应用数学和力学，第14卷第6期（1993年6月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

一类多分子反应微分方程模型的闭轨的存在性*

张 伟 年

（中国科学院成都分院数理科学研究室，1992年5月30日）

摘　　要

本文讨论一类生化反应模型

$$dx/dt=1-x^ny^2,\ dy/dt=\alpha(x^ny^2-y)$$

的闭轨存在性，其中$n\in N$，$x\geqslant 0$，$y\geqslant 0$，$\alpha>0$。我们将具体指出当α在一定条件下方程无闭轨或者从Hopf分枝中产生稳定的极限环。

关键词　闭轨　极限环　细焦点　Hopf 分枝

一、引　　言

如下微分方程

$$\left.\begin{aligned}dx/dt&=\delta-ax-x^py^q\\ dy/dt&=x^py^q-by\end{aligned}\right\}\tag{1.1}$$

其中$x\geqslant 0$，$y\geqslant 0$，$p\geqslant 1$，$q\geqslant 1$，$a\geqslant 0$，$b>0$，$\delta>0$（p,q为正整数），是描述一类多分子生化反应的物质浓度关系的模型（见[1]）。当$a=0$时，方程(1.1)经过变量替换

$$\left.\begin{aligned}&\delta^{(q-1)/p}b^{-q/p}x\mapsto x,\quad b\delta^{-1}y\mapsto y\\ &\delta^{1+[(q-1)/p]}b^{-q/p}t\mapsto t\end{aligned}\right\}\tag{1.2}$$

可化为

$$\left.\begin{aligned}dx/dt&=1-x^py^q\\ dy/dt&=\alpha(x^py^q-y)\end{aligned}\right\}\tag{1.3}$$

其中$p\geqslant 1$，$q\geqslant 1$为正整数，$\alpha=b^{1+q/p}\delta^{-(1+(q-1)/p)}>0$。显然(1.3)在第一象限内有唯一平衡点(1,1)。

关于(1.3)当$p=n$，$q=2$的情形

$$\left.\begin{aligned}dx/dt&=1-x^ny^2=:P(x,y)\\ dy/dt&=\alpha(x^ny^2-y)=:Q(x,y)\end{aligned}\right\}\tag{1.4}$$

* 钱伟长推荐。

(其中n为正整数，$\alpha>0$)，文[2]曾对$n=1$的情况作了完整的讨论，在$n=2$的情况下文[3]给出了闭轨的存在性讨论。本文将对一般的正整数n讨论方程(1.4)的闭轨的存在性。在第二节我们将证明在一定条件下(1.4)可经过 Hopf 分枝产生稳定的极限环；在第三节我们将证明在适当条件下方程不存在闭轨。

二、Hopf分枝产生闭轨

考虑方程(1.4)在平衡点$C:(1,1)$处的线性变分方程，其线性项矩阵为

$$A=\begin{bmatrix} P_x & P_y \\ Q_x & Q_y \end{bmatrix}_C=\begin{bmatrix} -nx^{n-1}y^2 & -2x^n y \\ \alpha nx^{n-1}y^2 & 2\alpha x^n y-\alpha \end{bmatrix}_C=\begin{bmatrix} -n & -2 \\ \alpha n & \alpha \end{bmatrix} \tag{2.1}$$

从而可从特征方程

$$\lambda^2-(\alpha-n)\lambda+\alpha n=0 \tag{2.2}$$

解得

$$\lambda_{1,2}=\frac{(\alpha-n)\pm\sqrt{\Delta}}{2} \tag{2.3}$$

其中$\Delta=(\alpha-n)^2-4\alpha n=\alpha^2-6\alpha n+n^2$。$\Delta$的零点为

$$\alpha_1=(3-2\sqrt{2})n\approx 0.17n,\alpha_2=(3+2\sqrt{2})n\approx 5.83n$$

因此有如下结论。

命题2.1 对任何正整数n，方程(1.4)在第一象限的平衡点$C:(1,1)$具有如下性质：

(i) 当$\alpha\geqslant(3+2\sqrt{2})n$时，$C$为不稳定结点；当$\alpha\leqslant(3-2\sqrt{2})n$时，$C$为稳定结点。

(ii) 当$(3-2\sqrt{2})n<\alpha<n$时，C为稳定焦点；当$n<\alpha<(3+2\sqrt{2})n$时，C为不稳定焦点。

往下我们证明

命题2.2 对任意正整数n，当$\alpha=n$时方程(1.4)的平衡点C是中心型稳定焦点，其重数为1。

注记 细焦点的重数定义见[4]。

证明 方程(1.4)在平衡点C附近可化为

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt}&=-nx-2y-\frac{n(n-1)}{2}x^2-nxy+y^2\\ &\quad-\frac{n(n-1)(n-2)}{6}x^3-\frac{n(n-1)}{3}x^2y-\frac{n}{3}xy^2+\text{h.o.t.}\\ \frac{dy}{dt}&=\alpha nx+\alpha y+\frac{\alpha n(n-1)}{2}x^2+\alpha nxy+\alpha y^2\\ &\quad+\frac{\alpha n(n-1)(n-2)}{6}x^3+\frac{\alpha n(n-1)}{3}x^2y+\frac{\alpha n}{3}xy^2+\text{h.o.t.} \end{aligned}\right\} \tag{2.4}$$

其中h.o.t.表示次数$\geqslant 4$的高次项。令

$$x+y/n=z,\quad y/n=u \tag{2.5}$$

则$\alpha=n$情形下的方程(2.4)可化为

$$\left.\begin{aligned}\dot{z}&=-nu+\text{h.o.t.}\\ \dot{u}&=nz+\frac{n(n-1)}{2}z^2+nzu+\frac{n(n-1)}{2}u^2\\ &\quad+\frac{n(n-1)(n-2)}{6}z^3-\frac{n(n-1)(n-6)}{6}z^2u\\ &\quad+\frac{n(n-2)(n-3)}{6}zu^2-\frac{n(n^2-n+2)}{6}u^3+\text{h.o.t.}\end{aligned}\right\} \tag{2.6}$$

这里h.o.t.仍表示四次以上的高次项。显然$\alpha=n$时方程(1.4)的平衡点C:(1,1)这时已化为方程(2.6)的平衡点O:(0,0)，其线性变分方程以(0,0)为中心。我们将用后继函数法研究(2.6)在(0,0)的稳定性。

令$z=r\cos\theta$，$u=r\sin\theta$，则(2.6)为

$$\left.\begin{aligned}dr/dt&=r^2G_2(\theta)+r^3G_3(\theta)+\text{h.o.t.}\\ d\theta/dt&=n+rH_1(\theta)+r^2H_2(\theta)+r^3H_3(\theta)+\text{h.o.t.}\end{aligned}\right\} \tag{2.7}$$

其中

$$G_2(\theta)=\frac{n(n-1)}{2}\sin\theta+n\cos\theta\sin^2\theta$$

$$G_3(\theta)=\frac{n(n-1)(n-2)}{6}\cos^3\theta\sin\theta-\frac{n(n-1)(n-6)}{6}\cos^2\theta\sin^2\theta+\frac{n(n-2)(n-3)}{6}\cos\theta\sin^3\theta-\frac{n(n^2-n+2)}{6}\sin^4\theta$$

$$H_1(\theta)=\frac{n(n-1)}{2}\cos\theta+n\cos^2\theta\sin\theta$$

$$H_2(\theta)=\frac{n(n-1)(n-2)}{6}\cos^4\theta-\frac{n(n-1)(n-6)}{6}\cos^3\theta\sin\theta+\frac{n(n-2)(n-3)}{6}\cos^2\theta\sin^2\theta-\frac{n(n^2-n+2)}{6}\cos\theta\sin^3\theta$$

从(2.7)式中消去t得到

$$\begin{aligned}\frac{dr}{d\theta}&=\frac{1}{n}(r^2G_2(\theta)+r^3G_3(\theta)+\text{h.o.t.})\left(1-\frac{rH_1(\theta)}{n}-\frac{r^2H_2(\theta)}{n}+\frac{r^2H_1^2(\theta)}{n^2}+o(r^2)\right)\\ &=\frac{G_2(\theta)}{n}r^2+\left(\frac{G_3(\theta)}{n}-\frac{G_2(\theta)H_1(\theta)}{n^2}\right)r^3+o(r^3)\end{aligned} \tag{2.8}$$

设(2.8)的解为

$$r(\theta,c)=r_1(\theta)c+r_2(\theta)c^2+r_3(\theta)c^3+\cdots \tag{2.9}$$

这里初值c使$|c|$充分小。由于$r(0,c)=c$，则

$$r_1(0)=1,\quad r_2(0)=r_3(0)=\cdots=0 \tag{2.10}$$

将(2.9)代入方程(2.8)，比较c,c^2，c^3等项系数得到

$$\frac{dr_1}{d\theta}=0 \tag{2.11}$$

$$\frac{dr_2}{d\theta}=\frac{G_2(\theta)}{n}r_1^2 \tag{2.12}$$

$$\frac{dr_3}{d\theta}=\left(\frac{G_3(\theta)}{n}-\frac{G_2(\theta)H_1(\theta)}{n^2}\right)r_1^3+2\ \frac{G_2(\theta)}{n}r_1r_2 \tag{2.13}$$

再从初条件(2.10)可逐个地解得

$$r_1(\theta)\equiv1 \tag{2.14}$$

$$r_2(\theta)=\int_0^\theta\frac{G_2(\theta)}{n}\ d\theta=\ \frac{n-1}{2}(1-\cos\theta)\ +\frac{\sin^3\theta}{3} \tag{2.15}$$

$$r_3(\theta)=\int_0^\theta\left(\frac{G_3(\theta)}{n}-\frac{G_2(\theta)H_1(\theta)}{n^2}+2\ \frac{G_2(\theta)}{n}r_2(\theta)\right)d\theta \tag{2.16}$$

由于对$\forall n\in N$（自然数集）

$$g_3=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{G_3(\theta)}{n}-\frac{G_2(\theta)H_1(\theta)}{n^2}+2\ \frac{G_2(\theta)}{n}r_2(\theta)\right)d\theta$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Big[-\frac{(n-1)(n-6)}{6}\cos^2\theta\sin^2\theta-\frac{n^2-n+2}{6}\sin^4\theta-(n-1)\cos^2\theta\sin^2\theta$$

$$-(n-1)\cos^2\theta\sin^2\theta+\frac{n-1}{3}\sin^4\theta\Big]d\theta$$

$$=-\frac{(n-1)(n-6)}{6}\cdot\frac{1}{8}-\frac{n^2-n+2}{6}\cdot\frac{3}{8}-(n-1)\cdot\frac{1}{8}$$

$$-(n-1)\cdot\frac{1}{8}+\frac{n-1}{3}\cdot\frac{3}{8}$$

$$=-\frac{2n^2-2n+3}{24}=-\frac{(n-1/2)^2+5/4}{24}<0 \tag{2.17}$$

由[4]第二章§3的引理，连续可微的2π周期函数的原函数$r_3(\theta)$必可表示成

$$r_3(\theta)=g_3\theta+\varphi_3(\theta) \tag{2.18}$$

其中$\varphi_3(\theta)$也是2π周期函数．这里注意$r_2(\theta)$是2π周期函数．因此从(2.9)可得到后继函数

$$f(c)=r(2\pi,c)-r(0,c)=2\pi g_3c^3+o(|c|^3) \tag{2.19}$$

由$g_3<0$知平衡点$O:(0,0)$是稳定细焦点．进一步按[4]的定义，(0,0) 是 一重细焦点．命题2.2得证．

由命题2.1和2.2可见，当$a>n$时，方程(1.4)的平衡点$C:(1,1)$从$a=n$时的稳定细焦点变为不稳定焦点，这时必出现Hopf分枝，从而至少在$C:(1,1)$点附近产生一个稳定的极限环．

定理1 对任意正整数n，方程(1.4)当

$$n<a\ll(3+2\sqrt{2})n \tag{2.20}$$

时在平衡点$C:(1,1)$附近至少有一个稳定的极限环．

推论 考虑$n=2$时的系统(1.4)，当$0<a-2\ll1$时必有稳定的极限环．

这从(2.20)直接算出．该推论正是文[3]定理2的结论．

三、闭轨的不存在性

定理2 对任意正整数$n\geq2$，方程(1.4)当$a\in(0,\delta_n)\cup(\varDelta_n,+\infty)$时无闭轨线．这里

$$\delta_n=\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{1+1/n}\cdot n^{1+2/n}\left(\frac{n+3}{3n-1}\right)^{1+3/n} \tag{3.1}$$

$$\Delta_n=\frac{(2n+1)^{1+3/n}\ (n+2)^{1+2/n}}{(n+3)^{1+3/n}\ n^{2/n}(n+1)^{1/n}} \tag{3.2}$$

推论 考虑$n=2$时的系统(1.4)，当$\alpha\in(0,4/3\sqrt{3})$或$\alpha\in(8/\sqrt{3},+\infty)$时系统无闭轨线。

事实上，从(3.1)和(3.2)计算得 $\delta_2=4/3\sqrt{3}$，而$\Delta_2=8/\sqrt{3}$。这个推论正是文[3]的定理6。往下我们证明定理2。

证明 我们分别证明区间$(0,\delta_n)$和$(\Delta_n,+\infty)$上的结论。

第一步，当$\alpha\in(0,\delta_n)$时．取Dulac函数

$$B(x,y)=y^{-2} \tag{3.3}$$

计算向量场$(PB,\ QB)$的发散量，

$$\frac{\partial}{\partial x}(PB)+\frac{\partial}{\partial y}(QB)=\frac{\partial}{\partial x}(y^{-2}-x^n)+\frac{\partial}{\partial y}(\alpha x^n-\alpha y^{-1})$$
$$=-nx^{n-1}+\alpha y^{-2} \tag{3.4}$$

考虑曲线 $\Gamma: x^{n-1}=\frac{\alpha}{n}y^{-2}$

即
$$x=\left(\frac{\alpha}{n}\right)^{\frac{1}{n-1}}y^{\frac{-2}{n-1}} \tag{3.5}$$

(曲线Γ的负半支舍去，因为$x\geqslant0$，$y\geqslant0$)．由Bendixson判据，方程(1.4)若有闭轨γ，则必有$\gamma\cap\Gamma=\{A,\ B\}\neq\phi$且向量场$(P,Q)$在$A$，$B$两点分别指向曲线$\Gamma$的两侧．因此在曲线$\Gamma$的弧$\widehat{AB}$上必有一点$D$使曲线$\Gamma$的切向量$T_D\Gamma=(P,Q)|_D$，即

$$P/Q|_{D\in\Gamma}=dx/dy|_{D\in\Gamma} \tag{3.6}$$

亦即

$$\frac{1-(\alpha/n)^{n/(n-1)}y^{-2/(n-1)}}{\alpha((\alpha/n)^{n/(n-1)}y^{-2/(n-1)}-y)}=-\frac{2}{n-1}\left(\frac{\alpha}{n}\right)^{\frac{1}{n-1}}y^{\left(\frac{-2}{n-1}-1\right)} \tag{3.7}$$

整理(3.7)得到

$$y^{\left(\frac{4}{n-1}+1\right)}-\left(\frac{\alpha}{n}\right)^{\frac{1}{n-1}}\cdot\frac{\alpha(3n-1)}{n(n-1)}y^{\left(\frac{2}{n-1}+1\right)}+\frac{2\alpha^2}{n(n-1)}\left(\frac{\alpha}{n}\right)^{\frac{2}{n-1}}=0 \tag{3.8}$$

令

$$z=y^{\frac{1}{n-1}}\qquad (n\text{为奇数时 } z=\pm y^{\frac{1}{n-1}}) \tag{3.9}$$

则(3.8)化为

$$D_n(z)=z^{n+3}-\left(\frac{\alpha}{n}\right)^{\frac{n}{n-1}}\cdot\left(\frac{3n-1}{n-1}\right)z^{n+1}+\frac{2n}{n-1}\cdot\left(\frac{\alpha}{n}\right)^{\frac{2n}{n-1}}=0 \tag{3.10}$$

显然

$$D_n(+\infty)=+\infty,\ D_n(0)=\frac{2n}{n-1}\left(\frac{\alpha}{n}\right)^{\frac{2n}{n-1}}>0 \tag{3.11}$$

当n为偶数时；而

$$D_n(+\infty)=+\infty,\ D_n(-\infty)=+\infty \tag{3.12}$$

当n为奇数时。又由于从

$$D_n'(z)=(n+3)z^{n+2}-\left(\frac{\alpha}{n}\right)^{\frac{n}{n-1}}\cdot\frac{(3n-1)}{n-1}\cdot(n+1)z^n=0 \tag{3.13}$$

解得(相应于区域$\{(x,y)|x>0,y>0\}$内的)零点

$$z_0=\pm\sqrt{\left(\frac{\alpha}{n}\right)^{n/(n-1)}\cdot\frac{(3n-1)(n+1)}{(n-1)(n+3)}} \tag{3.14}$$

(n为偶数时舍去负根)，而且

$$\begin{aligned}D_n''(z_0)&=(n+3)(n+2)z_0^{n+1}-\left(\frac{\alpha}{n}\right)^{\frac{n}{n-1}}\cdot\frac{(3n-1)(n+1)n}{n-1}z_0^{n-1}\\&=(n+3)(n+2)\left[z_0^2-\left(\frac{\alpha}{n}\right)^{\frac{n}{n-1}}\cdot\frac{(3n-1)(n+1)n}{(n-1)(n+3)(n+2)}\right]z_0^{n-1}\\&=\left(\frac{\alpha}{n}\right)^{\frac{n}{n-1}}\frac{(3n-1)(n+1)2}{n-1}\cdot z_0^{n-1}\end{aligned} \tag{3.15}$$

易见(从(3.9)式)，$z_0^{n-1}=y_0>0$，故$D_n''(z_0)>0$，即z_0为$D_n(z)$的极小值点。进一步，

$$\begin{aligned}D_n(z_0)&=z_0^{n+1}\left(\left(\frac{\alpha}{n}\right)^{\frac{n}{n-1}}\cdot\frac{(3n-1)(n+1)}{(n-1)(n+3)}-\left(\frac{\alpha}{n}\right)^{\frac{n}{n-1}}\cdot\frac{3n-1}{n-1}\right)+\frac{2n}{n-1}\left(\frac{\alpha}{n}\right)^{\frac{2n}{n-1}}\\&=-z_0^{n+1}\cdot\left(\frac{\alpha}{n}\right)^{\frac{n}{n-1}}\left(\frac{3n-1}{n-1}\right)\cdot\frac{2}{n+3}+\frac{2n}{n-1}\left(\frac{\alpha}{n}\right)^{\frac{2n}{n-1}}\\&\overset{(3.14)}{=}\frac{2}{n-1}\left(\frac{\alpha}{n}\right)^{\frac{2n}{n-1}}\left[-z_0^{n-1}\cdot\frac{(3n-1)^2(n+1)}{(n+3)^2(n-1)}+n\right]\end{aligned} \tag{3.16}$$

令$D_n(z_0)>0$，从(3.16)得到

$$z_0^{n-1}<\frac{n(n-1)(n+3)^2}{(n+1)(3n-1)^2}$$

再由(3.14)得

$$\left(\frac{\alpha}{n}\right)^n<\frac{n^2(n-1)^{n+1}(n+3)^{n+3}}{(n+1)^{n+1}(3n-1)^{n+3}}$$

亦即

$$\alpha<\left[\frac{(n-1)^{n+1}n^{n+2}(n+3)^{n+3}}{(n+1)^{n+1}(3n-1)^{n+3}}\right]^{1/n}=\delta_n$$

因此，当$\alpha\in(0,\delta_n)$时，$D_n(z_0)>0$，由(3.11)和(3.12)可见此时(3.10)无解，从而导出矛盾。因此当$\alpha\in(0,\delta_n)$时(1.4)无闭轨。

第二步，当$\alpha\in(\varDelta_n,+\infty)$时。取Dulac函数

$$B_1(x,y)=1/x^ny \tag{3.17}$$

计算向量场(PB_1，QB_1)的发散量，

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}(PB_1)+\frac{\partial}{\partial y}(QB_1)&=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{x^ny}-y\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\alpha y-\frac{\alpha}{x^n}\right)\\&=\frac{-n}{x^{n+1}y}+\alpha\end{aligned} \tag{3.18}$$

考虑曲线Γ_1：$\frac{-n}{x^{n+1}y}+\alpha=0$

即 $$y=\frac{n}{\alpha x^{n+1}} \tag{3.19}$$

假设(1.4)在$\{(x,y)|x\geqslant 0,\ y\geqslant 0\}$上有闭轨$\gamma_1$，则由Bendixson判据，$\gamma_1\cap\Gamma_1=\{A_1,B_1\}\neq\phi$．类似第一步，必存在$\widehat{A_1B_1}\subset\Gamma_1$弧上一点$E$使

$$Q/P|_{E\in\Gamma_1}=dy/dx|_{E\in\Gamma_1} \tag{3.20}$$

亦即

$$\frac{(n/a)^2\cdot x^{-(n+2)}-(n/a)\cdot x^{-(n+1)}}{1-(n/a)^2x^{-(n+2)}}=-\frac{n(n+1)}{a^2}\ \frac{1}{x^{n+2}} \tag{3.21}$$

整理(3.21)得到

$$E_n(x)=x^{n+3}-\frac{2n+1}{a}x^{n+2}+\frac{n^2(n+1)}{a^3}=0 \tag{3.22}$$

易见对$\forall n\in N$（自然数集）

$$E_n(+\infty)=+\infty,\ E_n(0)=\frac{n^2(n+1)}{a^3}>0 \tag{3.23}$$

从

$$E_n'(x)=(n+3)x^{n+2}-\frac{(2n+1)(n+2)}{a}x^{n+1}=0 \tag{3.24}$$

解得区域$\{(x,y)|x>0,y>0\}$内的零点

$$x_0=\frac{(2n+1)(n+2)}{a(n+3)} \tag{3.25}$$

由于

$$\begin{aligned}E_n''(x_0)&=(n+3)(n+2)x_0^{n+1}-a^{-1}(2n+1)(n+2)(n+1)x_0^n\\&=x_0^n(n+2)[(n+3)x_0-a^{-1}(2n+1)(n+1)]\\&=x_0^n\frac{(n+2)(2n+1)}{a}>0\end{aligned} \tag{3.26}$$

因此x_0为$E_n(x)$的极小值点．进一步，

$$\begin{aligned}E_n(x_0)&=x_0^{n+2}\left(x_0-\frac{2n+1}{a}\right)+\frac{n^2(n+1)}{a^3}\\&=-\frac{(2n+1)^{n+3}(n+2)^{n+2}}{a^{n+3}(n+3)^{n+3}}+\frac{n^2(n+1)}{a^3}\end{aligned} \tag{3.27}$$

令$E_n(x_0)>0$，从(3.27)可得到

$$a>\frac{(2n+1)^{1+3/n}}{(n+3)^{1+3/n}}\ \frac{(n+2)^{1+2/n}}{n^{2/n}(n+1)^{1/n}}=\varDelta_n$$

因此，当$a\in(\varDelta_n,\ +\infty)$时，$E_n(x_0)>0$，由(3.23)可见此时(3.22)无解，从而导出矛盾．因此当$a\in(\varDelta_n,\ +\infty)$时(1.4)无闭轨．

上述二步骤便完成了定理2的证明．

从定理2证明可见，其第二步证明（即当$a\in(\varDelta_n,\ +\infty)$的情形）对$\forall n\in N$都成立．因此

定理3 $n=1$时，方程(1.4)当$a>3^7/2^9$时无闭轨．

事实上，$\varDelta_1=3^7/2^9\approx 4.27$．

参 考 文 献

[1] 陈兰荪，《数学生态学的理论和方法》，科学出版社（1988）。

[2] 周建莹、张锦炎、曾宪武，生化反应中一类非线性方程的定性分析，应用数学学报，5(3)（1982），234—240。

[3] 李嘉旭、范弘毅、姜天来、陈秀东，一类多分子反应微分方程模型的定性分析，生物数学学报，5(2)（1990），162—170。

[4] 张锦炎，《常微分方程几何理论与分支问题》，北京大学出版社（1981）。

Existence of Closed Orbits for a Differential Equation Model Concerning Multi-Molecule Reactions

Zhang Wei-nian

(Centre for Mathematical Sciences, Chengdu Institute of Computer Applications, Academia Sinica, Chengdu)

Abstract

In this paper, the existence of closed orbits for the bio-chemical reaction model

$$dx/dt=1-x^n y^2,\ dy/dt=a(x^n y^2-y)$$

is discussed, where n is a positive integer and $x\geqslant0$, $y\geqslant0$, $a>0$. We also point out that the equation has no closed orbits or has stable limit cycles arising from Hopf bifurcations under a certain condition of a.

Key words closed orbit, limit cycle, fine focus, Hopf bifurcation