应用数学和学力，第 14 卷第 3 期（1993 年 3 月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

一个高精度收敛的变系数微分方程精确解析法*

纪振义　　叶开沅

（安徽建筑工业学院）　（兰州大学）

摘　要

文[1]给出精确解析法，可用于求解任意变系数微分方程，所得到的解具有二阶收敛精度．在此基础上，本文以变截面梁弯曲为例，给出一个高精度的算法．不增加工作量的情况下可达到四阶收敛精度．具有计算快，简单等特点，文末给出算例，仅用很少的单元即可获得高的收敛精度，表明了本文理论的正确性．

关键词　精确解析法　梁弯曲　高精度收敛

一、引　言

固体力学和其它学科中的许多实际问题均可归结为求解变系数微分方程．文[1]给出精确解析法，可用于求解任意变系数微分方程．因此得到广泛的应用．如求解非均匀加肋柱壳的强度和稳定[2~3]及弹性地基非均匀圆薄板弯曲等问题．并可推广求解非均匀圆薄板大变形非线性问题．但它仅具有二阶收敛精度．

本文以非均匀变截面梁弯曲为例，在文[1]的基础上提出一个高精度算法，在不增加工作量的情况下所得到的位移和内力均可具有四阶收敛精度．文中给出收敛性证明，文末给出算例，表明仅用很少的单元，即可获得高的收敛精度，表明了本文理论的正确性．

二、高精度收敛的精确解析法

这里以非均匀变截面梁弯曲为例，给出高精度收敛的精确解析法．对于一个非均匀变截面梁弯曲的挠度方程可写为

$$\frac{d^2}{dx^2}D(x)\frac{d^2w}{dx^2}=q(x) \tag{2.1}$$

它的内力和位移关系为

* 1991年 5 月21日收到．国家自然科学基金资助的课题．

$$M(x)=-D(x)\frac{d^2w}{dx^2}, \qquad Q_x=-\frac{d}{dx}D(x)\frac{d^2w}{dx^2} \tag{2.2}$$

式中 w是垂直于轴线的挠度，q是荷载，$D(x)$是抗弯刚度，等于EI，这里E是弹性模量，I是横截面对其中性轴的惯性距，M是横截面上的弯距，Q是横截面上的剪力.

采用本文的方法，把梁分成N个单元，设第i个单元的区间为$[x_{i-1},x_i)$、在第i个单元上，方程(2.1)可以转化为

$$\frac{d^2}{dx^2}(\alpha_i+\beta_i(x-x_{i-1}))\frac{d^2\tilde{w}}{dx^2}=q(x) \qquad [x_{i-1},x_i) \tag{2.3}$$

式中 α_i和β_i是待定常数. 假定第i个单元上两点高斯积分求积节点的座标为$\bar{x}_{i1}$和$\bar{x}_{i2}$，抗弯刚度$D(x)$在此两点的值分别为D_{i1}和D_{i2}. 为保持四阶收敛精度，我们应使

$$\begin{aligned}&\alpha_i+\beta_i(\bar{x}_{i1}-x_{i-1})=D_{i1}\\&\alpha_i+\beta_i(\bar{x}_{i2}-x_{i-1})=D_{i2}\end{aligned} \tag{2.4}$$

即在二点高斯求积节点上，方程(2.3)中的抗弯刚度$\alpha_i+\beta_i(x-x_{i-1})$应与$D(x)$相等. 由(2.4)可以求出

$$\alpha_i=\frac{D_{i1}(\bar{x}_{i2}-x_{i-1})-D_{i2}(\bar{x}_{i1}-x_{i-1})}{\bar{x}_{i2}-\bar{x}_{i1}}, \quad \beta_i=\frac{D_{i2}-D_{i1}}{\bar{x}_{i2}-\bar{x}_{i1}} \tag{2.5}$$

我们不难求出高斯求积节点座标

$$\bar{x}_{i1}=x_{i-1}+0.21132(x_i-x_{i-1}), \quad \bar{x}_{i2}=x_{i-1}+0.78868(x_i-x_{i-1}) \tag{2.6}$$

此外在单元之间的节点上尚需满足连续条件

$$\begin{aligned}&\lim_{\varepsilon\to0}\tilde{w}(x_{i-1}-\varepsilon)=\tilde{w}(x_{i-1}), \qquad \lim_{\varepsilon\to0}\frac{d\tilde{w}(x_{i-1}-\varepsilon)}{dx}=\frac{d\tilde{w}}{dx}(x_{i-1})\\&\lim_{\varepsilon\to0}\tilde{M}(x_{i-1}-\varepsilon)=\tilde{M}(x_{i-1})=\left([\alpha_i+\beta_i(x-x_{i-1})]\frac{d^2\tilde{w}}{dx^2}\right)_{x=x_{i-1}}\\&\lim_{\varepsilon\to0}\tilde{Q}(x_{i-1}-\varepsilon)=\tilde{Q}(x_{i-1})=\left[\frac{d}{dx}(\alpha_i+\beta_i(x-x_{i-1}))\frac{d^2\tilde{w}}{dx}\right]_{x=x_{i-1}}\end{aligned} \tag{2.7}$$

这里 ε是一个任意的正数. 可以证明由(2.3)和(2.7)所得到的解$\tilde{w}$，$d\tilde{w}/dx$，$\tilde{M}$和$\tilde{Q}$可一致收敛于(2.1)和(2.2)的精确解w，dw/dx，M和Q，并具有四阶收敛精度.

由(2.3)和(2.7)得到的非均匀变截面梁的一般解可以写为[1]

$$\begin{aligned}\{\delta(x)\}=&[F_i(x-x_{i-1})](\{\delta(0)\}-\{P_i(x_{i-1})\})+P_i(x)\\&+\sum_{k=1}^{i-1}\{x-x_k\}^\circ[F_i(x-x_{i-1})]\{A_k\}\\\{A_{i-1}\}=&([F_{i-1}(x_{i-1}-x_{i-2})]-[I])\{\delta(0)\}-[F_{i-1}(x_{i-1}-x_{i-2})]\{P_{i-2}(x_{i-2})\}\\&+\{p_{i-1}(x_{i-1})\}+\sum_{k=1}^{i-2}([F_i(x_{k-1}-x_{k-2})]-[I])\{A_k\}\end{aligned} \tag{2.8}$$

这里矢量

$$\{\delta(x)\}=\left\{\tilde{w}(x) \quad \frac{d\tilde{w}(x)}{dx} \quad \tilde{M}(x) \quad \tilde{Q}(x)\right\}^T \tag{2.9}$$

记号

$$\{x-x_k\}^\circ=\begin{cases}0 & (x<x_k)\\1 & (x\geqslant x_k)\end{cases} \tag{2.10}$$

为Hcaviside函数. $[F_i(x)]$是4×4矩阵, $\{P_i(x)\}$是4×1的荷载向量.它们分别是(2.3)的基本解和特解, 并满足

$$[F_i(0)]=[I] \tag{2.11}$$

利用(2.3),(2.7),(2.9)和(2.11), 我们可以得到基本解

$$[F_i(x)]=\begin{bmatrix} 1 & x & U_3(x) & U_1(x) \\ 0 & 1 & \frac{1}{\beta_i}\ln\alpha_i-\frac{1}{\beta_i}\ln(\alpha_i+\beta_i x) & U_2(x) \\ 0 & 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.12}$$

式中函数

$$\left.\begin{aligned} U_1(x)&=\frac{x\alpha_i}{\beta_i^2}(1-\ln\alpha_i)+\frac{\alpha_i^2}{\beta_i^2}\left(\frac{3}{2}-\ln\alpha_i\right)-\frac{1}{\beta_i^3}(\alpha_i+\beta_i x)\left[\left(\frac{3}{2}\alpha_i+\frac{\beta_i x}{2}\right)\right.\\ &\quad\left.-\alpha_i\ln(\alpha_i+\beta_i x)\right] \\ U_2(x)&=\frac{\alpha_i}{\beta_i^2}(1-\ln\alpha_i)-\frac{1}{\beta_i^2}[\alpha_i+\beta_i x-\alpha_i\ln(\alpha_i+\beta_i x)] \\ U_3(x)&=\frac{\alpha_i}{\beta_i^2}(\ln\alpha_i-1)-\frac{1}{\beta_i^2}[(\alpha_i+\beta_i x)(\ln(\alpha_i+\beta_i x)-1)]+\frac{x}{\beta_i}\ln\alpha_i \end{aligned}\right\} \tag{2.13}$$

当q是常量时, 我们可以得到特解

$$\{P_i(x)\}=q\begin{Bmatrix} -\frac{1}{2\beta_i^4}\left(\frac{1}{6}\xi^3(x-x_{i-1})-\alpha_i\xi^2(x-x_{i-1})+\alpha_i^2\xi(x-x_{i-1})[\ln\xi(x-x_{i-1})-1]\right. \\ -\frac{1}{2\beta_i^3}\left[\frac{1}{2}\xi^2(x-x_{i-1})-2\alpha_i\xi(x-x_{i-1})+\alpha_i^2\ln\xi(x-x_{i-1})\right] \\ \frac{1}{2}(x-x_{i-1})^2 \\ x-x_{i-1} \end{Bmatrix} \tag{2.14}$$

式中

$$\xi(x-x_{i-1})=\alpha_i+\beta_i(x-x_{i-1})$$

当所在单元是一个均匀梁时, 在(2.12)和(2.14)中的$\beta_i=0$, 将出现奇异项. 但这时它们可分别用下式代替

$$[F_i(x)]=\begin{bmatrix} 1 & x & -x^2/2\alpha_i & -x^3/6\alpha_i \\ 0 & 1 & -x/2\alpha_i & -x^2/2\alpha_i \\ 0 & 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\ \{\delta(x)\}=\begin{Bmatrix} -\frac{(x-x_{i-1})^4}{24\alpha_i} \\ -\frac{(x-x_{i-1})^3}{6\alpha_i} \\ \frac{(x-x_{i-1})^2}{2} \\ x-x_{i-1} \end{Bmatrix} \tag{2.15}$$

仍能得到正确的结果. 以下计算方法和[1]中方法相同.

三、收敛阶次的证明

我们把(2.1)和(2.3)相减，可得到恒等式

$$\frac{d^2}{dx^2}D(x)\frac{d^2w}{dx^2}-\frac{d^2}{dx^2}\left([\alpha_i+\beta_i(x-x_{i-1})]\frac{d^2\bar{w}}{dx^2}\right)=0 \tag{3.1}$$

对上式作内积，即可得

$$\sum_{i=1}^{N}\int_{x_{i-1}}^{x}\varphi\left(\frac{d^2}{dx^2}D(x)\frac{d^2w}{dx^2}-\frac{d^2}{dx^2}\left([\alpha_i+\beta_i(x-x_{i-1})]\frac{d^2\bar{w}}{dx^2}\right)\right)dx=0$$

式中 $\varphi\in W_2^{(2)}$，是 $W_2^{(2)}$ 空间中的一个任意元素，$W_2^{(2)}$ 是索伯列夫空间．对上式作分部积分，我们有

$$\begin{aligned}&\int_0^{x_N}(w-\bar{w})\frac{d^2}{dx^2}\left[D(x)\frac{d^2\varphi}{dx}\right]dx\\&+\sum_{i=1}^{N}\left\{\varphi\left(\frac{d}{dx}D(x)\frac{d^2w}{dx^2}-\frac{d}{dx}(\alpha_i+\beta_i(x-x_{i-1}))\frac{d^2\bar{w}}{dx^2}\right)\right.\\&-\frac{d\varphi}{dx}\left(D(x)\frac{d^2w}{dx^2}-(\alpha_i+\beta_i(x-x_{i-1}))\frac{d^2\bar{w}}{dx^2}\right)\\&\left.+D(x)\frac{d^2\varphi}{dx^2}\left(\frac{dw}{dx}-\frac{d\bar{w}}{dx}\right)-\frac{d}{dx}D(x)\frac{d^2\varphi}{dx^2}(w-\bar{w})\right\}\Bigg|_{x_{i-1}}^{x_i}\\&+\sum_{i=1}^{N}\int_{x_{i-1}}^{x_N}(D(x)-(\alpha_i+\beta_i(x_{i-1}))))\frac{d^2\bar{w}}{dx^2}\cdot\frac{d^2\varphi}{dx^2}dx=0\end{aligned} \tag{3.2}$$

当$N\to\infty$时，误差项

$$R=\sum_{i=1}^{N}\int_{x_{i-1}}^{x_N}[D(x)-(\alpha_i+\beta_i(x-x_{i-1}))]\frac{d^2\bar{w}}{dx^2}\,\frac{d^2\varphi}{dx^2}dx$$

趋近于零．利用高斯求积公式，并注意到$\alpha_i+\beta_i(x-x_{i-1})-D(x)$在高斯求积节点上等于0，因此有

$$R=O(\Delta x_{\max}^4)$$

式中 $\Delta x_{\max}$是单元的最大长度．由Hilbert 伴随逆算子定理，当算子

$$A=\frac{d^2}{dx^2}D(x)\frac{d^2}{dx^2}$$

有逆算子A^{-1}存在时，则其共轭算子

$$A^*=\frac{d^2}{dx^2}D(x)\frac{d^2}{dx^2}$$

也有逆算子$(A^*)^{-1}$存在，特别地我们可以令

$$\frac{d^2}{dx^2}D(x)\frac{d^2\varphi}{dx^2}=w-\bar{w} \tag{3.3}$$

时，可以找到一个解$\varphi\in W_2^{(2)}$，使得φ，$\frac{d\varphi}{dx}$，$M^*=D(x)\frac{d^2\varphi}{dx^2}$和$Q^*=\frac{d}{dx}D(x)\frac{d^2w}{dx^2}$在

$[0, x_N]$上连续，并使其对应的未知边界条件对应的共轭边界条件为零。利用单元之间的连续条件(2.7)和已知边界条件，(3.2)式可以变为

$$\int_0^{x_N}(w-\bar{w})^2dx+O(\Delta x_{\max}^4)=0 \tag{3.4}$$

我们作内积

$$\sum_{m=1}^{i}\int_{x_{m-1}}^{x_m}\varphi\left[\left(\frac{d^2}{dx^2}D(x)\frac{d^2w}{dx^2}\right)-\frac{d^2}{dx^2}([\alpha_i+\beta_i(x-x_{i-1})]\frac{d^2w}{dx^2}dx\right]=0$$

并利用(3.4)，连续条件(2.7)，已知边界条件和未知边界条件对应的零共轭边界条件，我们有

$$\begin{aligned}&\left\{\varphi\left(\frac{d}{dx}D(x)\frac{d^2w}{dx^2}-\frac{d}{dx}(\alpha_i+\beta_i(x-x_{i-1}))\frac{d^2\bar{w}}{dx^2}\right)\right.\\&-\frac{d\varphi}{dx}\left(D(x)\frac{d^3w}{dx^2}-(\alpha_i+\beta_i(x-x_{i-1}))\frac{d^2w}{dx^2}\right)\\&\left.+M^*\left(\frac{dw}{dx}-\frac{d\bar{w}}{dx}\right)-Q^*(w-\bar{w})\right\}_{x=x_i}+O(\Delta x_{\max}^4)=0\end{aligned} \tag{3.5}$$

注意φ，$d\varphi/dx$，M^*和Q^*是任意的，因此在单元节点x_i上有

$$\lim_{N\to\infty}w=\bar{w},\ \lim_{N\to\infty}\frac{d\bar{w}}{dx}=\frac{dw}{dx}$$

$$\lim_{N\to\infty}(\alpha_i+\beta_i(x-x_{i-1}))\frac{d^2\bar{w}}{dx^2}=D(x)\frac{d^2w}{dx^2}$$

$$\lim_{N\to\infty}\frac{d}{dx}(\alpha_i+\beta_i(x-x_{i-1}))\frac{d^2w}{dx^2}=\frac{d}{dx}D(x)\frac{d^2w(x)}{dx^2}$$

并具有四阶收敛精度。

四、算　　例

一个受集中力P作用的变截面悬臂梁，如图1所示。它的尺寸，高$a=3$，长$L=10$，宽$b=1$。集中力$P=10$，弹性模量$E=1000$。我们可以求出这个问题的精确解

$$w=\eta\left(\ln\frac{L}{L-x}-\frac{x}{L}\right),\ \frac{dw}{dx}=\eta\frac{x}{L(L-x)}$$

$$M=(x-L)P,\ Q=P,\ \eta=\frac{12L^3P}{Ea^3b}$$

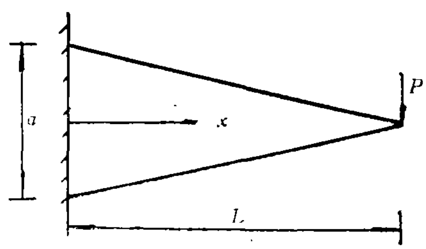

图1　一个变截面悬臂梁

表1给出随单元数N增大时，由本文方法计算所得到的位移和转角沿x的分布，并与精确解作了比较。应当指出，本文所得到的内力与精确解相同。

从表1可以看出，用本文的方法所获得的解具有四阶收敛精度，证明了本文理论的正确性。仅用很少的单元，即可获得满意的结果。应当指出式(2.3)的解在一般情况下仍是很难求解的。但一旦求出，我们便可构造出高阶收敛的精确解析法，达到事倍功半的目的。

表 1 变截面悬臂梁的挠度和转度

x		2.0	4.0	6.0	8.0	9.0
w	$N=2$	0.102732	0.488339	1.46373		
	$N=5$	0.102732	0.492183	1.40452	3.59659	6.39254
	$N=10$	0.102852	0.492532	1.40564	3.59646	6.23305
	$N=20$	0.10860	0.492557	1.40573	3.59741	6.23269
	$N=40$	0.102860	0.492558	1.40574	3.59750	6.23362
	精确解	0.102860	0.492558	1.40574	3.59750	6.23371
$\frac{dw}{dx}$	$N=2$	0.111190	0.303877	0.732089		
	$N=5$	0.111190	0.296750	0.670391	1.94466	4.49321
	$N=10$	0.111116	0.296325	0.666899	1.78530	4.33385
	$N=20$	0.111111	0.296298	0.666681	1.77825	4.01505
	$N=40$	0.111111	0.296297	0.666667	1.77781	4.00094
	精确解	0.111111	0.296296	0.666667	1.77778	4.00000

参 考 文 献

[1] 纪振义、叶开沅，任意变系数微分方程的精确解析法，应用数学和力学，10(10)(1989)，841—852.

[2] 叶开沅，纪振义，非均匀双向加肋圆柱壳的非线性轴对称变形的一般解，应用数学和力学，10，(3)(1988)，187—192.

[3] Ji Zhen-yi and Yeh Kai-yuan, General solution on nonliear buckling of nonhomogeneous axial symmetric ring-and stringer-stiffened cylindrical shell, *Computer & Structure*, 34 (4) (1990), 585—591.

A High Convergent Precision Exact Analytic Method for Differential Equation with Variable Coefficients

Ji Zhen-yi

(Anhui Architectural Industry College, Hefei)

Yeh Kai-yuan

(Lanzhou University, Lanzhou)

Abstract

The exact analytic method was given by[1]. It can be used for arbitrary variable coefficient differential equations and the solution obtained can have the second order convergent precision. In this paper, a new high precision algorithm is given based on [1], through a bending problem of variable cross section beams. It can have the fourth convergent precision without increasing computation work. The present computation method is not only simple but also fast. The numerical examples are given at the end of this paper which indicate that the high convergent precision can be obtained using only a few elements. The correctness of the theory in this paper is confirmed.

Key words exact analytic method, bending of beam, high convergent precision