应用数学和力学，第14卷第5期(1993年5月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

广义变分原理在非线性结构分析中的应用*

成 祥 生

(同济大学，1990年1月4日收到)

摘　要

本文讨论在结构力学中用拉格朗日乘子法建立的广义变分原理以分析非线性超静定结构．我们假定结构的材料关于应力-应变的关系具有$\sigma=B\varepsilon^{1/m}$或$\tau=C\gamma^{1/m}$的形式，即结构的物理方程具有幂函数的形式．文中举出几个超静定结构的例子，例如桁架、梁、刚架和扭杆．

关键词　广义变分原理　非线性结构　超静定结构

一、前　言

在弹性理论中较早提出用拉格朗日乘子法以寻求广义变分泛函的是钱伟长教授[1~5]，同时也有些作者在结构力学中用拉格朗日乘子法去求某一泛函的极值问题[6~8]，进而从最小余能原理出发建立了杆系结构力学中的广义变分原理[8]以分析线性超静定结构．此外，鹫津久一郎等人对这一领域均有很多讨论[9~12]，至今该法仍在不断发展中．

本文将应用杆系结构力学中的广义变分原理对物理非线性的超静定结构进行分析．我们假定结构材料的应力-应变关系，即物理方程具有幂函数的形式．

现在让我们来描述结构具有物理非线性的特性，它们的应力和应变的关系是非线性的，例如，它们具有如下幂函数的形式

$$\sigma=B\varepsilon^{1/m} \tag{1.1}$$

或

$$\tau=C\gamma^{1/m} \tag{1.2}$$

其中　σ是正应力，ε是正应变；τ是剪应力，γ是剪应变；B和C是和材料弹性性质有关的某个常数，而m为一正整数，可取为2或3.以后我们假定材料在拉伸和压缩时具有同样的特性．今后为讨论简单起见，我们假定取$m=2$，这样，仍不失其一般性．

二、非线性超静定结构分析中的广义变分原理

分析非线性超静定结构的广义变分原理与分析线性超静定结构的情形稍有不同，其区别

* 潘立宙推荐．

在于物理方程．对于有$n+m$个杆件的非线性超静定结构系统，我们也可列出m个独立的平衡方程如下

$$Q_i(x_1,x_2,\cdots,x_j,\cdots,x_{n+m})=0 \qquad (i=1,2,3,\cdots,m) \tag{2.1}$$

其中 x_j是第j个杆件的广义内力或反力，当杆件在受拉伸或压缩时为轴向内力，用N_j表示；当杆件在受弯曲时，则为内弯矩或广义反力，其中内弯矩用M_{bj}表示；当杆件在受扭转时为内扭矩，将用M_{kj}表示．从(2.1)可看出：独立的平衡方程的数目只有m个，而未知内力却有$n+m$个，故独立的平衡方程的数目少于未知内力的数目，故问题是静不定的，因此必须补充足够数量的方程，这可以从多种途径去解决．我们并不从变形的几何关系或协调条件出发，而是从能量方面去考虑问题．

对于整个系统，我们有所谓余能函数

$$V=\sum_j V_j \qquad (j=1,2,3,\cdots,n+m) \tag{2.2}$$

其中 V_j为第j个杆件的余能函数，它们是广义内力x_j的函数，或具体地说：它们是轴向内力N_j或内弯矩M_{bj}，内扭矩M_{kj}的函数．

根据最小余能原理[14~28]：系统在稳定平衡时，其余能为最小．因此，这显然是一个极值问题，当然，这个极值问题可转化为变分问题．这样，我们就可叙述如下的两个变分原理．

第一变分原理（小变形，线性或非线性，弹性或非弹性杆系结构的最小余能原理） 在满足平衡方程（2.1)的所有容许的广义内力x_j必使余能函数（2.2)为极值，即余能函数的一阶变分为零．如果进一步研究二阶变分，则可证明这个极值是极小值[2,3,5]，故上述原理称之为最小余能原理．也可换一种说法：使（2.2)中泛函V为最小的x_j必满足平衡方程(2.1)．这里要指出的是：由于使余能函数为极值的条件就导出了变形连续性方程或相容条件，所以使余能函数（2.2)为最小的条件就相当于满足变形连续性方程或相容条件．因此，也可以这样讲：满足平衡方程的所有容许的广义内力必定也满足变形连续性方程．或凡满足变形连续性条件和满足平衡方程的诸广义内力必须是所论问题的正确解．上面所述的是有条件的变分原理或称之为条件极值问题[13]．最小余能原理的条件，在这里就是要满足平衡方程．

如果我们使用拉格朗日乘子法，则可将上述有条件（2.1)的最小余能原理转化为无条件的所谓广义变分原理或一般的极值问题．如设λ_i为待定的拉格朗日乘子，它有m个，于是根据方程（2.2)以推导无条件的广义变分原理的新泛函可以设定为

$$L=V+\sum_i \lambda_i Q_i \qquad (i=1,2,3,\cdots,m) \tag{2.3}$$

其中 V和Q_i都是广义内力x_j的函数．

这样，我们就把寻求余能函数V的条件极值问题转化为求某一泛函L的一般极值问题了．根据极值的必要条件：该泛函L的一阶变分应等于零，现将x_j和λ_i都作为独立的变量来进行变分，则当新泛函L达到驻值时应有

$$\delta L=\left(\frac{\partial V}{\partial x_j}+\sum_i \lambda_i \frac{\partial Q_i}{\partial x_j}\right)\delta x_j+\sum_i Q_i\delta\lambda_i=0 \tag{2.4}$$

$$(i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n+m)$$

它是一个由结构全部广义内力所构成的变分方程组，由于δx_j及$\delta\lambda_i$都是独立的，所以由L的驻值条件就给出了

$$Q_i=0 \tag{2.5}$$

$$\frac{\partial V}{\partial x_j}+\sum_i \lambda_i \frac{\partial Q_i}{\partial x_j}=0 \tag{2.6}$$

上面的第一式就是前面的平衡方程(2.1)，而第二式(2.6)等价于变形连续性方程或相容条件[7].

从(2.3)式转变到(2.5)和(2.6)式的过程就是导出新泛函取得驻值的条件的过程.这样就把杆系结构的最小余能原理转换为把求解该结构的基本方程作为新泛函L达到驻值的条件的原理.

当杆件受拉伸或压缩时，方程(2.6)可以写成如下

$$\frac{\partial V}{\partial N_j}+\sum_i \lambda_i \frac{\partial Q_i}{\partial N_j}=0 \qquad (j=1,2,\cdots,n+m) \tag{2.7}$$

当杆件受弯曲时，方程(2.6)可写成如下

$$\frac{\partial V}{\partial x_j}+\sum_i \lambda_i \frac{\partial Q_i}{\partial x_j}=0 \qquad (j=1,2,\cdots,n+m) \tag{2.8}$$

其中 x_j为广义力，包括弯矩或支反力.

如果杆件受扭转，则方程(2.6)可相应地写成如下

$$\frac{\partial V}{\partial M_{kj}}+\sum_i \lambda_i \frac{\partial Q_i}{\partial M_{kj}}=0 \qquad (j=1,2,\cdots,n+m) \tag{2.9}$$

由于(2.1)式是最初的变分条件，它就是m个平衡方程，现在又出现了(2.6)(它共有$n+m$个)，它相当于变形连续性条件.由(2.1)和(2.6)就可求出m个拉格朗日乘子λ_i和$n+m$个广义内力.如果将求得的λ_i代入(2.3)，于是我们就能得到无条件的(或完全的)杆系结构的广义变分原理的泛函，这就很自然地建立了如下的

第二变分原理(完全的小变形，线性或非线性，弹性或非弹性杆系结构的广义变分原理——由最小余能原理导出)：满足平衡方程(2.1)及变形连续性条件(2.6)的广义内力x_j的解必然使由(2.3)表示的新泛函L为驻值.

这个变分原理的结果前面已经叙述过了，今再重复陈述如下：第二变分原理能将杆系结构的最小余能原理转换为把分析该结构的基本方程作为新泛函达到驻值的条件的原理.因为方程(2.1)和(2.6)正是求解该结构的基本方程组.

前面的两个变分原理都是以广义内力x_j为未知量的，如果我们以结构的广义变形为未知量，则也可以建立与前述两个变分原理相当的最小势能原理及无条件的(或完全的)杆系结构的广义变分原理的势能形式.

这两个变分原理的证明，只要参看文献[2,3,5]是不难解决的.

这样，由建立广义变分原理所得到的泛函的驻值条件(2.1)和(2.6)就可以分析非线性超静定杆系结构.

三、关于余能函数

现在我们来说明关于余能函数的计算.

当杆件受拉伸或压缩时，对于第j个杆件中，它单位体积的余能(即余能密度)是

$$v_j=\int_0^{\sigma_j}\varepsilon d\sigma \tag{3.1}$$

将(1.1)代入(3.1)进行积分，可得到

$$v_j=\int_0^{\sigma_j}\frac{\sigma_j^2}{B_j^2}d\sigma=\frac{1}{3}\frac{\sigma_j^3}{B_j^2} \tag{3.2}$$

于是一根杆件中的余能函数是

$$V_j=\int_T v_j dT \tag{3.3}$$

其中T是一根杆子的体积。

对整个杆系中的余能函数显然是

$$V=\sum_j V_j \qquad (j=1,2,3,\cdots,n+m) \tag{3.4}$$

若考虑到$\sigma_j=N_j/F_j$，则由(3.2)及(3.3)可得到第 j 根等截面杆件的余能函数

$$V_j=\int_T v_j dT=v_jF_jl_j=\frac{1}{3}\frac{N_j^3l_j}{B_j^2F_j^2} \tag{3.5}$$

其中 F_j，l_j，N_j，B_j分别为第 j根杆件的截面积，杆长，轴向内力，与结构材料弹性性质有关的某个常数。于是对整个杆系，我们有余能函数

$$V=\sum_j V_j=\frac{1}{3}\sum_j\frac{N_j^3l_j}{B_j^2F_j^2} \qquad (j=1,2,3,\cdots,n+m) \tag{3.6}$$

对于矩形截面的受弯杆件，其整个受弯杆系的余能函数，可藉类似于(3.2)～(3.4)式的方法[14]求出如下

$$V=\frac{50}{3}\sum_j\frac{1}{B_j^2b_j^2h_j^5}\int_0^{l_j}M_j^3(x)dx \qquad (j=1,2,3,\cdots,n+m) \tag{3.7}$$

其中 $M_j(x)$为第 j 个杆件中 x 截面上的弯矩，而b_j和h_j分别为第 j 个杆件矩形截面的宽度和高度。

当杆件受扭转时，其整个杆系的余能函数只要利用 (1.2)亦可类似求得为

$$V=\frac{1}{3}\sum_j\beta_j\frac{M_{kj}^3l_j}{C_j^2J_j^2} \qquad (j=1,2,3,\cdots n+m) \tag{3.8}$$

其中β_j是和截面尺寸有关的常数，对于圆形截面

$$\beta_j=(7/8)^2R \tag{3.9}$$

式中 R为圆的半径。系数1/3是为以后计算方便而引入的；J_j，M_{kj}，C_j分别为第 j 根等截面杆件截面的极惯矩、内扭矩和与结构材料弹性性质有关的某个常数。

将(3.6)～(3.8)分别代入(2.7)～(2.9)就依次得到

$$\frac{N_j^2l_j}{B_j^2F_j^2}+\sum_i\lambda_i\frac{\partial Q_i}{\partial N_j}=0 \tag{3.10}$$

$$50\sum_j\frac{1}{B_j^2b_j^2h_j^5}\int_0^{l_j}M_j^2(x)\frac{\partial M_j}{\partial x_j}dx+\sum_i\lambda_i\frac{\partial Q_i}{\partial x_j}=0 \tag{3.11}$$

和

$$\beta_j\frac{M_{kj}^2l_j}{C_j^2J_j^2}+\sum_i\lambda_i\frac{\partial Q_i}{\partial M_{kj}}=0 \qquad (j=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n+m) \tag{3.12}$$

方程组(3.10)～(3.12)是关于广义力x_j的二次函数方程组，所以是非线性的，虽然它们在形式上和线性系统的方程[6~8]极为相似。显然，杆件在受拉伸或压缩时，应用方程组和(2.1)和(3.10)；而在弯曲时应用方程组(2.1)和(3.11)；此外，在扭转时，则应用方程组(2.2)和(3.12)。下面我们将具体地以非线性超静定结构，例如桁架、梁、刚架和扭杆作为广义变分原理在非线性结构分析中应用的例子。

四、实 际 算 例

为了具体说明方程组(2.1)和(3.10)～(3.12)的应用，今举出几个实际算例如下.

例 1 设一结构受力如图1所示，各杆B、F 相同，并且应力-应变关系具有 $\sigma=B\sqrt{\varepsilon}$ 形式，求各杆的内力. 我们取节点 D的垂直平衡条件，按(2.1)我们有

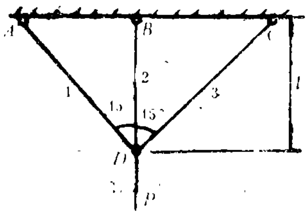

图 1

$$Q=\sum Y=2N_1\cos45°+N_2-P=0$$

即

$$Q=\sqrt{2}N_1+N_2-P=0 \tag{4.1}$$

按(3.10)应有

$$\left.\begin{aligned}&\frac{2\sqrt{2}N_1^2l}{B^2F^2}+\sqrt{2}\lambda=0\\&\frac{N_2^2l}{B^2F^2}+\lambda=0\end{aligned}\right\} \tag{4.2}$$

由(4.2)消去λ得

$$N_2=\sqrt{2}N_1 \tag{4.3}$$

该式相当于用内力表示的变形相容方程.

将(4.3)代入(4.1)得

$$N_1=N_3=\frac{\sqrt{2}}{4}P,\qquad N_2=\frac{1}{2}P \tag{4.4}$$

这问题在线性情形下的解是

$$N_1=N_3=\frac{1}{2}(2-\sqrt{2})P,\qquad N_2=(2-\sqrt{2})P \tag{4.5}$$

例 2 设一结构受力如图 2 所示，其中AC杆为刚性杆，其它各杆B、F、l 均相同，并且应力-应变关系具有$\sigma=B\sqrt{\varepsilon}$的形式，求各杆的内力.

将三根杆截开，取下部作为分离体，设第一杆为压力，第二、第三杆为拉力，可列出如下的独立的平衡方程

$$Q_1=\sum Y=-N_1+N_2+N_3-P=0 \tag{4.6}$$

$$Q_2=\sum M_c=(-2N_1+N_2)a=0 \tag{4.7}$$

按(3.10)应有

$$\left.\begin{aligned}&\frac{N_1^2l}{B^2F^2}-\lambda_1-2\lambda_2=0\\&\frac{N_2^2l}{B^2F^2}+\lambda_1+\lambda_2=0\\&\frac{N_3^2l}{B^2F^2}+\lambda_1=0\end{aligned}\right\} \tag{4.8}$$

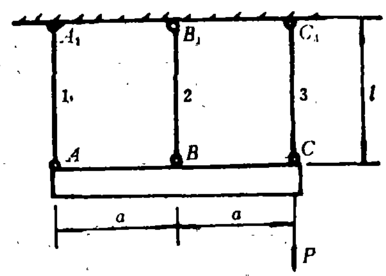

图 2

由(4.8)消去λ_1，λ_2可得

$$N_1^2+2N_2^2-N_3^2=0 \tag{4.9}$$

这个方程相当于用内力表示的变形连续性条件.

将(4.9)代入(4.6)和(4.7)可解得

$$N_1=\frac{1}{4}P(\text{压力}),\ N_2=\frac{1}{2}P,\ N_3=\frac{3}{4}P \tag{4.10}$$

这问题在线性情形下的解是

$$N_1=\frac{1}{6}P(\text{压力}),\ N_2=\frac{1}{3}P,\ N_3=\frac{5}{6}P \tag{4.11}$$

例 3 设一超静定梁，截面为矩形，受力如图 3 所示. 已知: B, b, h, l, q都为常数，其中 q 为均布截荷的集度，应力-应变关系具有 $\sigma=B\sqrt{\varepsilon}$ 的形式，试求支座反力及各截面的弯矩.

本问题按(2.1)可写出两个独立的平衡方程

$$\left.\begin{aligned} Q_1&=\sum Y=A+B-ql=0\\ Q_2&=\sum M_B=Al-\frac{1}{2}ql^2+M_B=0\end{aligned}\right\} \tag{4.12}$$

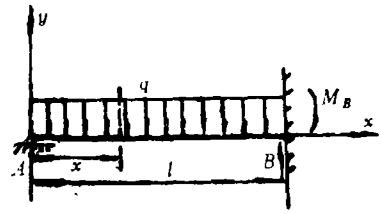

图 3

在任一截面的弯矩是

$$M(x)=Ax-\frac{1}{2}qx^2 \tag{4.13}$$

将上式 (4.13)代入(3.7)积分后，可求出余能函数

$$V=\frac{50l^4}{3B^2b^2h^5}\left(\frac{1}{4}A^3-\frac{3}{10}qlA^2+\frac{1}{8}q^2l^2A-\frac{1}{56}q^3l^3\right) \tag{4.14}$$

按(3.11)应有

$$\left.\begin{aligned} &\frac{50}{B^2b^2h^5}\int_0^l M^2\frac{\partial M}{\partial A}dx+\lambda_1+\lambda_2 l=0\\ &\frac{50}{B^2b^2h^5}\int_0^l M^2\frac{\partial M}{\partial B}dx+\lambda_1=0\\ &\frac{50}{B^2b^2h^5}\int_0^l M^2\frac{\partial M}{\partial M_B}dx+\lambda_2=0\end{aligned}\right\} \tag{4.15}$$

将(4.13)的$M(x)$代入上式，并履行积分，消去λ_1和λ_2可得

$$A=\frac{\sqrt{6}}{6}ql,\quad B=\left(1-\frac{\sqrt{6}}{6}\right)ql,\quad M_B=\frac{1}{2}\left(1-\frac{\sqrt{6}}{3}\right)ql^2 \tag{4.16}$$

于是，该超静定梁的支座反力完全求出，而各截面的弯矩可藉(4.13)求出.

这问题在线性情形下的解答是

$$A=\frac{3}{8}ql,\qquad B=\frac{5}{8}ql,\qquad M_B=\frac{1}{8}ql^2 \tag{4.17}$$

例 4 设有一刚架，截面为矩形，受力如图 4 所示，各个部份的B, b, h都相同，其应力-应变关系具有$\sigma=B\sqrt{\varepsilon}$的形式，试求支座$A$和$B$处的反力及各部份的弯矩.

按(2.1)能写出独立的平衡方程如下

$$\left.\begin{aligned}Q_1&=\sum X=A_H-B_H=0\\Q_2&=\sum Y=A_V-B_V+P=0\\Q_3&=\sum M_C=Pa-A_Vb-B_Hc=0\end{aligned}\right\}\tag{4.18}$$

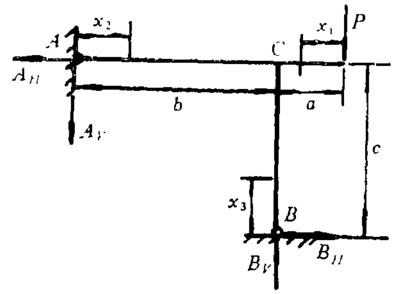

图 4

因我们可写出各部份的弯矩

$$M_1(x_1)=Px_1,\quad M_2(x_2)=A_Vx_2,\quad M_3(x_3)=B_Hx_3\tag{4.19}$$

将上式代入(3.7) 积分后可求出余能函数

$$V=\frac{50}{3B^2b^2h^5}\left\{\int_0^a M_1^3(x_1)dx_1+\int_0^b M_2^3(x_2)dx_2+\int_0^c M_3^3(x_3)dx_3\right\}\tag{4.20}$$

按(3.11)应有

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial V}{\partial A_V}+\lambda_1-b\lambda_3=0\\&\frac{\partial V}{\partial A_H}+\lambda=0\\&\frac{\partial V}{\partial B_V}-\lambda_2=0\\&\frac{\partial V}{\partial B_H}-\lambda_1-c\lambda_3=0\end{aligned}\right\}\tag{4.21}$$

上式中的V由(4.20)计算。将(4.19)代入(4.20)和(4.21)进行积分，再由(4.21)消去各λ，可得

$$A_V=\frac{c}{b}\sqrt{\frac{c}{b}}B_H\tag{4.22}$$

上面(4.22)式相当于用支座反力表示的变形相容条件。

将(4.22)代入(4.18)可求出

$$\left.\begin{aligned}A_H&=B_H=\frac{a}{c}\,\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}P\\A_V&=\frac{a}{b}\,\frac{\sqrt{c}}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}P\\B_V&=\left(\frac{a}{b}\,\frac{\sqrt{c}}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}+1\right)P\end{aligned}\right\}\tag{4.23}$$

于是该刚架结构的全部支座反力被求出，而各部份的弯矩可藉(4.19)亦完全可以得到。

这问题在线性情形下的解答是

$$\left.\begin{aligned}A_H&=B_H=\frac{a}{c}\,\frac{b}{b+c}P\\A_V&=\frac{a}{b}\,\frac{c}{b+c}P\\B_V&=\left(\frac{a}{b}\,\frac{c}{b+c}+1\right)P\end{aligned}\right\}\tag{4.24}$$

例 5 设有一受扭矩 M_0 作用而扭转的超静定圆杆，其半径为R，如图 5 所示，两段的截面积及材料均相同，其剪应力-剪应变的关系具有 $\tau=C\sqrt{\gamma}$ 的形式，试求各段杆内的扭矩。

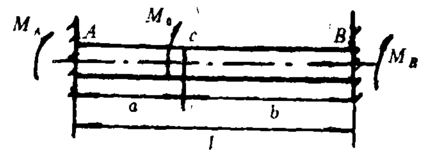

图 5

我们对杆轴取力矩平衡条件，并假设诸扭矩都具有相同的方向，按(2.1)有

$$Q=\sum M_{AB}=M_A+M_B+M_0=0 \tag{4.25}$$

按(3.12)有

$$\left.\begin{aligned}\beta\frac{M_A^2 a}{C^2J^2}+\lambda=0\\ \beta\frac{M_B^2 b}{C^2J^2}+\lambda=0\end{aligned}\right\} \tag{4.26}$$

由(4.26)消去 λ 可得

$$M_A^2a=M_B^2b$$

或

$$M_A=\sqrt{\frac{b}{a}}M_B \tag{4.27}$$

上式等价于用内扭矩表示的变形谐调条件.

由(4.25)及(4.27)可解出

$$\left.\begin{aligned}M_A=-\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}M_0\\ M_B=-\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}M_0\end{aligned}\right\} \tag{4.28}$$

这问题在线性情形下的解答是

$$M_A=-\frac{b}{a+b}M_0,\qquad M_B=-\frac{a}{a+b}M_0 \tag{4.29}$$

M_A和M_B前的负号说明这些扭矩的方向应和M_0相反，这和实际的平衡条件是相符合的.

如果设$b=2a$，则对于物理非线性情形，我们将有

$$M_A=\sqrt{2}M_B \tag{4.30}$$

从而可得

$$M_A=-(2-\sqrt{2})M_0,\qquad M_B=-(\sqrt{2}-1)M_0 \tag{4.31}$$

而对于线性的情形，则有

$$M_A=2M_B \tag{4.32}$$

这式子也等效于用内扭矩表示的变形相容条件.

此外，由(4.25)和(4.32)我们可得到

$$M_A=-\frac{2}{3}M_0,\qquad M_B=-\frac{1}{3}M_0 \tag{4.33}$$

这正是在线性情形下$b=2a$时问题的解答.

五、结 束 语

综上所述及结合所举的几个简单例子可看出：通过用拉格朗日乘子法去求结构系统的余能函数的极值的方法建立起来的线性或非线性，弹性或非弹性杆系结构的完全的广义变分原理可以分析物理非线性超静定结构．在运算中不必考虑变形连续性条件，因为从变分方程(2.4)或方程组(2.6)或稍后的(3.10)～(3.12)的实际计算结果可知，结构的变形连续性条件会自动地得到满足．在目前的讨论中，最重要的事是只要给出结构的物理方程或应力-应变曲线，不论结构是线性或非线性，弹性或非弹性，我们总能对结构进行分析．

参 考 文 献

[1] 钱伟长，《关于弹性力学的广义变分原理及其在板壳问题上的应用》，科学出版社(1964)．

[2] 钱伟长，弹性理论中广义变分原理的研究及其在有限元计算中的应用，力学与实践，1(1)(1979)，16—24及1(2)(1979)，18—27．

[3] 钱伟长，《变分法及有限元》(上册)，科学出版社(1980)．

[4] 钱伟长，拉氏乘子法，高阶拉氏乘子法和弹性理论中更一般的广义变分原理，应用数学和力学，4(2)(1983)．

[5] 钱伟长，《广义变分原理》，知识出版社(1985)．

[6] 成祥生，待定乘数法在解超静定杆系结构问题中的应用，江苏省力学会论文(1964)．

[7] 成祥生，材料力学中某些超静定结构的一种解法，力学与实践，1(1)(1979)，46—47．

[8] 成祥生，结构分析中的广义变分原理及其应用，应用数学和力学，6(7)(1985)，639—646．

[9] Washizu, K.,(鹫津久一郎)，*Variational Method in Elasticity and Plasticity*, Pergaman, London (1968).

[10] 鹫津久一郎，《エネルヂ原理入门》，培风馆(1970)．

[11] Pian, T.H.(卞学璜)，Tong Pin (董平)，Finite element methods in continuum mechanics, *Adv. in App. Mec.*, 12(1972), 1—53.

[12] 薛大为，建议一组关于极限分析的定理，科学通报，20(4)(1975)，81．

[13] Фихтенгольц Г. М., *Курс Дифференциального и Интегрального Исчисления*, Т. I, Гостехиздат. М.Л. (1949).

[14] Timoshenko, S. and J. Gere, *Mechanics of Materials*, Van Nostrand Reinhold Company, (1972).

[15] Engesser, F., Über Statisch Unbestimmte Träger bei Beliebigem Formanderungs-Gesetze und über den Satz von der Kleinsten Ergänzungsarbeit, *Zeitschrift des Architekten-und Ingenienr-Vereins zu Hannover*, Band 35, (1889), 733—744.

[16] Westergaard, H.M., On the method of complementary energy and its applications to structures stressed beyond the proportional limit to buckling and vibrations, and to suspension bridges, *Proceedings of the ASCE*, 67(2) (1941), 199.

[17] Westgaard, H.M., On the method of complementary energy, *Trans. of ASCE*, 107(1942), 765—793.

[18] 钱令希，余能原理，中国科学，1(1950)449．

[19] Charlton, T.M., Analysis of statically-indeterminate structures by the complementary energy method, *Engineering*, 174(1952), 389—391.

[20] Brown, E. H., The energy theorems of structural analysis, *Engineering*, 179 (1955), 302—308, 339—342, 400—403.

[21] Hoff, N.J., *The Analysis of Structures*, John Wiley and Sons, Inc., New York, (1956), 493.

[22] Argyris, J. H., S. Kelsey, *Energy Theorems and Structural Analysis*, Butterworth and Co., Ltd., London, (1960)85.

[23] Langhaar, H, L., *Energy Methods in Applied Mechanics*, John Wiley and Sons, Inc., New York, (1962), 350.

[24] Au, T., *Elementary Structnral Mechanics*, (1963), 521.

[25] Libove, C., Complementary energy method for finite deformations, *Pro. of ASCE, Jour. of Engi. Mech. Divi.* 90, EM6(1964)49—71.

[26] Oran, C., Complementary energy methods for buckling, *Pro. of ASCE, Jour.of EMD.*, 93, EM1(1967), 57—75.

[27] Oden, J.T., *Mechanics of Elastic Structures* (1967), 381.

[28] Oran,C., Complementary energy concept for large deformations, *Proc. of ASCE Jour. of Struc. Divi.* 93, ST1(1967), 57—75.

The Generalized Variational Principles in Applications for Nonlinear Structural Analysis

Cheng Xiang-sheng

(Tongji University, Shanghai)

Abstract

This paper discusses the generalized variational principles founded by the technique of Lagrangian multipliers in structural mechanics and analyzes the nonlinear statically indeterminate structures. It is assumed that the stress-strain relationship of the materials of structures has the form of $\sigma=B\varepsilon^{1/m}$ or $\tau=c\gamma^{1/m}$, namely, the physical equations of structures which have the shape of exponential functions. Several examples are given to illustrate the statically indeterminate structures such as the trusses, beams, frames and torisonal bars.

Key words generalized variational principle, nonlinear structnres, statically indeterminate structures