应用数学和力学，第14卷第 5 期(1993年 5 月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

直线爆炸所形成的柱面波的近似分析解*

袁 镒 吾

（中南工业大学，1989年10月18日收到）

摘　要

由直线爆炸所形成的柱面波，文献[1]得到了数值解。本文对于绝热指数 $\gamma=C_p/C_v$ 较大的情形，取$\varepsilon=1/\gamma^2$为小参数，用伸缩坐标法得到了问题的一级近似分析解。算例($\gamma=3$)表明，近似解与准确解（数值解）十分符合。

关键词　爆轰波　奇异摄动法　绝热指数

一、问题的提法

设初始压力及密度分别为 $P_0=0$（即不计反压）及 $\rho_0=\text{const}$，运动是等熵的。兹研究与对称轴垂直的平面上的问题，在这平面上引极坐标 r 及 φ，原点为此平面与对称轴的交点。

状态方程为　　$P=A\rho^\gamma$

式中 P——压力，ρ——密度，A——任意常数。已知音速 C，即可按下式决定 P 及 ρ

$$\rho=\left(\frac{C^2}{A\gamma}\right)^{1/(\gamma-1)},\quad P=A\left(\frac{C^2}{A\gamma}\right)^{\gamma/(\gamma-1)} \tag{1.1}$$

在波阵面上的函数应满足

$$\rho_1 D=\rho_2(D-u_2),\quad \rho_1 D^2=\rho_2(D-u_2)^2+P_2,\quad D=u_2+C \tag{1.2}$$

式中 D——爆轰波的传播速度，u——爆轰产物的速度，标号“1”表示波前的参量，标号“2”表示波后的参量。

运动是自型的，故所有流体动力学量均是$\zeta=r/t$的函数。将气体动力学方程中的变量改为 ζ 后得[1]

$$\left[\frac{(\zeta-u)^2}{C^2}-1\right]\frac{du}{d\zeta}=\frac{u}{\zeta},\quad (\zeta-u)\frac{du}{d\zeta}=\frac{2C}{\gamma-1}\frac{dC}{d\zeta} \tag{1.3}$$

由式(1.2)得在爆轰波上的条件为

$$\zeta=D=(1+\gamma)R,\quad u=R,\quad C=\gamma R \tag{1.4}$$

这里　　$R=\{A\gamma^{-\gamma}[(1+\gamma)\rho_1]^{\gamma-1}\}^{1/2}$

引入变量变换　　$u=Ru^*$，$\zeta=R\zeta^*$，$C=RC^*$　　(1.5)

式(1.4)便变为　　$u^*=1$，$\zeta^*=\gamma+1$，$C^*=\gamma$　　(1.6)

而式(1.3)的形式不变。

故问题归结为求式(1.3)及(1.6)的解。以下，我们略去标号“*”。

---

* 钱伟长推荐。

二、一级近似解

我们发现，在波阵面上，即$u=1$，$\zeta=\gamma+1$及$C=\gamma$时，由式(1.3)得$du/d\zeta=\infty$及$dC/d\zeta=\infty$，即在波阵面附近，u及C均随ζ激烈变化，因此，我们把自变量放大，以描述这种剧烈的变化，即令 $\zeta=(\gamma+1)-\varepsilon x$ (2.1)

式中x为新的自变量，ε为小参数，则有

$$\frac{du}{d\zeta}=-\frac{1}{\varepsilon}\frac{du}{dx},\quad \frac{dC}{d\zeta}=-\frac{1}{\varepsilon}\frac{dC}{dx} \tag{2.2}$$

令 $$u=1+\varepsilon u_1+\varepsilon^2 u_2+\cdots,\quad C=\gamma+\varepsilon C_1+\varepsilon^2 C_2+\cdots \tag{2.3}$$

并设 $$x=0\text{时},\ u_1=u_2=\cdots=0,\quad C_1=C_2=\cdots=0 \tag{2.4}$$

将式(2.1)～(2.4)代入式(1.3)，略去$O(\varepsilon^2)$，我们得

$$\begin{cases}\left[\dfrac{\gamma^2-2\varepsilon\gamma x-2\varepsilon\gamma u_1}{\gamma^2+2\varepsilon\gamma C_1}-1\right]\left(-\dfrac{du_1}{dx}\right)=\dfrac{1+\varepsilon u_1}{\gamma+1-\varepsilon x} & (2.5)\\[2ex] (\gamma-\varepsilon x-\varepsilon u_1)\dfrac{du_1}{dx}=\dfrac{2}{\gamma-1}(\gamma+\varepsilon C_1)\dfrac{dC_1}{dx} & (2.6)\end{cases}$$

设$\gamma\gg 1$，令$\varepsilon=1/\gamma^2$ (2.7)

根据γ甚大这一特点，我们将进一步简化式(2.5)及(2.6)。将式(2.7)代入式(2.5)得

$$\frac{2(x+u_1+C_1)}{1+2\varepsilon^{3/2}C_1}\cdot\frac{du_1}{dx}=\frac{\varepsilon^{-1}+u_1}{1+\varepsilon^{1/2}-\varepsilon^{3/2}x}$$

略去$O(\varepsilon^{3/2})$得 $$2(x+u_1+C_1)(du_1/dx)=(1+\varepsilon u_1)/(\varepsilon+\varepsilon^{3/2}) \tag{2.8}$$

将式(2.7)代入式(2.6)得

$$(\varepsilon^{-1/2}-\varepsilon x-\varepsilon u_1)du_1/dx=\frac{2}{\varepsilon^{-1/2}-1}(\varepsilon^{-1/2}+\varepsilon C_1)\frac{dC_1}{dx}$$

即 $$(1-\varepsilon^{3/2}x-\varepsilon^{3/2}u_1)\frac{du_1}{dx}=\frac{2\varepsilon^{1/2}}{1-\varepsilon^{1/2}}(1+\varepsilon^{3/2}C_1)dC_1/dx$$

略去$O(\varepsilon^{3/2})$得 $$\frac{du_1}{dx}=\frac{2\varepsilon^{1/2}}{1-\varepsilon^{1/2}}\cdot\frac{dC_1}{dx} \tag{2.9}$$

由式(2.7)及(2.9)得$u_1=\dfrac{2}{\gamma-1}C_1+k$

式中k为积分常数。由式(2.4)有$C_1=0$时，$u_1=0$故$k=0$，而有

$$u_1=\frac{2}{\gamma-1}C_1 \tag{2.10}$$

将式(2.10)代入式(2.8)得

$$2\left(x+\frac{\gamma+1}{2}u_1\right)\frac{du_1}{dx}=\frac{\gamma^3+\gamma u_1}{\gamma+1}$$

即 $$x=F\left(u_1,\ \frac{du_1}{dx}\right)=\frac{\gamma^3+\gamma u_1}{2(\gamma+1)}\Big/\frac{du_1}{dx}-\frac{\gamma+1}{2}u_1 \tag{2.11}$$

故问题归结为求解式(2.10)及(2.11)，边界条件由式(2.4)为

$$x=0\text{时},\ u_1=C_1=0$$

令 $$P=du_1/dx \tag{2.12}$$

将式(2.11)两边对x求导，并利用

$$\frac{d^2u_1}{dx^2}=P\frac{dP}{du_1}$$

得

$$\left(P\frac{\partial F}{\partial u_1}-1\right)du_1+P\left(\frac{\partial F}{\partial P}\right)dP=0$$

即

$$\left[\frac{\gamma}{2(\gamma+1)}-\frac{\gamma+1}{2}P-1\right]du_1-\frac{\gamma^3+\gamma u_1}{2(\gamma+1)P}dP=0$$

积分得 $$(\gamma^3+\gamma u_1)^{(\gamma+2)/\gamma}=\frac{\gamma+2+(\gamma+1)^2P}{P}k_1$$

式中k_1为积分常数，由上式求得P后代入式(2.11)得

$$x=\frac{\gamma^3+\gamma u_1}{2(\gamma+1)}\frac{[(\gamma^3+\gamma u_1)^{(\gamma+2)/\gamma}-k_1(\gamma+1)^2]}{(\gamma+2)k_1}-\frac{\gamma+1}{2}u_1 \qquad (2.13)$$

由边界条件(2.4)得 $$k_1=\frac{\gamma^{3(\gamma+2)/\gamma}}{(\gamma+1)^2} \qquad (2.14)$$

由式(2.1)，(2.13)及(2.14)得

$$\zeta=(\gamma+1)-\frac{(\gamma+1)(\gamma^3+\gamma u_1)}{2(\gamma+2)}\cdot\gamma^{-3(\gamma+2)/\gamma-2}[\gamma^3+\gamma u_1)^{(\gamma+2)/\gamma}-\gamma^{3(\gamma+2)/\gamma}]+\frac{\gamma+1}{2\gamma^2}u_1 \qquad (2.15)$$

最后得当$\gamma\gg1$时，式(1.3)及(1.6)的一级近似解为

$$u=1+\frac{u_1}{\gamma^2},\ C=\gamma+\frac{C_1}{\gamma^2}=\gamma+\frac{1}{\gamma^2}\cdot\frac{\gamma-1}{2}\cdot u_1 \qquad (2.16)\sim(2.17)$$

式中$u_1(\zeta)$由式(2.15)决定。

三、算　例 ($\gamma=3$)

工程中的炮轰问题，常有$\gamma=3$。将$\gamma=3$代入式(2.15)，(2.16)及(2.17)得

$$\zeta=4-1.829\times10^{-4}(27+3u_1)\times[(27+3u_1)^{1.6667}-243]+2u_1/9 \qquad (3.1)$$

$$u=1+u_1/9,\ C=3+u_1/9 \qquad (3.2)\sim(3.3)$$

为了检验式(3.1)～(3.3)的准确程度，我们需要对方程组(1.3)及(1.6)进行数值积分。这个工作已由Баничук[1]在电子计算机ЭВМ上完成，但未公布结果。为此，我们不得不重复这一工作。

第二段已经提到，在波阵面上，由式(1.3)有$du/d\zeta=\infty$及$dC/d\zeta=\infty$，即出现奇性，求式(1.3)及(1.6)的数值解时会遇到困难。

因此，我们不用$u=1$，$C=3$及$\zeta=4$作为数值计算的初值，而是按照文献[1]提出的适用于爆轰波面附近的公式

$$\zeta=(\gamma+1)-(\gamma+1)^2(u-1)^2/(2\gamma),\ C=\gamma+(\gamma-1)(u-1)/2 \qquad (3.4)\sim(3.5)$$

选择一个稍许偏离奇点的初值，即选取

$$\zeta=3.999,\ u=0.980635,\ C=2.980635 \qquad (3.6)$$

作为对式(1.3)求数值解时的初值。

选取$\gamma=3$，式(1.3)及(3.6)的数值解和本文的一级近似解，式(3.1)～(3.3)的比较见图1及图2。图中实曲线表示数值解；虚线表示本文一级近似解。由图1及图2可见，数值解（准确解）与本文近似解十分符合，C值较u值且符合得更好些。

必须指出，本文为一级近似解，故对于过份远离爆轰波面的区域，例如，$\zeta\leqslant 2$ 时，式(3.1)～(3.3)不能适用。事实上，由式(3.1)及(3.2)知，当$\zeta=2$时，$u=0$。但实际上，由于不计反压，式(1.3)本身也是不适用于过份远离爆轰波的区域的。

本文数值计算由唐献良及李国才同志在 TQ—16 电子计算机上完成（稍后，作者又在 Acos—77—400电子计算机上作过核算），作者深表谢意。

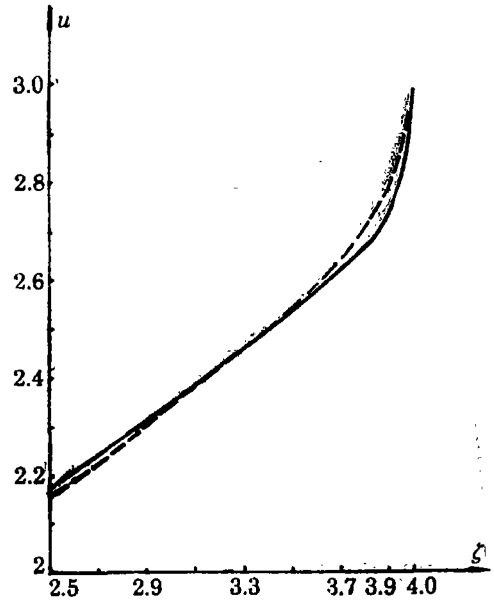

图 1

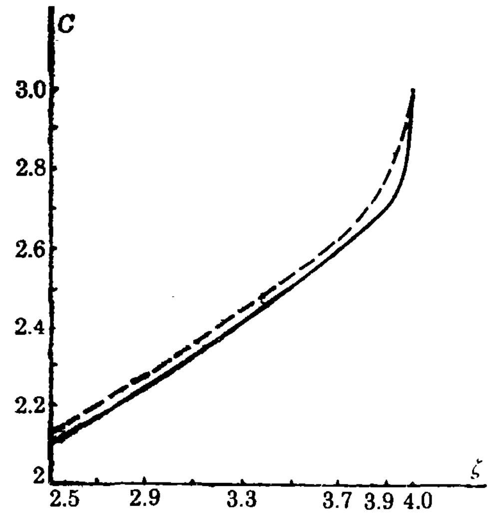

图 2

参 考 文 献

[1] Баничук Н. В., *ПМТФ*, 5(1969), 123—124.
[2] 钱伟长主编，《奇异摄动理论及其在力学中的应用》，科学出版社(1981).

An Approximate Analytical Solution of the Cylindrical Detonation Wave Generated by the Linear Explosion

Yuan Yi-wu

(Central South University of Technology, Changsha)

Abstract

The solution of the cylindrical detonation wave generated by the linear explosion was obtained by numerical method in [1]

In this paper, when the ratio of specific heat $\gamma\gg 1$, by using the enlargement coordinate method, the first-order analytical solutions are obtained. The perturbation parameter is $\varepsilon=1/\gamma^2$. The correction of these solutions is checked at the end of this paper.

Key words detonation wave, singular perturbation method, ratio of specific heat