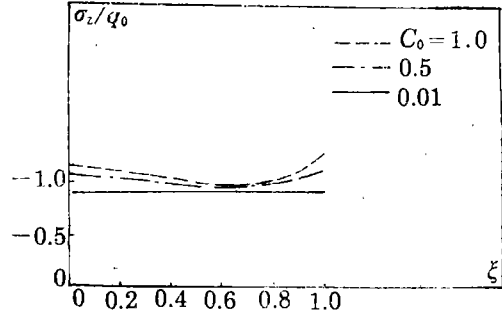


图8 应力 σ_z 在Z向的分布($\epsilon=0.1$)

(2) 环向应力 σ_θ 与径向应力 σ_r 在板内的分布情况几乎是一样的, σ_r 比 σ_θ 要大。在数量级上,近似地有: σ_z 与外载 q_0 同量级, τ_{rz} 与 $q_0\epsilon^{-1}$ 同量级, σ_θ, σ_r 与 $q_0\epsilon^{-2}$ 同量级。随板变薄, ϵ 变小时,应力 $\sigma_z, \tau_{rz}, \sigma_r$ (或 σ_θ)之间的差别变大。

(3) 虽然对于薄板的情况,在 $\epsilon=0.1$ 时,横向剪应力 τ_{rz} 和横向正应力 σ_z 还是很显著的。 τ_{rz}, σ_z 的最大值与环向应力 σ_θ 的最大值之比分别约为50%, 15%。

(4) 对于不同的非线性,即无量纲板中心挠度 C_0 取不同值的情况下,从各个应力可

图9 应力 $\tau_{\xi z}$ 在Z向的分布($\epsilon=0.1$)图10 应力 σ_z 在 ξ 向的分布($\epsilon=0.1$)

见, 非线性的影响是比较大的。其中 $C_0=0.01$ 所描绘的曲线即近似代表线性情况。

四、结 论

本文提出了一般轴对称圆板及完全粘合的层合圆板, 受横向载荷作用下的三维非线性解析解答。该三维解答在板的厚跨比很小时, 可退化为相应的二维板理论非线性解答。而且该三维非线性解答在板中心挠度很小时, 可退化为相应的线性解答。板中的位移和应力展开为厚度参数 ϵ 的摄动级数, 利用摄动法和变分法求得位移和应力。

对于层合板, 我们给出了满足平衡微分方程、边界条件和层间连接条件的位移解析解, 并以图示给出了应力的大量数值结果。结果表明, 即使在板较薄的情况($\epsilon=0.1$), 横向剪应力和横向正应力也是比较显著的。与环向应力的最大值相比, 横向剪应力的最大值约为它的50%, 而横向正应力的最大值约为它的15%。随着板的逐渐变薄, 横向正应力、横向剪应力、环向应力(或径向应力)之间的差别逐渐变大, 横向正应力、横向剪应力所占的比重变小。但横向剪应力要比横向正应力大得多。

参 考 文 献

- [1] Timoshenko, S., *Theory of Elasticity*, McGraw-Hill Book Company, New York (1934), 309-319.
- [2] B.B. 诺沃日洛夫, 《非线性力学基础》, 朱兆祥译, 科学出版社, 北京(1958), 20-80.
- [3] 徐芝纶, 《弹性力学》, 上、下册, 高等教育出版社, 北京(1987).
- [4] Vlasov, B.F., On one case of bending of rectangular thick plates, *Vestnik Moskovskogo Universitieta*, (2) (1957), 25-34.
- [5] Nayfeh, A.H., *Introduction to Perturbation Techniques*, John Wiley & Sons (1981), 40-100.
- [6] Chia, Chuen-yuan, *Nonlinear Analysis of Plates*, McGraw-Hill Inc., New York (1980).
- [7] Ahmed, K. Noor and W. Scott Burton, Three-dimensional solutions for anti-symmetrically laminated anisotropic plates, *ASME, Journal of Applied Mechanics*, 57 (1990), 182-188.
- [8] 江晓禹, 复合材料层合板壳的三维线性及非线性, 静力及动力分析, 西北工业大学 博士学位论文(1992).

Nonlinear Three-Dimension Analysis for Axially Symmetrical Circular Plates and Multilayered Plates

Jiang Xiao-yu Zhang Xiang-zhou

(*Northwestern Polytechnical University, Xi'an*)

Abstract

Analytic nonlinear three-dimension solutions are presented for axially symmetrical homogeneous isotropic circular plates and multilayered plates with rigidly clamped boundary conditions and under transverse load. The geometric nonlinearity from a moderately large deflection is considered. A developmental perturbation method is used to solve the complicated nonlinear three-dimension differential equations of equilibrium. The basic idea of this perturbation method is using the two-dimensional solutions as a basic form of the corresponding three-dimension solutions, and then processing the perturbation procedure to obtain the three-dimension perturbation solutions. The nonlinear three-dimension results in analytic expressions and in numerical forms for ordinary plates and multilayered plates are presented. Each of the plate stresses is shown in figures. The results show that this perturbation method used to analyse nonlinear three-dimension problems of plates is effective.

Key words three-dimension analysis, geometric nonlinearity, perturbation method, axially symmetry