在Schwarzchild场中测试粒子的向量运动方程的新推导

余燊 谭珠迪 林汝耀 李华灿

（香港理工学院应用数学系，1992年8月3日收到）

摘要

文中给出在Schwarzchild场中一测试粒子的向量运动方程的新推导，从而大大地简化了Murray[1]所作同一问题的推导步骤.

关键词 向量运动方程 Schwarzchild场

一、绪言

爱因斯坦广义相对论中推测的三个"经典测试"，一般来说，是从一测试粒子之标量运动方程的Schwarzchild解中获得的. Murray[1]曾推导过测试粒子在Schwarzchild场中的向量运动方程，它的优点类似于牛顿力学中的向量运动方程能给出整体而深入的几何概念. 举一个实例，我们欲研究在两个不同轨道平面而环绕一个中心吸引物体的测试粒子的相对运动时，其向量方程不但能提供清淅的几何景像，更能方便寻求其推导结果. 可惜上面提到的Murray[1]发表的向量运动方程的推导颇为长而繁琐，其推导过程足达三页纸之多. 在此，我们将发表一个简单直接的方法来推导得出上述同样的结果.

二、在Schwarzchild场中向量方程的推导

不失一般性，处于Schwarzchild场中赤道平面$\theta=\pi/2$的Lagrangian $\mathscr{L}$是（参见Straumann[2]）

$$2\mathscr{L}=(1-2m/r)\dot{t}^2-\dot{r}^2/(1-2m/r)-r^2\dot{\phi}^2 \tag{2.1}$$

上式中之"点"表示对标准时间的导数，ϕ和t是循环函数. 由Lagrange方程

$$-\partial\mathscr{L}/\partial\dot{\phi}=r^2\dot{\phi}=\text{const}=H \tag{2.2}$$

和

$$\partial\mathscr{L}/\partial\dot{t}=\dot{t}(1-2m/r)=\text{const}=E \tag{2.3}$$

把式(2.2)和(2.3)代入(2.1)得出

$$\dot{\boldsymbol{r}}^2/2+V(r)=E^2-1 \tag{2.4}$$

式中

$$\dot{\boldsymbol{r}}^2=\dot{r}^2+r^2\dot{\phi}^2 \tag{2.5a}$$

$$V(r)=-(2m/r+mH^2/r^3) \tag{2.5b}$$

由于$d(2.4)/ds\Rightarrow$

$$d\boldsymbol{v}/ds+\partial v/\partial \boldsymbol{r}=0;\quad \boldsymbol{v}=\dot{\boldsymbol{r}} \tag{2.6}$$

即

$$d\boldsymbol{v}/ds+(m/r^3)(1+3H^2/r^2)\boldsymbol{r}=0 \tag{2.7}$$

这便得出我们所需的向量运动方程。

三、评 论

Carmeli[3]曾采用过一个烦复的推导方法去寻求 Schwarzchild 场的近似向量运动方程。他依据度规张量的“第一近似”得出的近似运动方程为

$$\ddot{\boldsymbol{r}}-m\nabla\frac{1}{r}=2m\left[\dot{\boldsymbol{r}}^2\nabla\frac{1}{r}-\frac{m}{r}\nabla\frac{1}{r}-\left(\dot{\boldsymbol{r}}\cdot\nabla\frac{1}{r}\right)\dot{\boldsymbol{r}}+\frac{3}{2r^5}(\boldsymbol{r}\cdot\dot{\boldsymbol{r}})^2\boldsymbol{r}\right] \tag{3.1}$$

式中的“点”表坐标的时间导数。

参照坐标时间和利用式(2.3)，精确方程(2.7)能另外地给出一个简单的运动方程式

$$\ddot{\boldsymbol{r}}-\frac{2m\dot{r}}{r^2(1-2m/r)}\dot{\boldsymbol{r}}+\frac{m}{E^2}\left(1-\frac{2m}{r}\right)^2\left(1+\frac{3H^2}{r^2}\right)\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}=0 \tag{3.2}$$

式(3.1)乘以向量$\boldsymbol{r}$，能得出近似的“角动量守恒定律”

$$\boldsymbol{r}\wedge d\boldsymbol{r}/dt=\boldsymbol{H}_0\exp[-2m/r] \tag{3.3}$$

若将式(2.7)乘以向量$\boldsymbol{r}$ 又得到

$$\boldsymbol{r}\wedge d\boldsymbol{r}/ds=\boldsymbol{H}_0=\text{const} \tag{3.4}$$

综合算式(2.3)和(3.4)，我们能获得

$$\boldsymbol{r}\wedge d\boldsymbol{r}/dt=\boldsymbol{H}_0(1-2m/r) \tag{3.5}$$

在轨道上如取$E=1$，在“第一近似”时，公式(3.3)和(3.5)是一致的。但为获得这近似结果所付出的代价未免过大了。

参 考 文 献

[1] Murray, C. A., *Vectorial Astrometry*, Adam Hilgar Ltd., Bristol (1983).

[2] Straumann, *General Relativity and Relativistic Astrophysics*, Springer-Verlag (1991).

[3] Carmeli, M., *Classical Fields*, J. Wiley (1982).

A New Derivation of the Vectorial Equation of Motion for a Test Particle in the Schwarzchild Field

Alfred Yu (Yu Xin) J. Hong Y.Y. Lam W. T. Lee

(Department of Applied Mathematics, Hong Kong Polytechnic, Hong Kong)

Abstract

A new derivation of the vectorial equation of motion for a test particle in the Schwarzschild field is given which greatly simplifies the procedure given by C. A. Murray[1].

Key words vectorial equation of motion, Schwarzschild field