应用数学和力学，第14卷第7期（1993年7月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

一种基于虚功原理的求解弹塑性问题的有限元——数学规划法*

朱昌铭　　金永杰

（上海交通大学工程力学系，1992年5月4日收到）

摘　要

本文通过将屈服函数按台劳级数展开，并略去二阶以上高阶项，从而将弹塑性本构方程写为线性互补形式这一思路，从熟知的虚功原理出发，结合有限元离散技术，简捷地得到了一种求解弹塑性力学问题的线性互补方法．所得方法可用于满足关联及非关联流动法则的材料．另外，本文还讨论了该方法解的存在性唯一性问题，给出了几个有用的结论．

关键词　弹塑性　虚功原理　数学规划　有限元

一、引　　言

有限元法自产生以来，已经在弹塑性力学中获得了广泛应用．传统的弹塑性有限元法一般是采用各种迭代解法，这些方法在结构分析中已经取得了很大成功．但实际经验表明，这些方法也有其不足之处．首先，采用增量迭代法时，增量步通常都必须取得很小，否则难以收敛．这样，进行弹塑性分析所耗费的机时是很大的．这种情况当载荷接近极限载荷时更为严重，有时甚至得不到收敛的解．其次，当材料满足非关联流动法则时，采用传统的变刚度有限元方法，将导致一个不对称的刚度矩阵，给求解增加了困难．

除了迭代类解法外，进行弹塑性分析的另一类重要方法是数学规划法．在这方面，G. Maier作了开创性的研究工作[1]．他通过将弹塑性问题转化为线性互补方程，用二次规划的办法求解了弹塑性问题．后来，I. Kaneko[2]将G. Maier的方法作了某些改进，得出了一套优美的含有导数的参数线性互补方程，并建立了相应的计算方法．但在他们的研究中，由于采用了分片线性的屈服函数（即通过一个多边形或多面体近似非线性的屈服函数），必然造成未知量的大量增加，使得最终导出的线性互补问题规模巨大，难以在实际的结构分析中获得应用．事实上，文献[1][2]以及其后的一些文献也仅是举了几个框架、杆系为例，对于二维、三维结构，尚未见具体应用．

近年来，我国学者在用数学规划法求解弹塑性问题方面也进行了深入研究，获得了一系列引人注目的成果[3]~[5]．文献[3]提出了一种参变量变分原理，通过有限元离散，也将弹塑

* 潘立宙推荐．国家自然科学基金资助项目．

性问题转化为线性互补问题[4].这种方法，由于对屈服条件的线性化处理与文[1,2]不同，得出的线性互补问题规模要小得多，适于实际应用．经验表明，这种方法能较好地克服或避免前述迭代类方法所具有的增量步必须很小、耗费机时，有可能不收敛及刚度矩阵非对称（在非关联流动时）等困难.文[5]则从变分不等方程出发，将弹塑性问题化为与文[4]类似的线性互补问题．这些方法，在实际应用中都获得了成功，但在理论上、方法上都还有一些缺憾：①文献[3]提出的参变量变分原理，其关键是引入了不参加变分的参变量，但这种不参加变分的参变量的引入，尚无充分的数学依据，而且，这种参变量变分原理的建立，要借助现代控制论的概念，也不便于向工程界推广应用.另外，文[3]中所给的变分原理泛函的形式，其中与参变量有关的一项，似乎只能凭猜测来确定，也给其推广应用带来了困难；②文献[5]从变分不等方程出发，有坚实的数学基础，但方法过繁，且最后导出的线性互补问题规模较大，使存贮量，计算时间都非常可观，不便于实际应用.

本文沿用文献[3][5]中将屈服函数按台劳级数展开，并略去二阶以上高阶项，从而将塑性本构方程写成增量线性互补形式这一思路，通过利用熟知的虚功原理，结合有限元离散技术，非常简捷地得到了一种求解弹塑性问题的线性互补方法．很巧，这样得到的公式与文[4,5]的基本一致，但本文的推导要简便得多，而且不必引进新概念，较易接受.自然，这种方法同样具有前述文献[3][5]的方法所具有的优点．另外，本文还对这种方法解的存在性唯一性问题进行了研究，并证明，在材料满足关联流动法则时，若是理想塑性材料，解是存在的；若材料是强化的（各向同性强化或运动强化），则解的存在性唯一性都可保证；在材料满足非关联流动法则情形，只要满足某个不等式，也能保证解的存在性、唯一性.

二、弹塑性力学边值问题的提法

由于弹塑性力学问题的解与受力变形的历史有关，因此宜于采用增量理论来描述．设增量发生前的状态已知，则增量形式的弹塑性力学边值问题提法如下：

在整个变形体Ω内，求位移增量$du_i(i=1,\ 2,\ 3)$，满足：

1．平衡方程

$$d\sigma_{ij,j}+db_i=0 \qquad (\text{在}\Omega\text{内}) \tag{2.1}$$

2．应变与位移关系

$$d\varepsilon_{ij}=\frac{1}{2}(du_{i,j}+du_{j,i}) \qquad (\text{在}\Omega\text{内}) \tag{2.2}$$

3．位移边界条件

$$du_i=d\bar{u}_i \qquad (\text{在}S_u\text{上}) \tag{2.3}$$

4．力边界条件

$$d\sigma_{ij}n_j=d\bar{p}_i \qquad (\text{在}S_p\text{上}) \tag{2.4}$$

5. 本构方程

$$\begin{cases} d\sigma_{ij}=D_{ijkl}(d\varepsilon_{kl}-d\varepsilon^p_{kl}) & (2.5\text{a})\\ d\varepsilon^p_{ij}=d\lambda\dfrac{\partial g}{\partial\sigma_{ij}} & (2.5\text{b})\\ f(\sigma_{ij},\ \varepsilon^p_{ij},\ k)\leqslant 0 \qquad (\text{在}\Omega\text{内}) & (2.5\text{c})\\ d\lambda\begin{cases}\geqslant 0 & (\text{当}f=0)\\ =0 & (\text{当}f\leqslant 0)\end{cases} & (2.5\text{d})\end{cases}$$

这里$S=S_u+S_p$为全部边界，f为屈服函数，g为塑性势函数，k为强化参数，$d\lambda$为流动因子.

方程(2.1)～(2.5)就是传统的增量弹塑性边值问题的全部控制方程.

参考文献[3][5]，可将本构方程(2.5)写为线性互补形式. 将f按台劳级数展开，并略去二阶以上高阶项，有：

$$f=f_0+\frac{\partial f}{\partial\sigma_{ij}}d\sigma_{ij}+\frac{\partial f}{\partial\varepsilon^p_{ij}}d\varepsilon^p_{ij}+\frac{\partial f}{\partial k}dk \tag{2.6}$$

式中f_0为增量发生前f的值，为已知量. 同时，在一个增量步内，将(2.6)式中的$\dfrac{\partial f}{\partial\sigma_{ij}}$，$\dfrac{\partial f}{\partial\varepsilon^p_{ij}}$，$\dfrac{\partial f}{\partial k}$及(2.5b)式中的$\dfrac{\partial g}{\partial\sigma_{ij}}$均看成常量，并设[6]：

$$dk=hd\lambda \tag{2.7}$$

这里 h在一个增量步内为常量. 将(2.5a)、(2.5b)及(2.7)式代入(2.6)式有

$$f=f_0+\frac{\partial f}{\partial\sigma_{ij}}D_{ijkl}d\varepsilon_{kl}+\left(\frac{\partial f}{\partial\varepsilon^p_{ij}}\frac{\partial g}{\partial\sigma_{ij}}+h\frac{\partial f}{\partial k}-\frac{\partial f}{\partial\sigma_{ij}}D_{ijkl}\frac{\partial g}{\partial\sigma_{kl}}\right)d\lambda \tag{2.8}$$

这样，本构方程可写为如下线性互补形式：

$$\begin{cases} d\sigma_{ij}=D_{ijkl}d\varepsilon_{kl}-d\lambda D_{ijkl}\dfrac{\partial g}{\partial\sigma_{kl}} & (2.9\text{a})\\ f=f_0+\dfrac{\partial f}{\partial\sigma_{ij}}D_{ijkl}d\varepsilon_{kl}+\left(\dfrac{\partial f}{\partial\varepsilon^p_{ij}}\dfrac{\partial g}{\partial\sigma_{ij}}+h\dfrac{\partial f}{\partial k}\right. & \\ \qquad\left.-\dfrac{\partial f}{\partial\sigma_{ij}}D_{ijkl}\dfrac{\partial g}{\partial\sigma_{kl}}\right)d\lambda\leqslant 0 & (2.9\text{b})\\ d\lambda\cdot f=0 & (2.9\text{c})\\ d\lambda\geqslant 0 & (2.9\text{d})\end{cases}$$

将本构方程写为这种形式，是进行后面的线性互补方法推导的基础.

三、弹塑性问题的虚功原理

平衡方程(2.1)及力边界条件(2.4)可通过虚功原理表述：

$$\int_\Omega d\sigma_{ij}\delta(d\varepsilon_{ij})d\Omega-\int_\Omega db_i\delta(du_i)d\Omega-\int_{S_p}d\bar{p}_i\delta(du_i)dS=0 \tag{3.1}$$

此式不论对何种本构方程均成立.

将(2.9a)式代入(3.1)式，有

$$\int_{\Omega} d\varepsilon_{ij} D_{ijkl} \delta(d\varepsilon_{kl}) d\Omega = \int_{\Omega} \left[db_i \delta(du_i) + d\lambda \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} D_{ijkl} \delta(d\varepsilon_{kl}) \right] d\Omega + \int_{S_p} d\bar{p}_i \delta(du_i) dS \tag{3.2}$$

式中利用了条件$D_{ijkl}=D_{klij}$。

这样，弹塑性边值问题可表为：在满足应变位移关系式(2.2)及位移边界条件(2.3)的位移增量场中，求真实的位移增量du_i，并使其满足(2.9b)～(2.9d)式及虚功原理(3.2)式，即下列各式：

$$\begin{cases} \int_{\Omega} d\varepsilon_{ij} D_{ijkl} \delta(d\varepsilon_{kl}) d\Omega = \int_{\Omega} \left[db_i \delta(du_i) + d\lambda \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} D_{ijkl} \delta(d\varepsilon_{kl}) \right] d\Omega + \int_{S_p} d\bar{p}_i \delta(du_i) dS & (3.3a) \\ f = f_0 + \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} D_{ijkl} d\varepsilon_{kl} + \left(\frac{\partial f}{\partial \varepsilon^p_{ij}} \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} + h \frac{\partial f}{\partial k} - \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} D_{ijkl} \frac{\partial g}{\partial \sigma_{kl}} \right) d\lambda \leqslant 0 & (3.3b) \\ d\lambda \cdot f = 0 & (3.3c) \\ d\lambda \geqslant 0 & (3.3d) \end{cases}$$

注意，(3.3)式中，$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}$，$\frac{\partial f}{\partial \varepsilon^p_{ij}}$，$\frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}}$，$\frac{\partial f}{\partial k}$及$h$在一个增量步内均看成常数。下节我们将看到，若结合有限元离散技术，则从(3.3)式可导出一个线性互补方程。

四、有限元数值方法及线性互补方程

将物体划分为NE个单元，每个单元所占区域为Ω^e，$\Omega=\sum_{e}^{NE}\Omega^e$，与文[4]相同，我们假定一个单元只有一种应力状态，屈服约束条件(3.3b)是对单元平均意义之下的。(3.3a)式的向量形式可写为：

$$\sum_e \int_{\Omega^e} d\boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{D} \delta(d\boldsymbol{\varepsilon}) d\Omega = \sum_e \int_{\Omega^e} \left[d\mathbf{b}^T \delta(d\mathbf{u}) + d\boldsymbol{\lambda} \left(\frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right)^T \mathbf{D} \delta(d\boldsymbol{\varepsilon}) \right] d\Omega + \sum_e \int_{S^e_p} d\bar{\mathbf{p}}^T \delta(d\mathbf{u}) dS \tag{4.1}$$

(3.3b)式的向量形式为：

$$\sum_e \int_{\Omega^e} \left\{ \mathbf{f}_0 + \left(\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right)^T \mathbf{D} d\boldsymbol{\varepsilon} + \left[\left(\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^p} \right)^T \left(\frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right) + \mathbf{h} \left(\frac{\partial f}{\partial k} \right) - \left(\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right)^T \mathbf{D} \left(\frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right) \right] d\boldsymbol{\lambda} \right\} d\Omega \leqslant 0 \tag{4.2}$$

采用有限元插值方法，设$d\mathbf{u}=\mathbf{N}\cdot\boldsymbol{\delta}$，$d\boldsymbol{\varepsilon}=\mathbf{B}\cdot\boldsymbol{\delta}$，这里$\mathbf{N}$为形函数矩阵，$\mathbf{B}$为应变矩阵，$\boldsymbol{\delta}$为节点位移增量向量，则(4.1)、(4.2)式可化为：

$$\mathbf{K}\cdot\boldsymbol{\delta} = \mathbf{Q}\cdot d\boldsymbol{\lambda} + \mathbf{P} \tag{4.3}$$

$$\mathbf{H}\cdot\boldsymbol{\delta} - \mathbf{R}\cdot d\boldsymbol{\lambda} + \mathbf{P}_0 \leqslant 0 \tag{4.4}$$

式中，各有关符号意义如下：

$$\mathbf{K}=\sum_{e}\int_{\Omega^e}\mathbf{B}^T\mathbf{D}\mathbf{B}d\Omega \tag{4.5a}$$

$$\mathbf{Q}=\sum_{e}\int_{\Omega^e}\left(\frac{\partial g}{\partial\sigma}\right)^T\mathbf{D}\mathbf{B}d\Omega \tag{4.5b}$$

$$\mathbf{P}=\sum_{e}\int_{\Omega^e}\mathbf{N}^T\cdot d\mathbf{b}d\Omega+\int_{S_p^e}\mathbf{N}^T\cdot d\bar{\mathbf{p}}dS \tag{4.5c}$$

$$\mathbf{H}=\sum_{e}\int_{\Omega^e}\left(\frac{\partial f}{\partial\sigma}\right)^T\mathbf{D}\mathbf{B}d\Omega \tag{4.5d}$$

$$\mathbf{P}_0=\sum_{e}\int_{\Omega^e}\mathbf{f}_0d\Omega \tag{4.5e}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{R}&=\sum_{e}\int_{\Omega^e}\left[\left(\frac{\partial f}{\partial\boldsymbol{\varepsilon}^p}\right)^T\left(\frac{\partial g}{\partial\boldsymbol{\sigma}}\right)+\mathbf{h}\cdot\left(\frac{\partial f}{\partial k}\right)-\left(\frac{\partial f}{\partial\boldsymbol{\varepsilon}}\right)^T\mathbf{D}\left(\frac{\partial g}{\partial\boldsymbol{\sigma}}\right)\right]d\Omega\\&=\mathbf{R}_1+\mathbf{R}_2\end{aligned} \tag{4.5f}$$

这里
$$\mathbf{R}_1=\sum_{e}\int_{\Omega^e}\left[\left(\frac{\partial f}{\partial\boldsymbol{\varepsilon}^p}\right)^T\left(\frac{\partial g}{\partial\boldsymbol{\sigma}}\right)+\mathbf{h}\left(\frac{\partial f}{\partial\mathbf{k}}\right)\right]d\Omega$$

$$\mathbf{R}_2=\sum_{e}\int_{\Omega^e}\left[-\left(\frac{\partial f}{\partial\boldsymbol{\sigma}}\right)^T\mathbf{D}\left(\frac{\partial g}{\partial\boldsymbol{\sigma}}\right)\right]d\Omega$$

若材料是理想塑性的，$\mathbf{R}_1=0$。

最终，(3.3)式可化为：

$$\begin{cases}\mathbf{K}\cdot\boldsymbol{\delta}=\mathbf{Q}\cdot d\boldsymbol{\lambda}+\mathbf{P} & (4.6a)\\ \mathbf{f}=\mathbf{H}\cdot\boldsymbol{\delta}-\mathbf{R}\cdot d\boldsymbol{\lambda}+\mathbf{P}_0\leqslant0 & (4.6b)\\ d\boldsymbol{\lambda}^T\cdot\mathbf{f}=0 & (4.6c)\\ d\boldsymbol{\lambda}\geqslant0 & (4.6d)\end{cases}$$

从(4.6b)式解出$\boldsymbol{\delta}$，有：

$$\boldsymbol{\delta}=\mathbf{K}^{-1}\cdot(\mathbf{Q}\cdot d\boldsymbol{\lambda}+\mathbf{P}) \tag{4.7}$$

将(4.7)式代入(4.6b)式，并引入松驰向量$\mathbf{v}$，则(4.6)式可化为(4.7)：

$$\begin{cases}\mathbf{v}-(\mathbf{R}-\mathbf{H}\cdot\mathbf{K}^{-1}\cdot\mathbf{Q})d\boldsymbol{\lambda}+\mathbf{P}_0+\mathbf{H}\cdot\mathbf{K}^{-1}\cdot\mathbf{P}=0 & (4.8a)\\ \mathbf{v}^T\cdot d\boldsymbol{\lambda}=0 & (4.8b)\\ \mathbf{v}\geqslant0,\ d\boldsymbol{\lambda}\geqslant0 & (4.8c)\end{cases}$$

令$\mathbf{M}=\mathbf{R}-\mathbf{H}\cdot\mathbf{K}^{-1}\cdot\mathbf{Q}$，$\mathbf{q}=-\mathbf{P}_0-\mathbf{H}\mathbf{K}^{-1}\mathbf{P}$，则上式可化为：

$$\begin{cases}\mathbf{v}-\mathbf{M}\cdot d\boldsymbol{\lambda}=\mathbf{q} & (4.9a)\\ \mathbf{v}^T\cdot d\boldsymbol{\lambda}=0 & (4.9b)\\ \mathbf{v}\geqslant0,\ d\boldsymbol{\lambda}\geqslant0 & (4.9c)\end{cases}$$

(4.9)式是一个标准的线性互补问题[7]，其求解是很方便的，比如可用Lemke算法．对于只有一个屈服函数的情况，矩阵$\mathbf{M}$是$NE\times NE$阶的，问题的规模很小，便于实际应用．当由(4.9)式求得$d\boldsymbol{\lambda}$后，可由(4.7)式求得$\boldsymbol{\delta}$．

这种方法的具体应用，类似于文献[4]的方法．为节省篇幅，本文不再赘述．

五、关于解的存在性唯一性问题

从文[7]知，对于线性互补问题(4.9)，只要矩阵$\mathbf{M}$是半正定的，解一定存在；若$\mathbf{M}$是正定的，解存在且唯一．下面来讨论$\mathbf{M}$的正定性．

先讨论理想塑性情形．此时$\mathbf{R}_1=0$，$\mathbf{M}=\mathbf{R}_2-\mathbf{H}\mathbf{K}^{-1}\mathbf{Q}$．可以证明，矩阵$\mathbf{T}=\begin{bmatrix}\mathbf{R}_1 & \mathbf{H}\\ \mathbf{Q} & \mathbf{K}\end{bmatrix}$与矩阵$\mathbf{M}$的正定性相同，由$\mathbf{T}$的（半）正定性，可得到$\mathbf{M}$的（半）正定性（证明见附录A）．因此，可将对$\mathbf{M}$正定性的讨论转化为对$\mathbf{T}$正定性的讨论．

对于矩阵$\mathbf{T}$，我们有

$$W=\mathbf{X}^T\mathbf{T}\mathbf{X}=\begin{Bmatrix}d\lambda\\ \boldsymbol{\delta}\end{Bmatrix}^T\mathbf{T}\begin{Bmatrix}d\lambda\\ \boldsymbol{\delta}\end{Bmatrix}\tag{5.1}$$

利用(4.5)式，上式可写为：

$$W=\sum_e\int_{\Omega^e}\left[\mathbf{B}\cdot\boldsymbol{\delta}+\left(\frac{\partial f}{\partial\boldsymbol{\sigma}}\right)d\lambda\right]^T\mathbf{D}\left[\mathbf{B}\cdot\boldsymbol{\delta}+\left(\frac{\partial g}{\partial\boldsymbol{\sigma}}\right)d\lambda\right]d\Omega\tag{5.2}$$

可见，若将上式写为张量形式，则只要满足：

$$\left[d\varepsilon_{ij}(\delta)+d\lambda\frac{\partial f}{\partial\sigma_{ij}}\right]D_{ijkl}\left[d\varepsilon_{kl}(\delta)+d\lambda\frac{\partial g}{\partial\sigma_{kl}}\right]\geqslant 0\tag{5.3}$$

就可保证$\mathbf{T}$的半正定性．因此，我们有：

结论1　对于满足关联流动法则的理想塑性材料，(4.9)式的解存在．

事实上，此时$g=f$，(5.3)式一定成立．

结论2　对于满足关联流动法则的强化（各向同性强化、运动强化或混合强化）材料，(4.9)式的解存在且唯一．

事实上，对于强化材料，对角矩阵$\mathbf{R}_1$的各对角元素均为正，$\mathbf{R}_1+\mathbf{R}_2-\mathbf{H}\mathbf{K}^{-1}\mathbf{Q}$一定正定，故结论2成立．

对于满足非关联流动法则的材料，无法给出一个关于解的存在唯一性问题的满意结论，但若确知某种材料一定使(5.3)式成为不等式，则线性互补问题(4.9)一定有解且解唯一．

六、结　　语

本文从虚功原理出发，结合有限元技术，简捷地得出了一种求解弹塑性问题的线性互补方法．本文的推导，不必引进新概念，只是虚功原理的灵活应用．与文[3]相比，这种方法更易接受，数学依据也较可靠，而且还避免了文[3]靠猜测来确定参变量变分原理泛函形式的不便之处．与文[5]相比，本文避免了变分不等方程的一套繁复的推导，而且得出的线性互补问题的规模要小得多，便于用于实际结构分析．总之，本文的这种方法是既简便、易于接受，又便于工程应用的．

在将弹塑性问题化为一组线性互补方程后，本文还对这组方程解的存在唯一性问题进行了分析，给出了几个有用结论．

本文的这种方法，目前仅用于静态弹塑性问题，但对于其它问题，比如动态弹塑性问题、接触问题等，也可推广应用．我们将另文发表有关结果．

附录A 关于矩阵T及M的正定性

设 $\mathbf{T}=\begin{bmatrix} \mathbf{T}_{11} & \mathbf{T}_{12} \\ \mathbf{T}_{21} & \mathbf{T}_{22} \end{bmatrix}$，$\mathbf{T}_{22}$ 为对称有逆矩阵，$\mathbf{M}=\mathbf{T}_{11}-\mathbf{T}_{12}\mathbf{T}_{22}^{-1}\mathbf{T}_{21}$。可以证明，若 $\mathbf{T}$（半）正定，则 $\mathbf{M}$（半）正定。

证 对于任意的 $\mathbf{X}$，我们有：

$$W=\mathbf{X}^T\mathbf{T}\mathbf{X}$$

$$=\begin{pmatrix} \mathbf{X}_1 \\ \mathbf{X}_2 \end{pmatrix}^T\mathbf{T}\begin{pmatrix} \mathbf{X}_1 \\ \mathbf{X}_2 \end{pmatrix} \tag{A.1}$$

令

$$\mathbf{T}\begin{pmatrix} \mathbf{X}_1 \\ \mathbf{X}_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \mathbf{Y}_1 \\ \mathbf{Y}_3 \end{pmatrix} \tag{A.2}$$

则

$$W=\begin{pmatrix} \mathbf{X}_1 \\ \mathbf{X}_2 \end{pmatrix}^T\begin{pmatrix} \mathbf{Y}_1 \\ \mathbf{Y}_2 \end{pmatrix}=\mathbf{X}_1{}^T\mathbf{Y}_1+\mathbf{X}_2{}^T\mathbf{Y}_2 \tag{A.3}$$

从(A.2)及$\mathbf{T}$矩阵的定义，有：

$$\mathbf{T}_{11}\mathbf{X}_1+\mathbf{T}_{12}\mathbf{X}_2=\mathbf{Y}_1 \tag{A4.}$$

$$\mathbf{T}_{21}\mathbf{X}_1+\mathbf{T}_{22}\mathbf{X}_2=\mathbf{Y}_2 \tag{A5.}$$

由(A.5)可解得$\mathbf{X}_2$:

$$\mathbf{X}_2=\mathbf{T}_{22}^{-1}\mathbf{Y}_2-\mathbf{T}_{22}^{-1}\mathbf{T}_{21}\mathbf{X}_1 \tag{A.6}$$

将(A.6)代入(A.4)，可得

$$\mathbf{Y}_1=\mathbf{T}_{11}\mathbf{X}_1+\mathbf{T}_{12}\mathbf{T}_{22}^{-1}\mathbf{Y}_2-\mathbf{T}_{12}\mathbf{T}_{22}^{-1}\mathbf{T}_{21}\mathbf{X}_1 \tag{A.7}$$

将(A.6)、(A.7)代入(A.3)，并利用条件 $\mathbf{T}_{22}=\mathbf{T}_{22}^T$，有：

$$W=\mathbf{X}_1^T(\mathbf{T}_{11}-\mathbf{T}_{12}\mathbf{T}_{22}^{-1}\mathbf{T}_{21})\mathbf{X}_1+\mathbf{Y}_2^T\mathbf{T}_{22}^{-1}\mathbf{Y}_2$$

$$+\mathbf{X}_1^T(\mathbf{T}_{12}\mathbf{T}_{22}^{-1}-\mathbf{T}_{21}\mathbf{T}_{22}^{-1})\mathbf{Y}_2 \tag{A.8}$$

对于任意的 $\mathbf{X}_1$，从(A.6)知，总可选择适当的 $\mathbf{X}_2$，使 $\mathbf{Y}_2=0$。对于这种使条件 $\mathbf{Y}_2=0$满足的 $\mathbf{X}_1$，$\mathbf{X}_2$，(A.8)成为：

$$W=\mathbf{X}_1^T(\mathbf{T}_{11}-\mathbf{T}_{12}\mathbf{T}_{22}^{-1}\mathbf{T}_{21})\mathbf{X}_1=\mathbf{X}_1^T\mathbf{M}\mathbf{X}_1 \tag{A.9}$$

可见，若$\mathbf{T}$正定，则对任意的$\mathbf{X}_1\neq0$，均有 $W>0$，$\mathbf{M}$ 必正定；若 $\mathbf{T}$ 半正定，$W\geqslant0$，$\mathbf{M}$也是半正定的。

参 考 文 献

[1] Maier, G., A quadratic programming approach to certain classes of non-linear structural problems, *Meccanica*, 3(1968), 121—130.

[2] Kaneko, I.,Complete solutions for a class of elastic-plastic structures, *Comput. Struct. Appl. Mech. Eng.*, 21(1980), 193—209.

[3] Zhong Wan-xie,Zhang Rou-lei,The parametric variational principle for elastoplasticity, *ACTA Mechanica Sinica*, 4(2)(1988).

[4] 张柔雷、钟万勰，参变量最小势能原理的有限元参数二次规划解，计算结构力学及其应用，4(1)(1987).

[5] 沙德松、孙焕纯，虚功原理的变分不等方程及在物理非线性问题中的应用，计算结构力学及其应用，7(2)(1990).

[6] 王仁等著，《塑性力学基础》，科学出版社(1987).

[7] Reklaitis,G. V., etc., *Engineering Optimization, Method and Applicntions*, John Wiley & Sons, Inc., (1983).

A Finite Element——Mathematical Programming Method for Elastoplastic Problems Based on the Principle of Virtual Work

Zhu Chang-ming Jin Yong-jie

(Dept. of Eng. Mech., Shanghai Jiao Tong Univ. Shanghai)

Abstract

By expanding the yielding function according to Talor series and neglecting the high order terms, the elastoplastic constitutive equation is written in a linear complementary form. Based on this linear complementary form and the principle of virtual work, a finite element-complementary method is derived for elastoplastic problem. This method is available for materials which satisfy either associated or non-associated flow rule. In addition, the existness and uniqueness of solution for the method are also discussed and some useful conclusions have been reached.

Key words elastoplasticity, principle of virtual work, mathematical programming, FEM