

正交铺设层合圆柱曲板的蠕变失稳

王颖坚 王震鸣

(北京大学力学系) (北京 中国科学院力学所)
(郭仲衡推荐, 1992年1月2日收到)

摘 要

本文研究了正交铺设对称层合圆柱曲板的蠕变失稳问题, 通过理论分析, 得到了确定蠕变失稳临界载荷的方法。

关键词 正交铺设 层合曲板 蠕变失稳

一、引 言

在航空航天工程中, 复合材料结构经常在湿热环境中承载。探讨蠕变对复合材料结构稳定性的影响, 是工程中的一个重要课题。对复合材料结构环境效应的研究, 已引起普遍重视。

各向同性材料结构的蠕变失稳问题, 已有较好的研究成果。Hoff^[1]研究了各向同性矩形薄板在单轴压力下的蠕变失稳。Botros 和 Bieniek^[2]详细评述了各向同性材料结构的蠕变失稳研究现状, 并用有限单元法对柱、扁拱、板和壳进行了蠕变失稳分析。

关于复合材料结构的蠕变失稳研究, 已有的工作较少。

本文研究以聚合物为基体的纤维增强复合材料正交铺设对称层合圆柱曲板的蠕变失稳问题。取层合曲板的中面为 x_1x_2 面(图1), 板厚为 h , 主曲率半径 $R_1=\infty$, $R_2=R$ 。主曲率 $k_1=0$, $k_2=1/R$ 。

我们研究四边简支层合圆柱曲板在 x_1 方向的轴向压力 p 作用下的蠕变失稳(图2), p 为作用于 $x_1=\text{const}$. 端面处单位宽度上的压力。

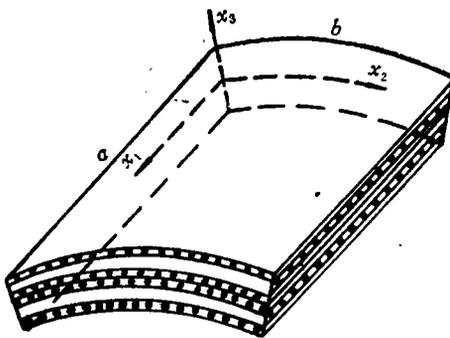


图1 正交铺设对称层合圆柱曲板

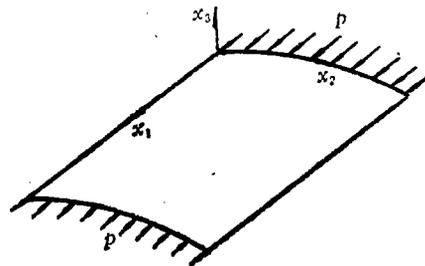


图2 轴压作用下的圆柱曲板

本文采用薄壳小挠度弯曲理论。

本文通过理论分析,得到了确定正交铺设对称层合圆柱曲板在单轴压力下蠕变失稳临界载荷的方法。

二、复合材料单向层片的本构关系

复合材料层合板壳是由复合材料单向层片迭加粘接而成的。单向层片的蠕变特性,是纤维增强复合材料非线性性能的一个重要方面,是研究复合材料层合板壳在高温湿热条件下工作的基础。

Morgan等^[3]指出,硼/环氧、石墨/环氧等正交铺设的纤维增强复合材料单层片,沿纤维方向表现出线性应力应变关系,在垂直于纤维方向有轻微的非线性。在剪切变形中表现出较强的非线性。

在本文的分析中,对于层合曲板在 x_1, x_2 方向的拉压变形,仅考虑其线性的本构关系,对于 x_1x_2 面内的剪切变形,考虑非线性的本构关系——蠕变特性。单向层片的本构关系根据下列各点确定:

<i> 各单向层片的纤维取向沿 x_1 或沿 x_2 方向。

<ii> 各单向层片中,纤维保持线性弹性。聚合物基体具有非线性本构关系,其拉压和剪切变形均表现出蠕变特性。当单向层片沿纤维方向承受拉压载荷时,纤维是主要承载体,因而可以不考虑基体的蠕变效应。对于正交铺设的层合曲板,当拉压载荷垂直于某些单向层片的纤维取向时,对另一些层片,却是沿着纤维取向,因而在该方向也可以忽略基体的蠕变特性。

<iii> 各单向层片的剪切变形,主要取决于基体,因而必须考虑基体的蠕变特性。

故,第 i 层单向层片的本构关系为^[4]

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1^{(i)} &= a_{11}^{(i)} \epsilon_1 + a_{12}^{(i)} \epsilon_2 \\ \sigma_2^{(i)} &= a_{12}^{(i)} \epsilon_1 + a_{22}^{(i)} \epsilon_2 \\ \sigma_6^{(i)} &= \tau_{12}^{(i)} = \frac{a_{66}^{*(i)}}{n} \int_0^t \exp\left[-\frac{t-\tau}{n}\right] \epsilon_6(\tau) d\tau \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

($i=1, 2, \dots, m$)

其中 m 为层合曲板的总层数, n 为松弛系数, $a_{11}^{(i)}, a_{12}^{(i)}, a_{22}^{(i)}, a_{66}^{*(i)}$ 是刚度系数。 $a_{11}^{(i)}, a_{12}^{(i)}, a_{22}^{(i)}$ 的确定方法可在复合材料力学教程^[5]中找到, $a_{66}^{*(i)}$ 和 n 可以由实验测定, n 对各层是相同的。 $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_6$ 是层合曲板中任意点处的应变分量,它们可以由层合曲板中面的应变分量 $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_6$ 及中面曲率和扭率的改变量 k_1, k_2, k_{12} 表达:

$$\epsilon_1 = \epsilon_1 + k_1 z, \quad \epsilon_2 = \epsilon_2 + k_2 z, \quad \epsilon_6 = \epsilon_6 + 2k_{12} z \quad (2.2)$$

这里 $k_1 = -\partial^2 w / \partial x_1^2, k_2 = -\partial^2 w / \partial x_2^2, k_{12} = -\partial^2 w / \partial x_1 \partial x_2$
 $w = w(x_1, x_2, t)$ 是层合曲板的挠度。

三、层合曲板的平衡方程与协调方程

正交铺设对称层合曲板的内力

$$\begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{12} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{Bmatrix}, \quad S = \frac{A_{66}^*}{n} \int_0^t \exp\left[-\frac{t-\tau}{n}\right] \varepsilon_6(\tau) d\tau$$

其中

$$A_{11} = \sum_{i=1}^m a_{11}^{(i)}(z_i - z_{i-1}), \quad A_{12} = \sum_{i=1}^m a_{12}^{(i)}(z_i - z_{i-1})$$

$$A_{22} = \sum_{i=1}^m a_{22}^{(i)}(z_i - z_{i-1}), \quad A_{66}^* = \sum_{i=1}^m a_{66}^{*(i)}(z_i - z_{i-1})$$

这里, z_i 是第 i 个单向层片上表面的 z 坐标.

层合曲板的内力矩

$$\begin{Bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{12} & D_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{Bmatrix}, \quad H = \frac{2D_{66}^*}{n} \int_0^t \exp\left[-\frac{t-\tau}{n}\right] k_{12}(\tau) d\tau$$

其中

$$D_{11} = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^m a_{11}^{(i)}(z_i^3 - z_{i-1}^3), \quad D_{12} = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^m a_{12}^{(i)}(z_i^3 - z_{i-1}^3)$$

$$D_{22} = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^m a_{22}^{(i)}(z_i^3 - z_{i-1}^3), \quad D_{66}^* = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^m a_{66}^{*(i)}(z_i^3 - z_{i-1}^3)$$

圆柱曲板的平衡方程组为

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial T_1}{\partial x_1} + \frac{\partial S}{\partial x_2} &= 0, & \frac{\partial S}{\partial x_1} + \frac{\partial T_2}{\partial x_2} &= 0 \\ -\frac{T_2}{R} + \frac{\partial Q_1}{\partial x_1} + \frac{\partial Q_2}{\partial x_2} + q &= 0 \\ \frac{\partial M_1}{\partial x_1} + \frac{\partial H}{\partial x_2} - Q_1 &= 0, & \frac{\partial H}{\partial x_1} + \frac{\partial M_2}{\partial x_2} - Q_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

在 x_1 方向的轴向压力 p 作用下, 上式中 $q = -p \partial^2 w / \partial x_1^2$.

引进内力函数 φ :

$$T_1 = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2}, \quad T_2 = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2}, \quad S = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_2}$$

则 (3.1) 的前二式自动满足, 并可以导出

$$-\frac{T_2}{R} + \frac{\partial^2 M_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 M_2}{\partial x_2^2} + 2 \frac{\partial^2 H}{\partial x_1 \partial x_2} - p \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} = 0 \quad (3.2)$$

由内力矩表达式可知

$$M_1 = D_{11} k_1 + D_{12} k_2 = -D_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} - D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}$$

$$M_2 = D_{12} k_1 + D_{22} k_2 = -D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} - D_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}$$

$$H = \frac{2D_{66}^*}{n} \int_0^t \exp\left[-\frac{t-\tau}{n}\right] k_{12}(\tau) d\tau = -\frac{2D_{66}^*}{n} \int_0^t \exp\left[-\frac{t-\tau}{n}\right] \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} d\tau$$

于是得到平衡方程

$$\begin{aligned} & \frac{1}{R} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} + D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x_1^4} + D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial x_2^4} + 2D_{12} \frac{\partial^4 w}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} \\ & + \frac{4D_{10}^*}{n} \int_0^t \exp\left[-\frac{t-\tau}{n}\right] \frac{\partial^4 w}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} d\tau + p \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} = 0 \end{aligned} \quad (3.3)$$

圆柱层合曲板中面的应变

$$\varepsilon_1 = \frac{\partial u}{\partial x_1}, \quad \varepsilon_2 = \frac{\partial v}{\partial x_2} + \frac{w}{R}, \quad \varepsilon_0 = \frac{\partial u}{\partial x_2} + \frac{\partial v}{\partial x_1}$$

由此导出协调方程

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_1}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_2}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 \varepsilon_0}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{1}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \quad (3.4)$$

根据内力表达式, 得到

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{A_{22}}{\Delta} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2} - \frac{A_{12}}{\Delta} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2}, \quad \varepsilon_2 = -\frac{A_{12}}{\Delta} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2} + \frac{A_{11}}{\Delta} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} \\ \varepsilon_0 &= \frac{-1}{A_{10}^*} \left(n \frac{\partial^2 \dot{\varphi}}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_2} \right) \end{aligned}$$

式中 $\Delta = A_{11}A_{22} - A_{12}^2 \neq 0$, $\dot{\varphi} = \partial\varphi/\partial t$. 将上述关系代入(3.4), 可导出如下的协调方程

$$\begin{aligned} & \frac{A_{11}}{\Delta} \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x_1^4} - \frac{2A_{12}}{\Delta} \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + \frac{A_{22}}{\Delta} \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x_2^4} \\ & + \frac{1}{A_{10}^*} \left(n \frac{\partial^4 \dot{\varphi}}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} \right) = \frac{1}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \end{aligned} \quad (3.5)$$

正交铺设对称层合圆柱曲板在 x_1 方向轴压下的蠕变屈曲分析, 其平衡方程(3.3)与协调方程(3.5)是耦合的, 必须联立求解.

四、蠕变失稳临界载荷的确定

四边简支层合圆柱曲板的边界条件为

$$\left. \begin{aligned} x_1=0, a: w=0, M_1=0 \\ x_2=0, b: w=0, M_2=0 \end{aligned} \right\} \quad (4.1)$$

因为 $M_1 = -D_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} - D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}$, $M_2 = -D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} - D_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}$ 故上述边界条件简化为

$$\left. \begin{aligned} x_1=0, a: w=0, \partial^2 w / \partial x_1^2 = 0 \\ x_2=0, b: w=0, \partial^2 w / \partial x_2^2 = 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.2)$$

选取满足边界条件(4.2)的挠曲函数

$$w = C(t) \sin \alpha x_1 \sin \beta x_2 \quad (4.3)$$

式中 $\alpha = m_1 \pi / a$, $\beta = n_1 \pi / b$, m_1, n_1 分别为 x_1, x_2 方向的屈曲半波数. 与挠曲函数 w 同时满足平衡方程(3.3)及协调方程(3.5)的内力函数 φ 为

$$\varphi = F(t) \sin \alpha x_1 \sin \beta x_2 \quad (4.4)$$

由此可以导出 $C(t)$ 与 $F(t)$ 满足的方程组

$$-\frac{\alpha^2}{R} F(t) + (D_{11} \alpha^4 + 2D_{12} \alpha^2 \beta^2 + D_{22} \beta^4) C(t)$$

$$+ \frac{4\alpha^2\beta^2 D_{\circ 6}^*}{n} \int_0^t \exp\left[-\frac{t-\tau}{n}\right] C(\tau) d\tau = p\alpha^2 C(t) \quad (4.5)$$

$$\left(\frac{A_{11}}{\Delta}\alpha^4 - 2\frac{A_{12}}{\Delta}\alpha^2\beta^2 + \frac{A_{22}}{\Delta}\beta^4\right)F(t) + \frac{1}{A_{\circ 6}^*} (n\alpha^2\beta^2\dot{F} + \alpha^2\beta^2 F) = -\frac{\alpha^2}{R} C(t) \quad (4.6)$$

在方程组中消去未知量 $F(t)$, 得

$$n\left(\frac{R}{\alpha^2}\xi_1 - p\right)\frac{\alpha^2\beta^2}{A_{\circ 6}^*}\dot{C}(t) + \left[\frac{R}{\alpha^2}\xi_1\xi_2 + \frac{\alpha^2\beta^2}{A_{\circ 6}^*}\left(n\xi_3 + \frac{R}{\alpha^2}\xi_1\right) + \frac{\alpha^2}{R} - \left(\xi_2 + \frac{\alpha^2\beta^2}{A_{\circ 6}^*}\right)p\right]C(t) + \xi_2\xi_3 \int_0^t \exp\left[-\frac{t-\tau}{n}\right] C(\tau) d\tau = 0 \quad (4.7)$$

其中

$$\xi_1 = D_{11}\alpha^4 + D_{22}\beta^4 + 2D_{12}\alpha^2\beta^2, \quad \xi_2 = (A_{11}\alpha^4 - 2A_{12}\alpha^2\beta^2 + A_{22}\beta^4)/\Delta$$

$$\xi_3 = 4R\beta^2 D_{\circ 6}^*/n$$

令

$$\gamma = \alpha^2\beta^2/A_{\circ 6}^*, \quad \eta_1 = n\gamma\xi_1 R/\alpha^2$$

$$\eta_2 = \frac{R}{\alpha^2}\xi_1\xi_2 + \gamma\left(n\xi_3 + \frac{R}{\alpha^2}\xi_1\right) + \frac{\alpha^2}{R}$$

$$b_1 = \eta_1 - n\gamma p, \quad b_2 = \eta_2 - (\xi_2 + \gamma)p$$

则方程(4.7)简化为

$$b_1\dot{C}(t) + b_2 C(t) + \xi_2\xi_3 \int_0^t \exp\left[-\frac{t-\tau}{n}\right] C(\tau) d\tau = 0 \quad (4.8)$$

这是一个微分-积分方程。为消去(4.8)中的积分, 将该式对 t 求微商, 乘以 n , 再与原式相加, 可得

$$nb_1\ddot{C}(t) + (b_1 + nb_2)\dot{C}(t) + (b_2 + n\xi_2\xi_3)C(t) = 0 \quad (4.9)$$

此二阶常系数常微分方程的特征方程为

$$nb_1\lambda^2 + (b_1 + nb_2)\lambda + b_2 + n\xi_2\xi_3 = 0$$

可以求出特征根 λ_1, λ_2 , 则

$$C(t) = C_1 \exp[\lambda_1 t] + C_2 \exp[\lambda_2 t]$$

时间 t 无限增大时, 挠曲函数

$$w = C(t) \sin\alpha x_1 \sin\beta x_2$$

保持稳定的充要条件是: 两个特征根 λ_1, λ_2 的实部均为负值。

根据高等代数理论^[6], 使 λ_1, λ_2 的实部均为负值的条件是

$$nb_1 > 0, \quad \text{即} \quad p < \frac{\eta_1}{n\gamma} \quad (4.10)$$

$$b_1 + nb_2 > 0, \quad \text{即} \quad p < \frac{\eta_1 + n\eta_2}{n(\xi_2 + 2\gamma)} \quad (4.11)$$

$$b_2 + n\xi_2\xi_3 > 0, \quad \text{即} \quad p < \frac{\eta_2 + n\xi_2\xi_3}{\xi_2 + \gamma} \quad (4.12)$$

所以, 四边简支的正交铺设对称层合圆柱曲板在轴向压力作用下不发生蠕变失稳的条件是: 不等式(4.10)、(4.11)、(4.12)同时成立。

使不等式(4.10)、(4.11)、(4.12)同时成立的压力 p 的最大值, 就是四边简支正交铺设对称层合圆柱曲板在轴向压力下蠕变失稳的临界载荷, 记为 p_{cr} 。

当轴压 $p > p_{cr}$ 时, 随着时间 t 的增长, 层合曲板的挠度无限增大, 发生蠕变失稳。

五、结 论

<i> 本文用薄壳小挠度理论研究了层合圆柱曲板的蠕变失稳。

<ii> 对于以聚合物为基体的纤维增强复合材料层合圆柱曲板，在面内剪切变形中考虑复合材料的蠕变特性。

<iii> 本文导出了确定正交铺设对称层合圆柱曲板在轴压下蠕变失稳临界载荷的方法：使不等式(4.10)、(4.11)、(4.12)同时成立的压力 p 的最大值，就是蠕变失稳的临界载荷值。

参 考 文 献

- [1] Hoff, N. J., Creep buckling of rectangular plates under uniaxial compression, *Engineering Plasticity*, Ed. by J. Heyman and F. A. Leckie, Cambridge University Press (1968).
- [2] Botros, F. R. and M. P. Bieniek, *Creep Buckling of Structures*, AIAA Publications (1983).
- [3] Morgan, H. S. and R. M. Jones, Buckling of rectangular cross-ply laminated plates with nonlinear stress-strain behavior, *J. Appl. Mech.*, **46** (1979), 637--643.
- [4] 马马斯捷尔, A. K.等, 《聚合物与复合材料力学》, 刘统畏等译, 新时代出版社 (1988).
- [5] Jones, R. M., *Mechanics of Composite Materials*, McGraw-Hill, New York (1975).
- [6] 库洛什, A. Г., 《高等代数教程》, 柯召译, 高等教育出版社 (1956), 347.

Creep Buckling of Cross-Ply Symmetric Laminated Cylindrical Panels

Wang Ying-jian

(Department of Mechanics, Peking University, Beijing)

Wang Zhen-ming

(Institute of Mechanics, Academia Sinica, Beijing)

Abstract

A creep buckling analysis of cross-ply symmetric laminated cylindrical panels is given in this paper. By means of theoretical analysis, a method to determine the critical load of creep buckling of the panels with simply supported boundary conditions is obtained.

Key words cross-ply, laminated panel, creep buckling