

偏心裂纹与边裂纹柱扭转的应力强度因子*

陈卫江 王 凯 汤任基

(兰州大学) (南通职大) (上海交通大学)

(1992年2月10日收到)

摘 要

本文利用单裂纹解, 将裂纹的不连续解分离, 然后使用常规的调和函数解, 使带有偏心裂纹或边裂纹的柱体扭转问题, 归为解一组混合型积分方程, 这组方程可联合使用奇异积分方程数值法与边界元法进行求解。文中对若干典型的裂纹柱体作了数值计算, 得到了柱体的抗扭刚度和裂纹端点的应力强度因子。

关键词 柱体扭转 偏心裂纹 边界裂纹 奇异积分方程 边界元法 应力强度因子

一、柱体扭转问题的基本关系

由文献[1], 图1中仅由 Γ 围成的无裂纹柱体截面 Ω 中的位移可表为:

$$u = -\alpha zy, \quad v = \alpha zx, \quad w = \alpha \varphi(x, y) \quad (1.1)$$

式中 α 为柱体单位长度的相对扭转角, $\varphi(x, y)$ 为柱体横截面的翘曲函数。

柱体中的非零应力分量为:

$$\tau_{xz} = \alpha \mu \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} - y \right), \quad \tau_{zy} = \alpha \mu \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} + x \right) \quad (1.2)$$

式中 μ 为剪切弹性模量。将(1.2)代入平衡方程, 可得 $\varphi(x, y)$ 满足以下调和方程

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \varphi(x, y) = 0 \quad (1.3)$$

若假设柱体侧面自由, 则 $\varphi(x, y)$ 在 Γ 上满足

$$\frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial n} = y \cos(n, x) - x \cos(n, y) \quad (1.4)$$

式中 n 为边界 Γ 的外法向, $\cos(n, x)$ 和 $\cos(n, y)$ 为方向余弦。至此, 问题归结为在 Ω 上求解一个Neumann问题。

柱体的抗扭刚度由下式确定

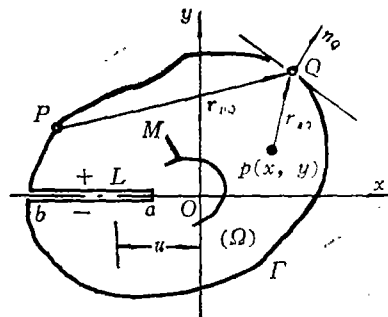


图 1

* 国家教委博士点基金资助项目

$$D = \frac{M}{\alpha\mu} = \iint_{\Omega} \left(x^2 + y^2 + x \frac{\partial \varphi}{\partial y} - y \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) dx dy \quad (1.5)$$

式中 M 为作用柱端的扭矩。

二、带裂纹柱体扭转的积分方程

为便于推导问题的积分方程，我们首先给出两个基本解：

a) 单裂纹基本解

扭转情形下，单裂纹基本解由文[2]给出：

$$\varphi_1(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_a^b \arctan \frac{yu}{x^2 + y^2 + xu} f(u) du \quad (2.1)$$

式中 $f(u)$ 为翘曲位错密度函数，定义为：

$$f(u) = -\frac{1}{2\alpha} \frac{\partial}{\partial u} [w(u_1 + 0) - w(u_1 - 0)] \quad (2.2)$$

故该解答可理解为由裂纹产生的不连续解，另外对于内裂纹情形，则成立位移单值条件：

$$\int_a^b f(u) du = 0 \quad (2.3)$$

本文还将解决边界裂纹的问题，此时将提出相应的力学补充条件。

b) 调和函数解

由文献[3]，无裂纹时，域 Ω 中的调和函数可表为：

$$\varphi_2(p) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \left[\varphi_2(Q) \frac{\partial \ln r_{pQ}}{\partial n_Q} - \frac{\partial \varphi_2(Q)}{\partial n_Q} \ln r_{pQ} \right] d\Gamma(Q) \quad (2.4)$$

式中 $p \in \Omega$ ， n_Q 为 Q 点的外法向， r_{pQ} 为：

$$r_{pQ} = \sqrt{(x_p - x_Q)^2 + (y_p - y_Q)^2} \quad (2.5)$$

若令 $p \rightarrow P \in \Gamma$ ，则可得无裂纹问题的常规边界积分方程，对于 Neumann 问题，式(2.3)中的法向导数 $\partial \varphi_2(Q) / \partial n_Q$ 是已知的，而另一量 $\varphi_2(Q)$ 则由边界 Γ 上的条件确定。

对于带有单根边界裂纹柱体的扭转问题，我们可利用上述两个基本解表示柱的翘曲函数

$$\begin{aligned} \varphi(x, y) = \varphi_1(x, y) + \varphi_2(x, y) = & \frac{1}{\pi} \int_a^b \arctan \frac{yu}{x^2 + y^2 + xu} f(u) du \\ & + \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \left[\varphi_2(Q) \frac{\partial \ln r_{pQ}}{\partial n_Q} - \frac{\partial \varphi_2(Q)}{\partial n_Q} \ln r_{pQ} \right] d\Gamma(Q) \end{aligned} \quad (2.6)$$

式中 $f(u)$ 为裂纹线上的翘曲位错密度函数，由侧边界自由的条件(1.4)和裂纹表面自由的条件，从(2.6)出发，我们得到如下的混合型积分方程组：

$$\int_{\Gamma} K_{11}(P, Q) \varphi_2(Q) d\Gamma(Q) - \pi \varphi_2(Q) + \frac{1}{\pi} \int_a^b K_{12}(P, u) f(u) du = R_1(P), \quad P \in \Gamma \quad (2.7)$$

$$\int_{\Gamma} K_{21}(Q, \eta) \varphi_2(Q) d\Gamma(Q) + \frac{1}{\pi} \int_a^b \left[\frac{1}{u - \eta} + K_{22}(u, \eta) \right] f(u) du = R_2(\eta), \quad \eta \in L \quad (2.8)$$

其中的积分核和非齐次项分别为：

$$K_{11}(P, Q) = \frac{(x_Q - x_P)\cos(n_Q, x) + (y_Q - y_P)\cos(u_Q, y)}{(x_P - x_Q)^2 + (y_P - y_Q)^2} \quad (2.9)$$

$$K_{12}(P, u) = \int_{\Gamma} \frac{u(x_0^2 + y_0^2 + x_0 u - 2y_0^2)\cos(n_Q, y) - u(2x_0 + u)y_0\cos(n_Q, x)}{(x_0^2 + y_0^2 + x_0 u)^2 + (y_0 u)^2} \ln r_{PQ} d\Gamma(Q) \quad (2.10)$$

$$K_{21}(Q, \eta) = -\frac{1}{\pi} \left\{ \frac{(x_Q + \eta)y_0\cos(n_Q, x) + y_0^2\cos(n_Q, y)}{[(\eta + x_Q)^2 + y_0^2]^2} - \frac{\cos(n_Q, y)}{2[(\eta + x_Q)^2 + y_0^2]} \right\} \quad (2.11)$$

$$K_{22}(u, \eta) = \frac{1}{\eta} + \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \frac{[(x_0^2 + x_0 u - y_0^2)\cos(n_Q, y) - (2x_0 + u)y_0\cos(n_Q, x)]y_0 u}{[(x_0^2 + y_0^2 + x_0 u)^2 + (y_0 u)^2][(\eta + x_Q)^2 + y_0^2]} d\Gamma(Q) \quad (2.12)$$

$$R_1(P) = \int_{\Gamma} [y_0\cos(n_Q, x) - x_0\cos(n_Q, y)] \ln r_{PQ} d\Gamma(Q) \quad (2.13)$$

$$R_2(\eta) = -\eta + \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \frac{y_0[y_0\cos(n_Q, x) - x_0\cos(n_Q, y)]}{(\eta + x_Q)^2 + y_0^2} d\Gamma(Q) \quad (2.14)$$

以上积分方程组的求解，还需裂纹的一个补充条件。若裂纹为内裂纹，则此补充条件应取先前指出的(2.3)方程，若裂纹为边裂纹，设**b**端是裂纹在边界的开口端，则此端的应力强度因子为零，故其补充条件取为：

$$K_{\mathbf{I}}(b) = 0 \quad (2.15)$$

所以，对于内裂纹，则应联立求解(2.7)、(2.8)及(2.3)方程，对于边界裂纹，则应联立求解(2.7)、(2.8)和(2.15)方程，在求得未知函数*f(u)*和 $\varphi_2(Q)$ 后，再将其回代，即得柱体的扭曲函数 $\varphi(x, y)$ ，因而问题获得解决。

三、抗扭刚度与应力强度因子

柱的抗扭刚度*D*可按前面给出的(1.5)公式计算，对于图1所示的单裂纹柱体，由于函数 $\varphi(x, y)$ 在裂纹*L*上间断，因而在使用Green公式后可按以下公式计算：

$$D = \mu \left[\frac{1}{3} \int_{\Gamma} x^2 dy - y^2 dx - \int_{\Gamma} \varphi(x, y) \cdot (x dx + y dy) - \int_a^b (b^2 - u^2) f(u) du \right] \quad (3.1)$$

裂纹端点的应力强度因子则按以下公式计算^[2]：

$$K_{\mathbf{I}}(a) = \alpha \mu \lim_{r \rightarrow a^+} \sqrt{2(r-a)} f(r) \quad (3.2)$$

$$K_{\mathbf{I}}(b) = -\alpha \mu \lim_{r \rightarrow b^-} \sqrt{2(b-r)} f(r) \quad (3.3)$$

四、数值例子

积分方程组(2.7)、(2.8)、(2.3)或(2.7)、(2.8)、(2.15)与文[4]中给出的完全类似，因而可使用该文介绍的联合使用奇异积分方程数值法与边界元法进行求解。由于篇幅的限制，这里不再作这方面的介绍。下面给出本文获得的若干典型例子的数值结果，中心裂纹的结果已由文[5]给出。

例1 偏心裂纹与边裂纹矩形柱的扭转

柱的几何形状及有关的参数见图2(a)所示。记柱的无量纲抗扭刚度为

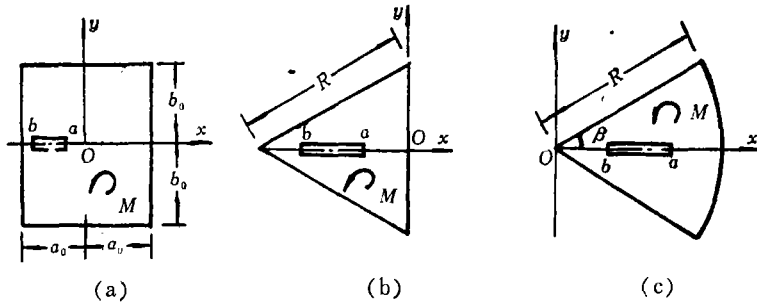


图 2

$$D^* = D / (16a_0^3 b_0)$$

裂纹端点a和b的无量纲应力强度因子为

$$K_{II}^*(a) = |K_{II}(a)| / (\alpha \mu D^* b_0 \sqrt{c}), \quad K_{II}^*(b) = |K_{II}(b)| / (\alpha \mu D^* b_0 \sqrt{c})$$

其中 $c = (b - a) / 2$ 为裂纹半长。数值计算分为偏心裂纹和边界裂纹两种情形，前者为裂纹中心不在原点的内裂纹，而后者则是裂纹端点b正好与边界接触。以上两种情形的数值结果分别列于表1和表2：

表1 偏心裂纹无量纲 D^* , $K_{II}^*(a)$ 和 $K_{II}^*(b)$ 随 b_0/a_0 的变化 ($d/a_0 = 0.1, c/a_0 = 0.5, d = (b+a)/2$)

b_0/a_0	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0
D^*	0.1382	0.1924	0.2254	0.2465	0.2611
$K_{II}^*(a)$	1.0345	0.7353	0.5459	0.4247	0.3434
$K_{II}^*(b)$	2.9166	1.9966	1.4632	1.1349	0.9160

表2 边界裂纹无量纲 D^* 和 $K_{II}^*(a)$ 随 b_0/a_0 及 a/a_0 的变化 ($K_{II}^*(b) = 0$)

b_0/a_0		a/a_0	0.1	0.2	0.3	0.4
1.0	D^*		0.1026	0.1079	0.1135	0.1193
	$K_{II}^*(a)$		7.4716	6.9361	6.3113	5.6185
1.5	D^*		0.1776	0.1816	0.1858	0.1902
	$K_{II}^*(a)$		3.7866	3.6380	3.4155	3.1260

例2 偏心裂纹与边裂纹三角形柱的扭转

柱的几何形状及有关的参数见图2(b)。记柱的无量纲抗扭刚度为

$$D^* = D / R^4$$

裂纹端点a和b的无量纲应力强度因子为

$$K_{II}^*(a) = |K_{II}(a)| / (\alpha \mu D^* R \sqrt{c}), \quad K_{II}^*(b) = |K_{II}(b)| / (\alpha \mu D^* R \sqrt{c})$$

数值计算与上例相同，分偏心裂纹和边裂纹两种情形。无量纲抗扭刚度和应力强度因子随无量纲裂纹半长 c/R 的变化分别列于表3和表4：

表3 偏心裂纹无量纲 D^* , $K_{II}^*(a)$ 和 $K_{II}^*(b)$ 随 c/R 的变化 ($d/R = \sqrt{3}/4$, 等边三角形)

c/R	0.1	0.2	0.3
D^*	0.0214	0.0193	0.0122
$K_{II}^*(a)$	2.4879	3.6452	4.0250
$K_{II}^*(b)$	5.5494	6.8298	11.5765

表4 边界裂纹无量纲 D^* 和 $K_{II}^*(b)$ 随 c/R 的变化 ($K_{II}^*(a) = 0, a = 0$, 等边三角形)

c/R	0.15	0.20	0.25
D^*	0.0200	0.0138	0.0045
$K_{II}^*(b)$	12.6453	13.4807	28.9380

例3 偏心裂纹与边裂纹扇形柱的扭转

柱的几何形状及有关的参数见图2(c)。柱的无量纲抗扭刚度

$$D^* = D / (R^4)$$

裂纹端点a和b的无量纲应力强度因子

$$K_{II}^*(a) = |K_{II}(a)| / (\alpha \mu D^* R \sqrt{c}), \quad K_{II}^*(b) = |K_{II}(b)| / (\alpha \mu D^* R \sqrt{c})$$

它们随参考角 β 及无量纲裂纹长 c/R 的变化分别列于表5和表6。

表5 偏心裂纹无量纲 D^* , $K_{II}^*(a)$ 和 $K_{II}^*(b)$ 随 β 角的变化 ($c/R=0.2, d/R=0.5$)

β/π	0.2	0.4	0.6	0.8
D^*	0.0430	0.1878	0.3821	0.6033
$K_{II}^*(a)$	7.8932	3.4034	2.1033	1.4978
$K_{II}^*(b)$	2.0028	1.1180	0.9730	0.7956

表6 边界裂纹无量纲 D^* 及 $K_{II}^*(a)$ 随 c/R 的变化 ($\beta=0.1\pi, K_{II}^*(b)=0$)

c/R	0.05	0.25	0.30
D^*	0.0106	0.0098	0.0092
$K_{II}^*(a)$	4.3285	15.6694	15.1846

例4 边裂纹在十字形柱的扭转

柱的几何形状及有关的参数见图3。记柱的无量纲抗扭

刚度为 $D^* = D / (\pi R^4 / 2)$

裂纹端点a的无量纲应力强度因子为

$$K_{II}^*(a) = |K_{II}(a)| / (\alpha \mu D^* R \sqrt{c})$$

它们与参数 a/b 和 r/R 的变化列于表7。

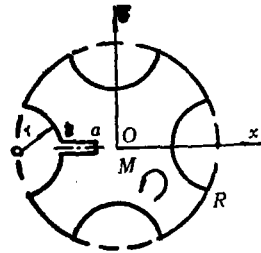


图 3

表7 边界裂纹 D^* 和 $K_{II}^*(a)$ 随参数 $a/b, r/R$ 的变化 ($b=R-r$)

r/R	a/b	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
0.1	D^*	0.6358	0.6736	0.7136	0.7548	0.7958
	$K_{II}^*(a)$	1.6824	1.3749	1.3330	1.2911	1.2451
0.3	D^*	0.3893	0.3974	0.4062	0.4154	0.4246
	$K_{II}^*(a)$	2.3337	2.1577	2.0043	1.8641	1.7312
0.5	D^*	0.0311	0.0316	0.0320	0.0324	0.0330
	$K_{II}^*(a)$	10.8244	9.7590	8.8228	7.9859	7.1996

参 考 文 献

- [1] Muskhelishvili, N. I., *Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity*, Holland (1953).
- [2] 汤任基, 带裂纹圆柱的Saint-Venant扭转, *力学学报*, (4) (1982).
- [3] Brebbia, A. C., *The Boundary Element Method for Engineers*, Pentch Press (1978).
- [4] Erdogan, F., Mixed boundary value problems in mechanics, *Mechanics Today*, (4) (1978).
- [5] Tang Ren-ji and Chen Wei-jiang, Boundary element method to solve torsion problems of cracked cylinder, *Acta Mechanica Solida Sinica*, (3) (1990).

Stress Intensity Factors of the Eccentric and Edge Cracked Cylinders

Chen Wei-jiang

(*Lanzhou University, Lanzhou*)

Wang Kai

(*Nantong Vocational University, Nantong*)

Tang Ren-ji

(*Shanghai Jiaotong University, Shanghai*)

Abstract

Using the single crack solution and the regular solution of harmonic function, the torsion problem of a cracked cylinder is reduced to solving a set of mixed-type integral equations which can be solved by combining the numerical method of singular integral equation with the boundary element method. Several numerical examples are calculated and the stress intensity factors are obtained.

Key words torsion of cracked cylinder, singular integral equations, boundary element method, stress intensity factor