

一个非线性振子的混沌现象*

裴钦元 李 骊

(长沙铁道学院) (北京工业大学)

(1991年12月2日收到)

摘 要

本文利用 Mel'nikov 方法和数值模拟对含二次非线性项的受迫振动系统 $\ddot{x}_1 + \delta \dot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 - \beta x_1^2 = f \cos \omega \tau$ 的分叉与混沌进行了研究。

关键词 非线性振动 数值模拟 Mel'nikov方法 混沌运动

一、引 言

动力系统从分叉走向混沌的道路已受到广泛的关注,这方面的工作详见文[1~4]。现在人们已把混沌运动看成是非线性振动理论研究对象的自然延伸。只不过,混沌问题本身具有非常复杂的性质。为了揭示这种奇怪运动的全部特性,我们用现有的理论和电子计算机模拟对一些简单的模型进行深入的研究也许是有意义的。

在物理、力学、电学、声学、化学、生物及其它领域中存在大量的振动现象。本文只讨论外周期力作用下含二次非线性项恢复力的振子。其控制微分方程为:

$$\ddot{x}_1 + \delta \dot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 - \beta x_1^2 = f \cos \omega \tau \quad (1.1)$$

其中 δ 为阻尼, ω_0 为 $\beta = 0$ 时系统的固有频率, β 为平方项非线性恢复力的系数, f 为单位质量所受的外力的振幅, ω 为外周期力频率。

作为导出方程(1.1)的物理实例,见 Minorsky^[5] 讨论过的受弹簧约束带电导线运动的例子,文[6]用数值积分和二维迭代对方程(1.1)作过研究,本文则用计算机模拟和 Mel'nikov 方法^[7]研究了方程(1.1)。

二、同宿圈分叉与混沌阈值

为了减小讨论时所需的参数,应使方程(1.1)无量纲化。引入变换 $t = \omega_0 \tau$, 方程(1.1)变为:

* 国家自然科学基金资助项目。

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} + \delta \frac{dx_1}{dt} + x_1 - \beta x_1^2 = f_1 \cos \Omega t \quad (2.1)$$

这里 $\delta = \frac{\bar{\delta}}{\omega_0}$, $\beta = \frac{\bar{\beta}}{\omega_0^2}$, $\Omega = \frac{\omega}{\omega_0}$, $f_1 = \frac{\bar{f}}{\omega_0^2}$. 再令 $x = \beta x_1$, 可得:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \delta \frac{dx}{dt} + x - x^2 = f \cos \Omega t \quad (2.2)$$

其中 $f = \frac{\beta \bar{f}}{\omega_0^2}$

在本文假设

$$\delta = \varepsilon \bar{\delta}, \quad f = \varepsilon \bar{f},$$

换言之, 我们讨论形如(2.2)的方程对应的方程组

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= y \\ \frac{dy}{dt} &= -x + x^2 + \varepsilon \left(-\delta \frac{dx}{dt} + f \cos \Omega t \right) \end{aligned} \right\} \quad (2.3)$$

当 $\varepsilon = 0$ 时, 系统(2.3) _{$\varepsilon=0$} 有中心型奇点 $O(0, 0)$. 和一个双曲鞍点 $P(1, 0)$, 见图1, 其哈密顿函数为:

$$H = \frac{1}{2} y^2 + \frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{3} x^3 \quad (2.4)$$

由(2.4)式不难知道哈密顿量 $H = 1/6$ 对应同宿轨道 Γ . 从 $q^0(0) = (-1/2, 0)$ 出发的未扰动同宿轨道由下式给出:

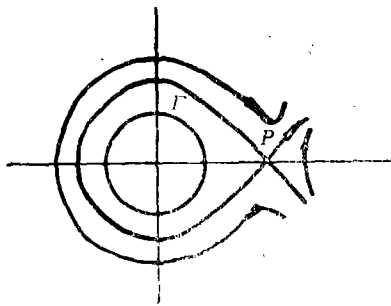


图 1

$$\Gamma: \quad q^0(t) = (x^0(t), y^0(t)) = \left(1 - \frac{3}{2} \operatorname{sech}^2 \frac{t}{2}, -\frac{3}{2} \operatorname{sech}^2 \frac{t}{2} \cdot \tanh \frac{t}{2} \right) \quad (2.5)$$

在这一同宿环内部存在一个单参数周期轨道族, 其轨道可写为:

$$\left. \begin{aligned} x^k(t) &= \frac{b \operatorname{sn}^2 \left(\sqrt{\frac{a-c}{6}} t, k \right) - a}{\operatorname{cn}^2 \left(\sqrt{\frac{a-c}{6}} t, k \right)} \\ y^k(t) &= 2(a-b) \sqrt{\frac{a-c}{6}} \frac{\operatorname{sn} \left(\sqrt{\frac{a-c}{6}} t, k \right) \operatorname{dn} \left(\sqrt{\frac{a-c}{6}} t, k \right)}{\operatorname{cn}^3 \left(\sqrt{\frac{a-c}{6}} t, k \right)} \end{aligned} \right\} \quad (2.6)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{式中} \quad a &= \frac{1}{2} \cos \theta, \quad b = \frac{1}{2} + \cos(\theta + 120^\circ) \\ \theta &= \frac{1}{3} \arccos(1 - 12H), \quad c = \frac{1}{2} \cos(\theta + 240^\circ) \\ k^2 &= \frac{b-c}{a-c} \end{aligned} \right\} \quad (2.7)$$

sn , cn 和 dn 为 Jacobi 椭圆函数, k 为椭圆模, 这些轨道的周期为:

$$T_k = \sqrt{\frac{6}{a-c}} \cdot 4K(k) \quad (2.8)$$

其中, $K(k)$ 为第一类完全椭圆积分.

对(2.3)式所确定的系统, 我们感兴趣的是同宿圈的分叉, 其Mel'nikov函数为:

$$\begin{aligned} M(t_0) &= \int_{-\infty}^{\infty} y^0(t) [-\delta y^0(t) + f \cos \Omega(t+t_0)] dt \\ &= -\frac{6}{5} \delta - \frac{6\pi f \Omega^2}{\sinh \pi \Omega} \sin \Omega t_0 \end{aligned} \quad (2.9)$$

据此得其混沌阈值为:

$$R^0(\Omega) = \frac{f}{\delta} = -\frac{\sinh \pi \Omega}{5\pi \Omega^2} \quad (2.10)$$

从上图中, 可以看出 $R(\Omega)$ 为一反对称函数, 根据Mel'nikov定理, 对系统(2.3), 我们得到如下两个结论:

结论1 当 $\Omega < 0$ 时, f, δ 同号, 系统才会出现同宿圈分叉, 进而存在Smale意义下的混沌.

结论2 当 $\Omega > 0$ 时, f, δ 异号, 系统才会出现同宿圈分叉, 进而存在Smale意义下的混沌.

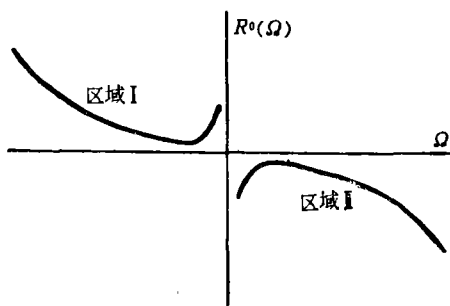


图 2

三、数值模拟

由于混沌运动与其他定常运动相比, 有其独特的数字特征^[8], 这些数字特征对于了解混沌运动的规律性是十分重要的, 它们可以作为一个定常运动是否混沌的判断标准. 因此, 为了证明混沌运动的存在, 我们需要利用电子计算机对系统(2.3)进行数值模拟. 为此, 我们将采用(1)Poincaré 截面, (2)功率谱分析, (3)相平面图以及运动轨道的直接观察等来作出判断.

在本文中, 我们固定激励的频率 Ω , 讨论阻尼 δ 和幅值 f 变化时, 系统(2.3)的响应, 在文[6]的基础上, 我们着重研究 $\Omega = -1.7$ 和 $\Omega = -1.9$ 的情况.

1. 当 $\Omega = -1.7$ 时

在数值研究中, 我们发现 $\Omega = -1.7$ 时, 阻尼过小, 会引起系统过早地发散而得不到混沌解. 从能量的观点来看, 就是耗散作用不足以阻止系统越过势能的高峰, 这从图 1 就可以看出只要稍偏离 P 点, 系统就将给出发散解. 取不同的阻尼 δ , 系统的反应情况如下:

(1) $\delta = 0.15$ 时, $f = 0.45$ 为周期 1 解, $f = 0.46$ 解发散. 在这组参数下很难观察到混沌现象.

(2) $\delta = 0.2$ 时, $f = 0.48$ 为周期 1 解, $f = 0.499$ 为周期 4 解, $f = 0.506$ 为周期 8 解. 显然, 当 $\Omega = -1.7, \delta = 0.2$ 时, 随着 f 的增大, 系统出现倍周期分叉, 见图 3. 值得指出的是, 在这组参数下, 我们反复搜索, 均未找到周期 2 解. 这与文[6]的结果基本是一致的. 当 $f = 0.512$ 时, 系统出现了奇怪吸引子, 见图 4(b). 这个吸引子恰象一只张开了的有点歪型的嘴巴. 图 4(a) 为一扭转了的很粗的环. 图 4(c) 为平均功率谱, 它有三个明显的单峰和一小段连续谱. 从非线性振动理论中, 我们知道它决非概周期解. 因为概周期解的功率谱为相

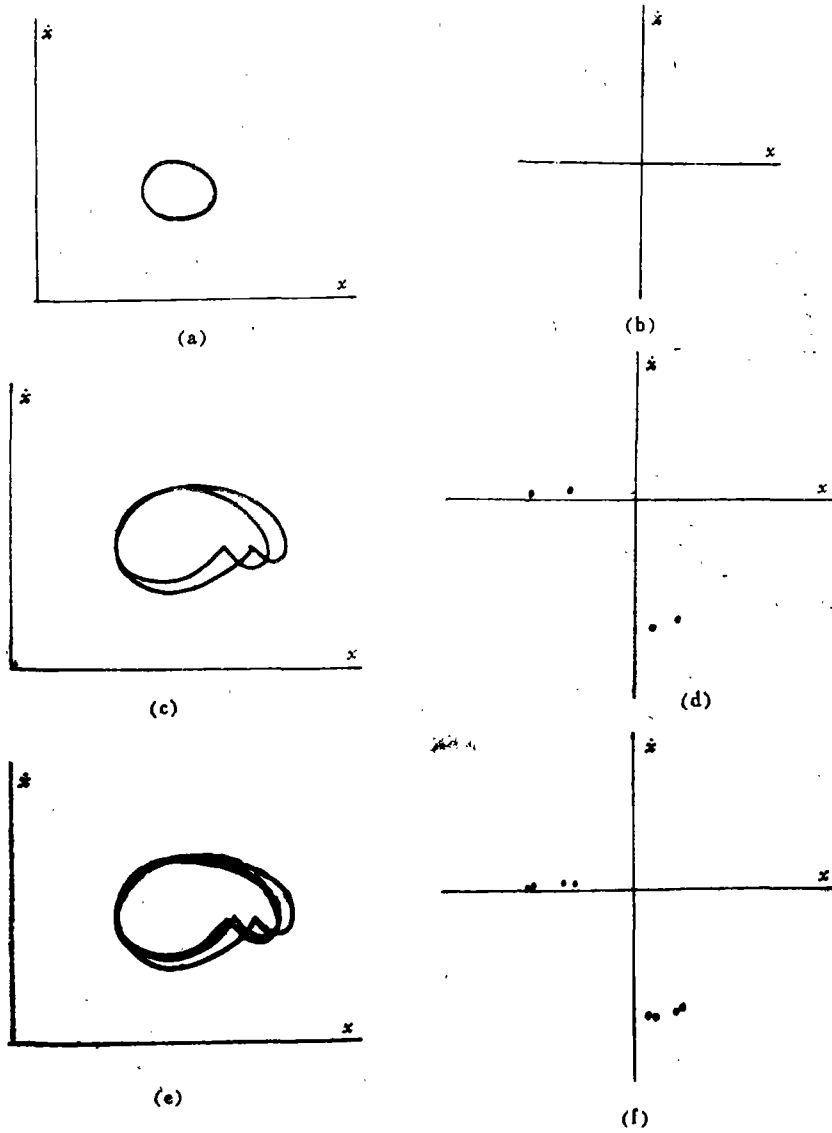


图 3

(a), (c), (e) 相平面; (b), (d), (f) Poincaré截面, $\Omega = -1.7, \delta = 0.2,$
 f 分别为 0.48, 0.499, 0.506

当密集的离散谱线。图4(d)为时间历程。当 $f \geq 0.515$ 时, 系统重新回到周期 1 的轨道。

(3) $\delta = 0.3$ 数值研究结果见表 1

表 1

f	相平面上的圈数	Poincaré截面点数
0~0.618	1	1
0.620~0.699	2	2
0.70~0.727	4	4
0.729~	8	8
.....
0.79~0.802		奇怪吸引子
0.803	解 发 散	

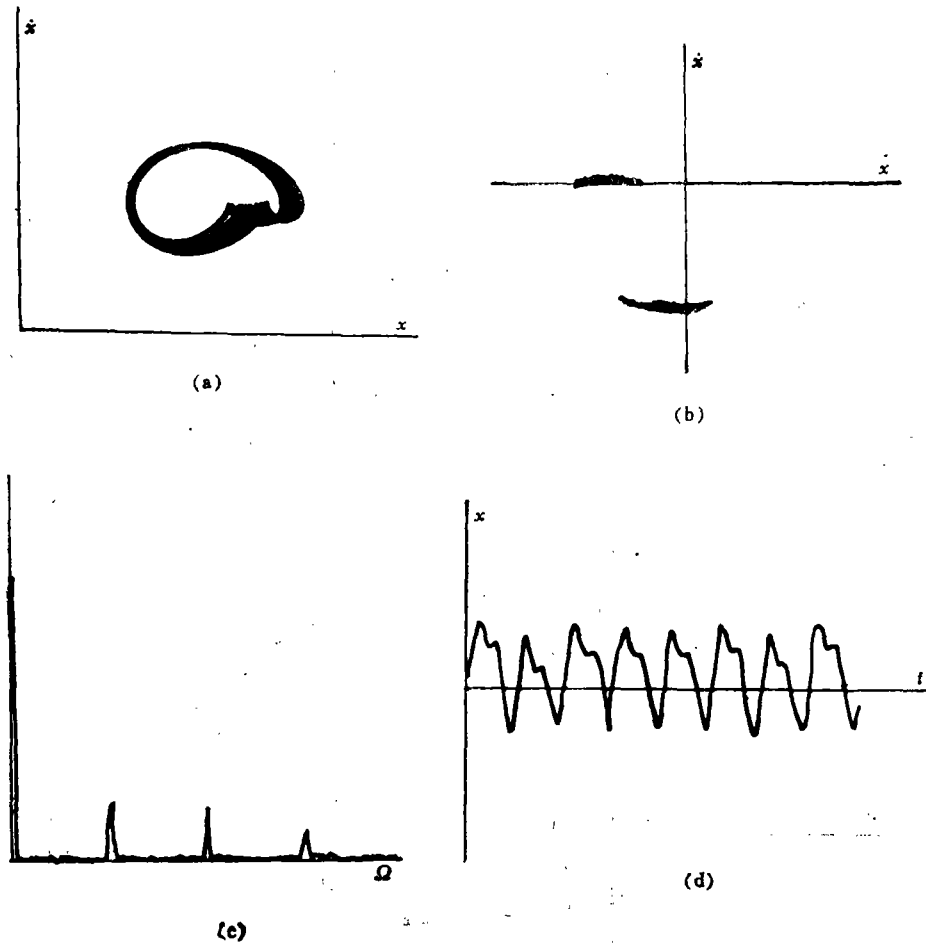


图 4

$$\Omega = -1.7, \delta = 0.2, f = 0.512$$

(a) 相平面 (b) Poincaré截面 (c) 功率谱 (d) 时间历程

图 5 给出该参数下典型的倍分叉的情况。图 6(a) 为相平面图，其形状好象一折迭的丝束，中间疏密不同。从图上可以清楚的看到轨线最后的走向，换言之，相轨线永不封闭。图 6(b) 为 Poincaré 截面，这是一个奇怪吸引子，其上部象一只张开嘴的鹰的头部，下部为错位了的鹰的身躯。图 6(c) 为平均功率谱图，尽管在计算中，过渡时间我们用了 200 单位，计算时间花了近一小时，但是，除了三个单峰外，仍然可见有十段连续谱出现。图 6(d) 为时间历程，它显得杂乱无章，毫无规律可言。一般说来，综合这四种图形，加上这组参数落在图 2 的区域 I 中，我们便认为这是一个混沌解。需要指出的是在混沌区 $f \in (0.79, 0.802)$ 过后，系统不是回到周期轨道，而是直接发散。

3. 当 $\Omega = -1.9$ 时

由于阻尼 δ 太小，系统过早发散而很难观察到混沌现象。在此情况下，我们仅取 $\delta = 0.3$ 进行研究，数值研究结果见表 2。

图 7 给出了随着 f 的增大，系统出现了偶阶次次谐分叉的情况。当 $f = 1.80$ 时，系统开始出现奇怪吸引子。图 8 给出了 $f = 1.85$ 时的一个混沌解，其 Poincaré 截面恰象一片树叶。它说明了混沌运动既复杂又非常有趣这个事实。当 $f = 1.89$ 时，系统开始出现倒分叉，图 9 给出了倒分叉的典型情况。

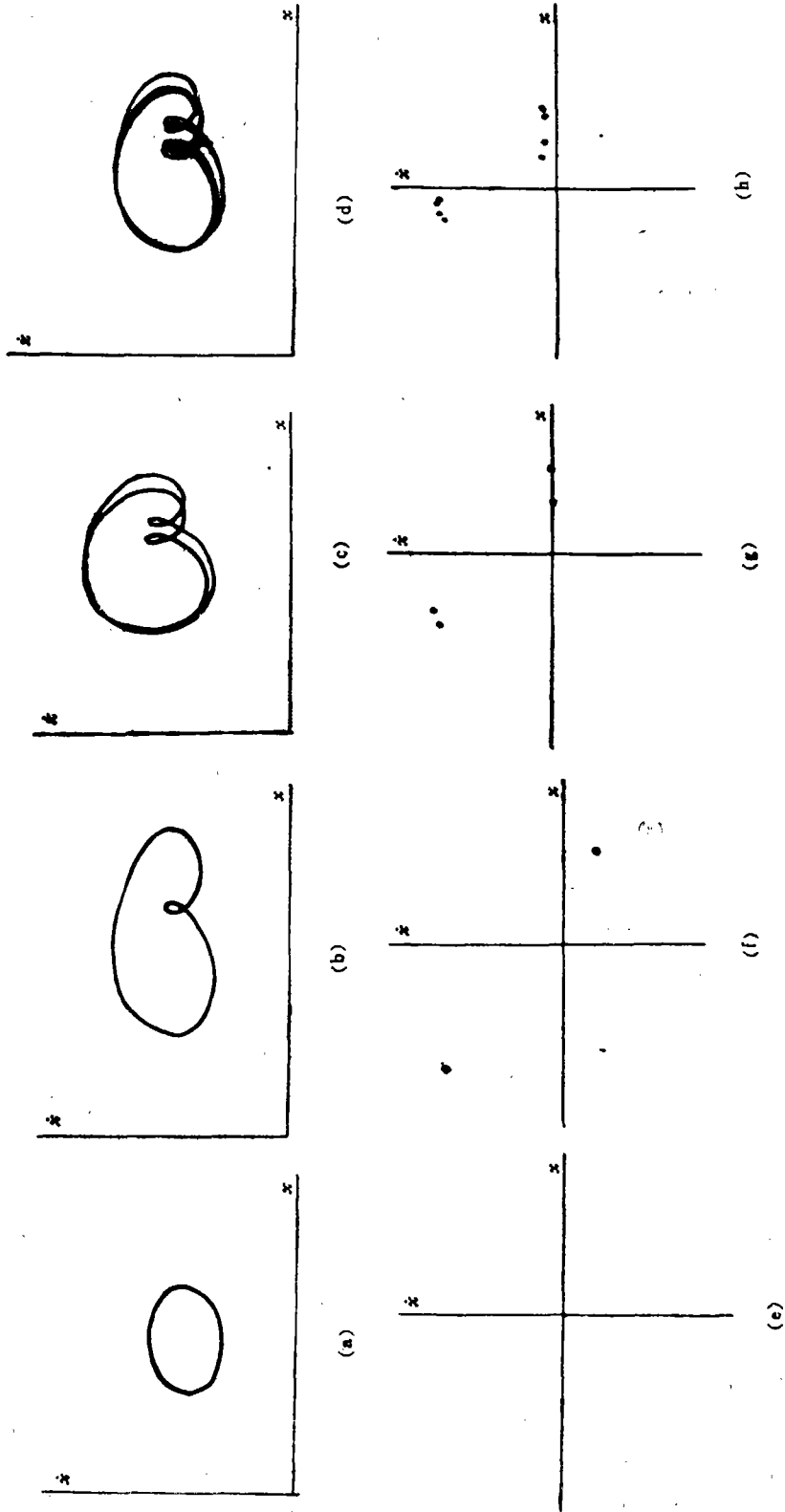


图 5

(a), (b), (c), (d) 相平面 (e), (f), (g), (h) Poincaré截面 $\Omega = -1.7, \delta = 0.3, f$ 分别为 $0.5, 0.65, 0.717, 0.737$

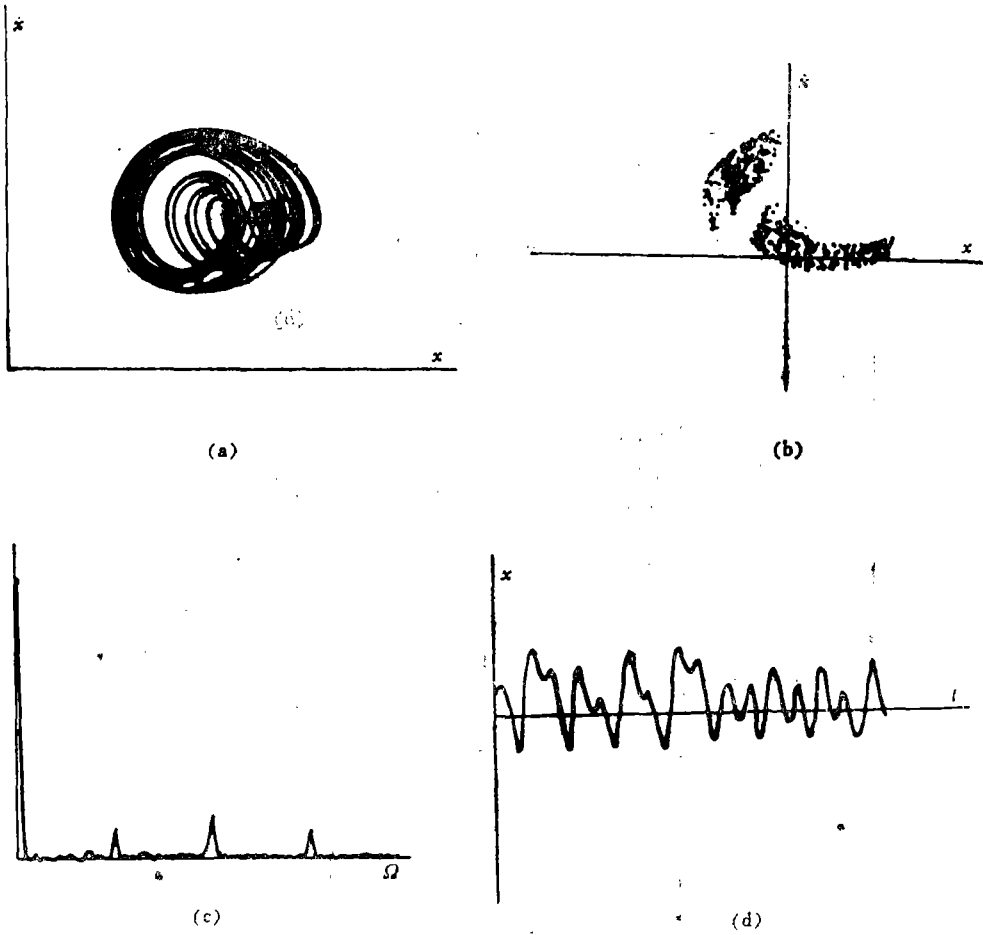


图 6

(a) 相平面, (b) Poincaré截面, (c) 功率谱, (d) 时间历程 $\Omega = -1.7, \delta = 0.3, f = 0.79$

表 2

f	相平面上圈数	Poincaré 截面点数
0~0.739	1	1
0.74~1.323	2	2
1.324~1.431	4	4
1.432~1.447	6	6
1.448~1.484	8	8
.....
1.80~1.87		奇怪吸引子
1.89~	倒分叉	

四、结 论

在本文里, 我们用Mel'nikov方法和数值模拟详细研究了 $\Omega = -1.7$ 和 $\Omega = -1.9$ 的情况, 根据Mel'nikov条件, 我们知道混沌运动只能发生在图2中的区域 I 和 II. 从大量的数值模拟和综合分析中, 我们对动力系统(2.3)可得出如下结论:

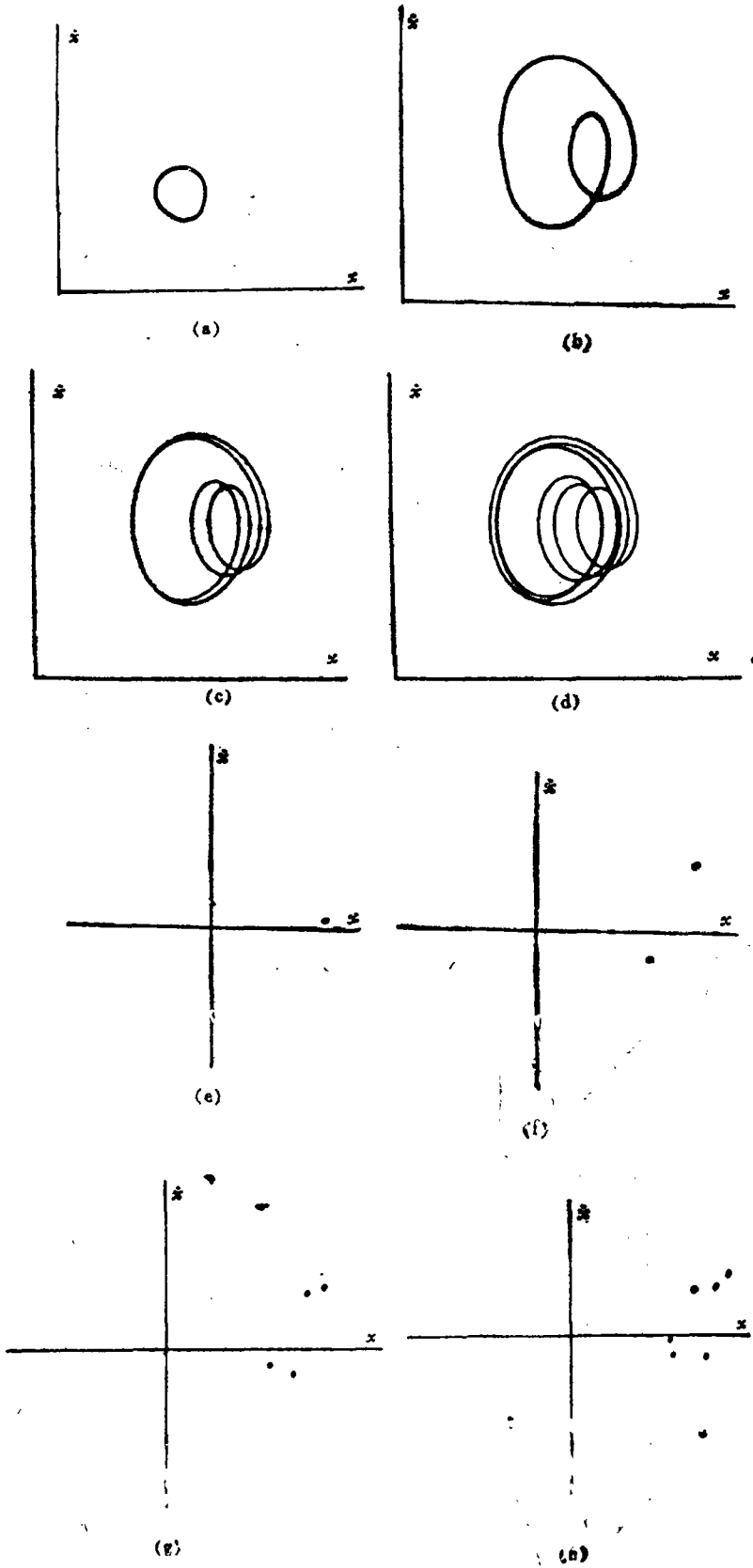


图 7

(a)、(b)、(c)、(d) 相平面, (e)、(f)、(g)、(h) Poincaré 截面
 $\Omega = -1.9, \delta = 0.3, f$ 分别为 0.5, 1.311, 1.436, 1.436

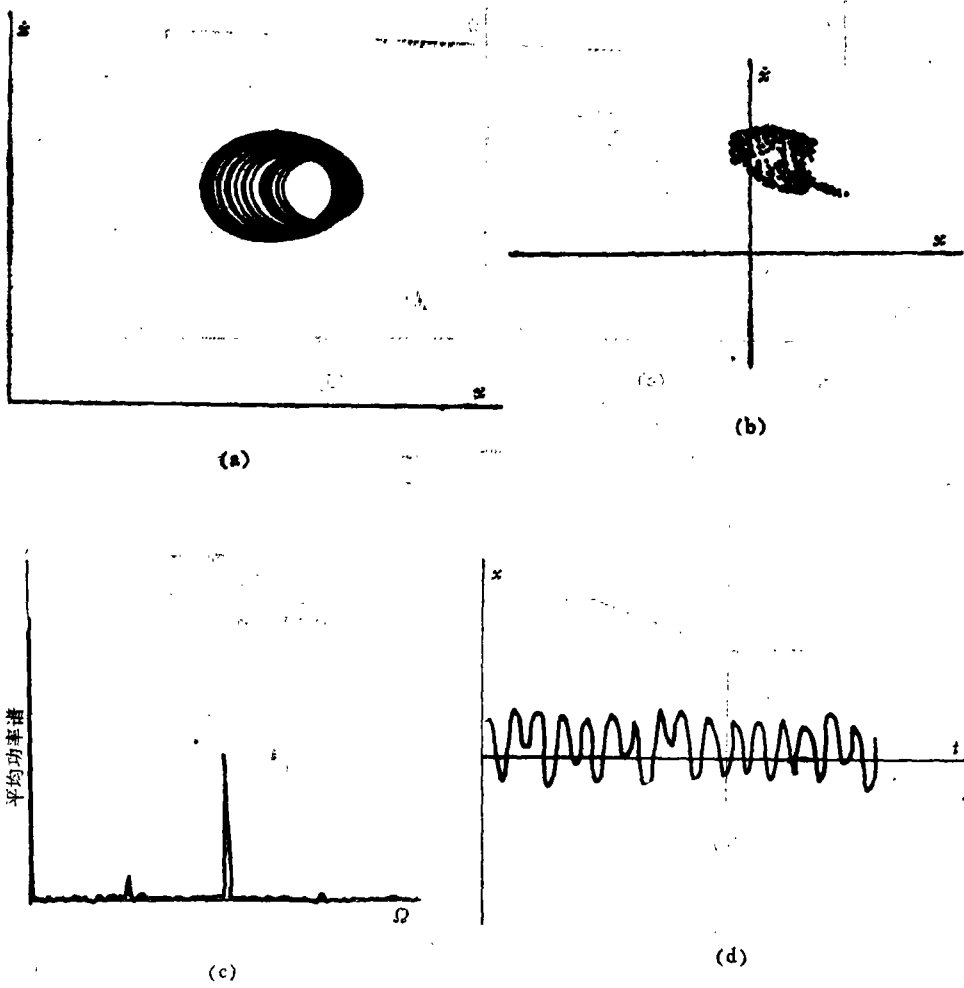


图 8

(a) 相平面, (b) Poincaré截面, (c) 功率谱, (d) 时间历程 $\Omega = -1.9, \delta = 0.3, f = 1.85$

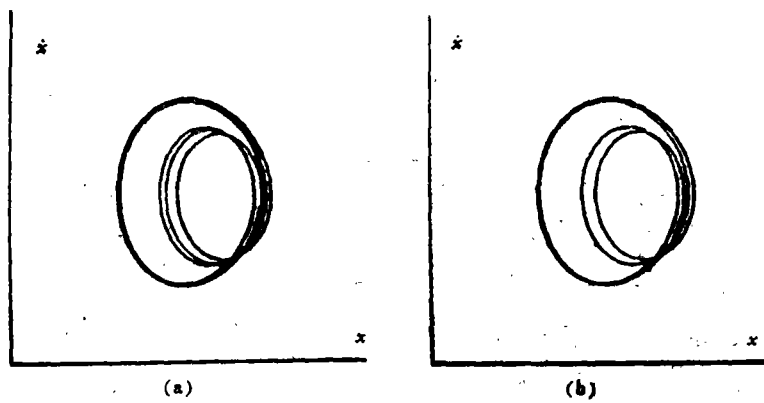


图 9

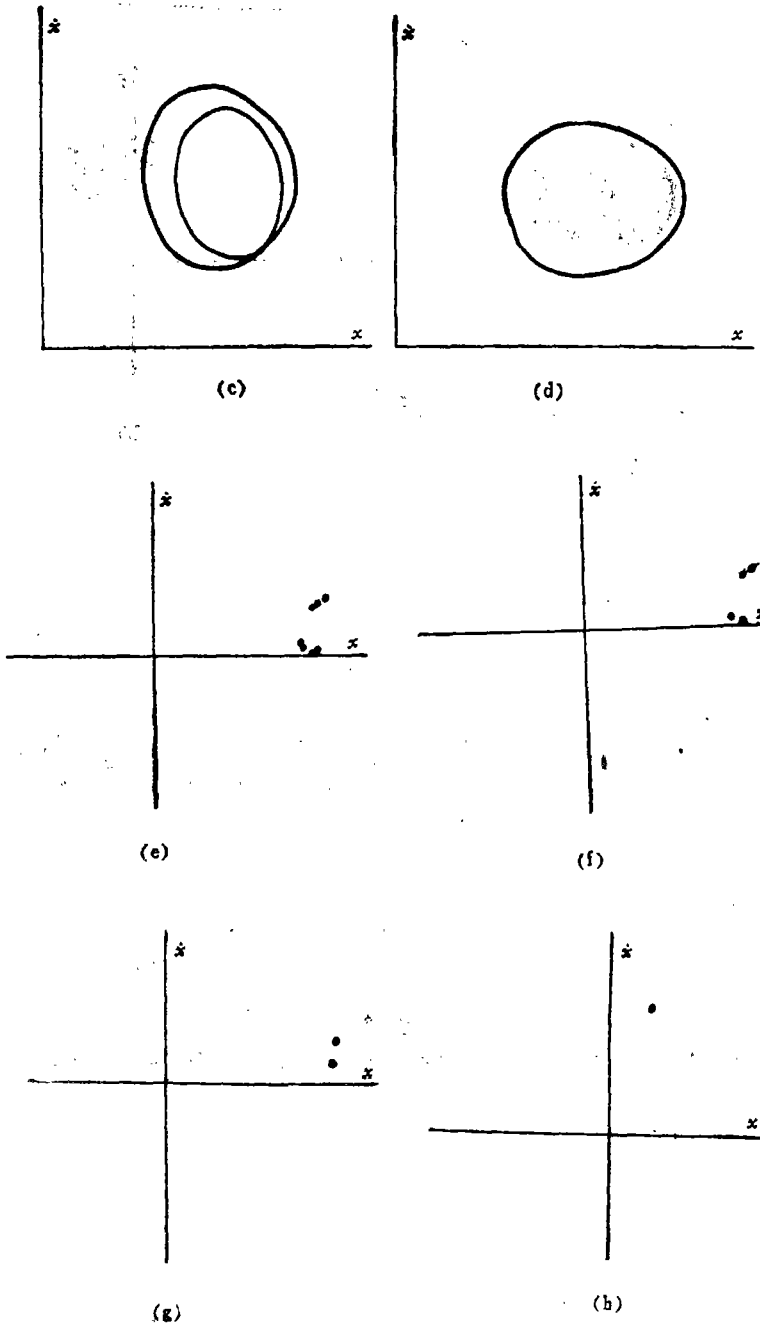


图 9
 (a), (b), (c), (d) 相平面, (e), (f), (g), (h) Poincaré 截面
 $\Omega = -1.9, \delta = 0.3, f$ 分别为 2.016, 2.051, 2.28, 2.51

方程(2.3)对于固定的频率 Ω , 阻尼 δ 太小, 解将过早发散而很难观察到混沌现象. 对于不同的 Ω , 系统导入混沌的道路不一样, 有倍分叉的, 有偶阶次次谐分叉的. 当系统越过混沌区后, 系统有重新回到周期 1 解的, 有直接发散的, 有出现倒分叉的. 这三种情况都取决于阻尼和频率的取值. 在各组参数下, 奇怪吸引子有着很大的区别, 但都显示了各自的规律性, 其形状既有趣, 又复杂. 若频率 Ω 不变, 增大阻尼 δ 能减轻发散困难观察到更为丰富的

混沌现象。实际出现混沌的 f 值要比 $f_M = -\frac{\sinh \pi \Omega}{5\pi \Omega^2} \delta$ 大得多, 例如 $\Omega = -1.9$, $\delta = 0.3$ 时, $f_M = 1.0346$, 而实际出现混沌的 $f \geq 1.8$ 。

由于数值工作非常之大, 对图 2 中的区域 II, 我们将结合共振曲线另文讨论。

参 考 文 献

- [1] Holmes, P. J., A nonlinear oscillation with a strange attractor, *Phil. Trans. Roy. Soc. London*, A1394(1979), 419-448.
- [2] Holmes, P. J. and F. C., Moon, Strange attractors and chaos in nonlinear mechanics, *ASME J. Appl. Mech.*, 12(1983), 1021-1032.
- [3] 李继彬、刘曾荣, 几类非线性受迫混沌性质, *数学物理学报*, 5(1986), 195-204.
- [4] Nestor N.S. and A. H. Nayfeh, Prediction of bifurcations in a parametrically excited duffing oscillator, *Int. J. Non-linear Mechanics*, 25(1990), 163-176
- [5] Minorsky N., *Introduction to Nonlinear Mechanics*, J. W. Edwards, Ann. Arbor, Mich, (1947).
- [6] 倪皖芬、魏荣爵, 含二次非线性项受迫振动系统的分叉和混沌现象, *物理学报*, 34(1985), 503-511.
- [7] Guckenheimer, J. and P. J., Holmes, *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcation of Vector Field*, Springer-Verlay, (1983).
- [8] 郝柏林, 分叉、混沌、奇怪吸引子、湍流和其他, *物理学进展*, 3(1983), 329-416.

The Chaotic Behavior of a Nonlinear Oscillator

Pei Qin-yuan

(Changsha Railway University, Changsha)

Li Li

(Beijing Polytechnic University, Beijing)

Abstract

Behaviors of bifurcation and chaos in a forced oscillator $\ddot{x}_1 + \delta \dot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 - \beta x_1^2 = f \cos \omega t$ containing a square nonlinear term is investigated by using Melnikov method and digital computer simulations

Key words nonlinear vibration, digital computer simulation, Melnikov method, chaotic motion