应用数学和力学，第14卷第2期（1993年2月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

多导块方法的稳定性分析*

匡蛟勋　林玉华

（上海师范大学数学系，1991年12月27日收到）

摘　要

文[1]中提出了一种使用高阶导数的块隐式单步法，并在文末留下一个问题：即对给定的方法中使用的最高阶导数阶数$l\geqslant1$，为使该方法是A—稳定的，块的大小k应满足什么条件？本文将彻底地解答这个问题。首先，我们给出稳定函数$\xi_k(\bar{h})=P(\bar{h})/Q(\bar{h})$中多项式$P(\ )$及$Q(\bar{h})$的系数的显式表达式，并证明$P(-\bar{h})=Q(\bar{h})$；另外，我们使用计算机符号运算及对角Pade′逼近公式，对任意的$l\geqslant1$，给出了为使方法A—稳定时块的大小k应满足的条件。

关键词　多导块方法　A—稳定　块的大小

一、引　言

1987年，匡蛟勋提出一种使用高阶导数的块隐式单步法（见[1]），其收敛阶可达$p=kl+l$（其中k是块的大小，l是方法中使用的最高阶导数的阶数），并且指明当$l=2=k$时，方法是A—稳定的。本文将彻底地解决文末提出的问题，即当$l\geqslant1$固定时，k应满足什么条件才能使该方法是A—稳定的。为此，我们首先建立稳定函数$\xi_k(\bar{h})=P(\bar{h})/Q(\bar{h})$中多项式$P(\bar{h})$及$Q(\bar{h})$的系数的表达式，并证明$P(-\bar{h})=Q(\bar{h})$，这里$\bar{h}=\lambda h$，$\mathrm{Re}\lambda<0$，$h>0$。最后使用计算机符号运算及Hurwitz定理证明了当$l=1$时，$k\leqslant8$；$l=2$时，$k\leqslant5$；$l=3$，4时$k\leqslant3$；$5\leqslant l\leqslant10$时$k\leqslant2$方法是A—稳定的。对于$l\geqslant11$，$k=1$则使用$\exp[\bar{h}]$的对角Pade′逼近公式，同样证明该方法是A—稳定的。

二、多导块方法的描述

考虑初值问题：

$$y'=f(x,y),\quad y(x_0)=\eta,\qquad x_0\leqslant x\leqslant b \tag{2.1}$$

使用文[1]中的记号，使用高阶导数的块方法能写为如下一般形式：

$$Z_{n+k}=K^0y_n+\sum_{s=1}^{l}h^sB_s f_{n+k}^{(s-1)}+\sum_{s=1}^{l}h^s f_n^{(s-1)}b_s \tag{2.2}$$

其中

* 蔡树棠推荐。

$$Z_{n+k}=(y_{n+1},\ y_{n+2},\ \cdots,\ y_{n+k})^T,\ \boldsymbol{f}_{n+k}^{(s)}=(f_{n+1}^{(s)},\ f_{n+2}^{(s)},\ \cdots,\ f_{n+k}^{(s)})^T$$

$$\boldsymbol{b}_s=(b_{s1},\ b_{s2},\ \cdots,\ b_{sk})^T,\ B_s=(\beta_{ij}^{(s)})_{k\times k}$$

$$f_n=f(x_n,y_n),\ y_n\sim y(x_n)$$

$$\boldsymbol{K}^s=(1^s,\ 2^s,\ \cdots,\ k^s)^T\qquad(s=1,\ 2,\ \cdots,\ kl)$$

对於方法（2.2），我们定义如下差分算子：

$$\mathscr{L}[Z(x+kh)]=Z(x+h)-\boldsymbol{K}^0y(x)-\sum_{s=1}^{l}h^sB_sZ^{(s)}(x+kh)-\sum_{s=1}^{l}h^sy^{(s)}(x)\boldsymbol{b}_s \tag{2.3}$$

此处

$$Z^{(s)}(x+kh)=(y^{(s)}(x+h),\ y^{(s)}(x+2h),\ \cdots,\ y^{(s)}(x+kh))^T$$

把(2.3)中的向量函数在x处展为Taylor级数，我们得

$$\mathscr{L}[Z(x+kh)]=\boldsymbol{d}_0y(x)+\boldsymbol{d}_1hy'(x)+\cdots+\boldsymbol{d}_qh^qy^{(q)}(x)+\boldsymbol{R}(x) \tag{2.4}$$

其中

$$\boldsymbol{R}(x)=(\boldsymbol{d}_{q+1}^{(1)}h^{q+1}y^{(q+1)}(\xi_1),\ \cdots,\ \boldsymbol{d}_{q+1}^{(k)}h^{q+1}y^{(q+1)}(\xi_k))^T$$

倘使方法的收敛阶为p，於是$\boldsymbol{d}_0=\boldsymbol{d}_1=\cdots=\boldsymbol{d}_p=0$，$\boldsymbol{d}_{p+1}\neq0$.比较(2.3)及(2.4)中$h$同次幂的系数有

$$\boldsymbol{d}_0=0 \tag{2.5a}$$

$$\boldsymbol{d}_s=\boldsymbol{K}^s/s!-B_1\boldsymbol{K}^{s-1}/(s-1)!-\cdots-B_{s-1}\boldsymbol{K}^1-B_s\boldsymbol{K}^0-\boldsymbol{b}_s\qquad(s=1,2,\cdots,\ l) \tag{2.5b}$$

$$\boldsymbol{d}_m=\boldsymbol{K}^m/m!-B_1\boldsymbol{K}^{m-1}/(m-1)!-\cdots-B_l\boldsymbol{K}^{m-l}/(m-l)!\qquad(m=l+1,\ l+2,\ \cdots,\ kl+l) \tag{2.5c}$$

定理2.1[1] 令k是块的大小，l是方法(2.2)中使用的导数的最高阶数，于是使得阶数为$p=kl+l$的形如(2.2)的块隐式单步法唯一存在.

为了讨论(2.2)的A—稳定性，我们将(2.2)用于试验方程$y'=\lambda y$，$\mathrm{Re}\lambda<0$，并注意到

$$\boldsymbol{f}_{n+k}^{(s)}=\lambda^{s+1}Z_{n+k} \tag{2.6}$$

把(2.6)代入(2.2)得

$$Z_{n+k}=(I-\bar{h}B_1-\cdots-\bar{h}^lB_l)^{-1}(\boldsymbol{K}^0+\bar{h}\boldsymbol{b}_1+\cdots+\bar{h}^l\boldsymbol{b}_l)y_n \tag{2.7}$$

此处$\bar{h}=\lambda h$，$h>0$是方法(2.2)的步长.令

$$(I-\bar{h}B_1-\cdots-\bar{h}^lB_l)^{-1}(\boldsymbol{K}^0+\bar{h}\boldsymbol{b}_1+\cdots+\bar{h}^l\boldsymbol{b}_l)=K(\bar{h}) \tag{2.8a}$$

$$K(\bar{h})\equiv(\xi_1(\bar{h}),\ \xi_2(\bar{h}),\ \cdots,\ \xi_k(\bar{h}))^T \tag{2.8b}$$

由(2.8a)及(2.7)得

$$Z_{n+k}=K(\bar{h})y_n$$

或

$$y_{n+j}=\xi_j(\bar{h})y_n=[\xi_j(\bar{h})][\xi_k(\bar{h})]^{n/k}y_0\qquad(j=1,\ 2,\ \cdots,\ k-1) \tag{2.9}$$

$$y_{n+k}=\xi_k(\bar{h})y_n=[\xi_k(\bar{h})]^{n/k+1}y_0 \tag{2.10}$$

从(2.9)及(2.10)知方法(2.2)在$\bar{h}$处稳定的充要条件为

$$|\xi_j(\bar{h})|<\infty,\qquad j\neq k$$

$$|\xi_k(\bar{h})|<1 \tag{2.11}$$

为检验条件(2.11)我们把(2.8a)改写为

$$K(\bar{h})=\sum_{i=0}^{kl}\boldsymbol{P}_i\bar{h}^i\Big/\sum_{i=0}^{kl}r_i\bar{h}^i \tag{2.12}$$

此处$\boldsymbol{P}_i=(\boldsymbol{P}_i^{(1)}, \boldsymbol{P}_i^{(2)}, \cdots, \boldsymbol{P}_i^{(k)})^T$是$k$维向量，$r_i$为待定常数，$i=0,1,\cdots, kl$. 从(2.12)及(2.8b)我们有

$$\xi_j(\bar{h})=\sum_{i=0}^{kl}\boldsymbol{P}_i^{(j)}\bar{h}^i\Big/\sum_{i=0}^{kl}r_i\bar{h}^i, \qquad j\neq k \tag{2.13}$$

$$\xi_k(\bar{h})=\sum_{i=0}^{kl}\boldsymbol{P}_i^{(k)}\bar{h}^i\Big/\sum_{i=0}^{kl}r_i\bar{h}^i \tag{2.14}$$

其中$\boldsymbol{P}_i^{(j)}$是$\boldsymbol{P}_i$的第j个分量.

三、$\xi_k(\bar{h})$的确定

把(2.12)代入(2.8a)得

$$\sum_{i=0}^{kl}\boldsymbol{P}_i\bar{h}^i-B_1\sum_{i=0}^{kl}\boldsymbol{P}_i\bar{h}^{i+1}-\cdots-B_l\sum_{i=0}^{kl}\boldsymbol{P}_i\bar{h}^{i+l}=\sum_{i=0}^{kl}r_i\bar{h}^i\boldsymbol{K}^0+\sum_{i=0}^{kl}r_i\bar{h}^{i+1}\boldsymbol{b}_1+\cdots+\sum_{i=0}^{kl}r_i\bar{h}^{i+l}\boldsymbol{b}_l \tag{3.1}$$

比较(3.1)中$\bar{h}$同次幂的系数得

$$\boldsymbol{P}_0=r_0\boldsymbol{K}^0 \tag{3.2a}$$

$$\boldsymbol{P}_i-B_1\boldsymbol{P}_{i-1}-\cdots-B_i\boldsymbol{P}_0=r_i\boldsymbol{K}^0+r_{i-1}\boldsymbol{b}_1+\cdots+r_0\boldsymbol{b}_i, \qquad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ l) \tag{3.2b}$$

$$\boldsymbol{P}_i-B_1\boldsymbol{P}_{i-1}-\cdots-B_l\boldsymbol{P}_{i-l}=r_i\boldsymbol{K}^0+r_{i-1}\boldsymbol{b}_1+\cdots+r_{i-l}\boldsymbol{b}_l, \qquad (i=l+1,\ l+2,\ \cdots,\ kl) \tag{3.2c}$$

$$\begin{aligned}&-B_{i-kl}\boldsymbol{P}_{kl}-B_{i-kl+1}\boldsymbol{P}_{kl-1}-\cdots-B_l\boldsymbol{P}_{i-l}\\&=r_{kl}\boldsymbol{b}_{i-kl}+r_{kl-1}\boldsymbol{b}_{i-kl+1}+\cdots+r_{i-l}\boldsymbol{b}_l \qquad (i=kl+1,\ kl+2,\ \cdots,\ kl+l)\end{aligned} \tag{3.2d}$$

定理3.1 倘方法(2.2)的阶是$p=kl+l$, 则

$$\boldsymbol{P}_i=\sum_{s=0}^{i}r_{i-s}\boldsymbol{K}^s/s! \qquad (i=0,\ 1,\ \cdots,\ kl) \tag{3.3}$$

证明 我们分两步证明.

(1) $0\leqslant i\leqslant l$, (2) $l\leqslant i\leqslant kl$. 我们先对情况(1)进行证明. 若令$r_0=1$(不失一般性), 则$i=0$时(3.3)是真的. 令$i=1$, 从(3.2b)有

$$\boldsymbol{P}_1=B_1\boldsymbol{P}_0+r_1\boldsymbol{K}^0+r_0\boldsymbol{b}_1=B_1r_0\boldsymbol{K}^0+r_1\boldsymbol{K}^0+r_0\boldsymbol{b}_1 \tag{3.4}$$

从(2.5b)中$\boldsymbol{d}_1=0$. 得$B_1\boldsymbol{K}^0+\boldsymbol{b}_1=\boldsymbol{K}^1$代入(3.4)得

$$\boldsymbol{P}_1=r_0\boldsymbol{K}^1+r_1\boldsymbol{K}^0=\sum_{s=0}^{1}r_{1-s}\boldsymbol{K}^s/s!$$

故(3.3)对$i=1$时是真的.

假定(3.3)对$i=1,\ 2,\ \cdots,\ i-1$是真的, 我们来证明对$i+1\leqslant l$(3.3)亦是真的. 从(3.2b)

$$\begin{aligned}\boldsymbol{P}_{i+1}&=B_1\boldsymbol{P}_i+B_2\boldsymbol{P}_{i-1}+\cdots+B_{i+1}\boldsymbol{P}_0+r_{i+1}\boldsymbol{K}^0+r_i\boldsymbol{b}_1+\cdots+r_0\boldsymbol{b}_{i+1}\\&=B_1\sum_{s=0}^{i}r_{i-s}\boldsymbol{K}^s/s!+B_2\sum_{s=0}^{i-1}r_{i-1-s}\boldsymbol{K}^s/s!+\cdots+B_{i+1}\boldsymbol{K}^0+r_{i+1}\boldsymbol{K}^0+r_i\boldsymbol{b}_1+\cdots+r_0\boldsymbol{b}_{i+1}\\&=r_0(B_1\boldsymbol{K}^i/i!+B_2\boldsymbol{K}^{i-1}/(i-1)!+\cdots+B_{i+1}\boldsymbol{K}^0+\boldsymbol{b}_{i+1})\\&\quad+r_1(B_1\boldsymbol{K}^{i-1}/(i-1)!+B_2\boldsymbol{K}^{i-2}/(i-2)!+\cdots+B_i\boldsymbol{K}^0+\boldsymbol{b}_i)\end{aligned}$$

$$+\cdots+r_i(B_1\boldsymbol{K}^0+\boldsymbol{b}_1)+r_{i+1}\boldsymbol{K}^0$$

在(2.5b)中令$\boldsymbol{d}_s=0$ $(s=1,\ 2,\ \cdots,\ i+1)$

$$\boldsymbol{P}_{i+1}=r_0\boldsymbol{K}^{i+1}/(i+1)!+r_1\boldsymbol{K}^i/i!+\cdots+r_i\boldsymbol{K}^1+r_{i+1}\boldsymbol{K}^0$$

$$=\sum_{s=0}^{i+1}r_{i+1-s}\boldsymbol{K}^s/s!$$

从而(3.3)对$i\leqslant l$都是真的.

情况(2)$l\leqslant i\leqslant kl$的证明完全类似于(1)的证明，只要注意(2.5c)及(1)的结果，这便完成了定理3.1的证明.

引理3.1 倘方法(2.2)的阶$p=kl+l$则

$$\sum_{s=0}^{kl}r_{kl-s}\boldsymbol{K}^{s+j}/(s+j)!=0,\qquad 1\leqslant j\leqslant l \tag{3.5}$$

证明 对$j=1$，在(3.2d)中令$i=kl+1$，我们得

$$-B_1\boldsymbol{P}_{kl}-B_2\boldsymbol{P}_{kl-1}-\cdots-B_l\boldsymbol{P}_{kl+1-l}=r_{kl}\boldsymbol{b}_1+r_{kl-1}\boldsymbol{b}_2+\cdots+r_{kl+1-l}\boldsymbol{b}_l$$

再由(3.3)及在(2.5b)中令$\boldsymbol{d}_s=0$ $(s=1,\ 2,\ \cdots,\ l)$得

$$-B_1\sum_{s=0}^{kl}r_{kl-s}\boldsymbol{K}^s/s!-B_2\sum_{s=0}^{kl-1}r_{kl-1-s}\boldsymbol{K}^s/s!-\cdots-B_l\sum_{s=0}^{kl+1-l}r_{kl+1-l-s}\boldsymbol{K}^s/s!$$

$$=r_{kl}(\boldsymbol{K}^1-B_1\boldsymbol{K}^0)+r_{kl-1}(\boldsymbol{K}^2/2!-B_1\boldsymbol{K}^1-B_2\boldsymbol{K}^0)+\cdots$$
$$+r_{kl+1-l}(\boldsymbol{K}^l/l!-B_1\boldsymbol{K}^{l-1}/(l-1)!-\cdots-B_{l-1}\boldsymbol{K}^1-B_l\boldsymbol{K}^0)$$

化简上式得

$$\sum_{s=l}^{kl}r_{kl-s}(-B_1\boldsymbol{K}^s/s!-B_2\boldsymbol{K}^{s-1}/(s-1)!-\cdots-B_l\boldsymbol{K}^{s-l+1}/(s-l+1)!)$$

$$=\sum_{s=0}^{l-1}r_{kl-s}\boldsymbol{K}^{s+1}/(s+1)!$$

在(2.5c)中令$\boldsymbol{d}_s=0$ $(s=l,\ l+1,\ \cdots,\ kl)$，用于上式有

$$\sum_{s=l}^{kl}r_{kl-s}[-\boldsymbol{K}^{s+1}/(s+1)!]=\sum_{s=0}^{l-1}r_{kl-s}\boldsymbol{K}^{s+1}/(s+1)!$$

即

$$\sum_{s=0}^{kl}r_{kl-s}\boldsymbol{K}^{s+1}/(s+1)!=0$$

这说明(3.5)式对$j=1$是真的.

下面的证明只需使用归纳法．假定(3.5)式对1，2，…，$j-1$及$j<l$是真的，从而证明$j+1\leqslant l$时(3.5)亦是真的．为节约篇幅，我们仅指出证明的线索．事实上这个证明与$j=1$时证明类似，只要注意到(3.2d)、(3.3)、(2.5b)及(2.5c)，然后使用归纳法假定，便得出

$$\sum_{s=0}^{kl}r_{kl-s}\boldsymbol{K}^{s+j}/(s+j)!=0,\qquad 1\leqslant j\leqslant l$$

这便证明了引理3.1.

在指出引理3.2之前，我们先导出r_i $(i=0,\ 1,\ \cdots,\ kl)$的显式表达式．为此令

$$g(x)=\sum_{s=0}^{kl} r_{kl-s}x^{s+l}/(s+l)!$$

在(3.5)中命 $j=l$，有

$$g(i)=g'(i)=\cdots=g^{(l-1)}(i)=0 \qquad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ k)$$

再令

$$\varphi(x)=[(x-1)(x-2)\cdots(x-k)]^l$$

则

$$g(x)/x^l=\sum_{s=0}^{kl} r_{kl-s}x^s/(s+l)!=\varphi(x)/(kl+l)! \tag{3.6}$$

于是

$$\varphi(x)=\sum_{s=0}^{kl} r_{kl-s}x^s(kl+l)!/(s+l)! \tag{3.7}$$

再将$\varphi(x)$在$x=0$处展为Taylor级数

$$\varphi(x)=\sum_{s=0}^{kl}\varphi^{(s)}(0)x^s/s! \tag{3.8}$$

比较(3.7)与(3.8)得

$$r_{kl-s}=(s+l)(s+l-1)\cdots(s+1)\varphi^{(s)}(0)/(kl+l)! \tag{3.9}$$

引理3.2 倘使方法(2.2)的阶$p=kl+l$则

$$P_i^{(k)}=(-1)^i r_i \qquad (i=0,\ 1,\ \cdots,\ kl) \tag{3.10}$$

其中$P_i^{(k)}$是P_i的第k个分量$P_i^{(k)}$.

证明 从(3.3)式. 有

$$P_i^{(k)}=\sum_{s=0}^{i} r_{i-s}k^s/s! \tag{3.11}$$

将(3.9)代入(3.11)，并化简，我们有

$$P_i^{(k)}=\Big\{\sum_{j=0}^{l} C_l^j C_{kl+l-i}^{l-j}(l-j)!\sum_{s=0}^{i} s(s-1)\cdots(s-j+1)k^s \cdot\varphi^{(kl-i+s)}(0)/s!\Big\}\Big/(kl+l)! \tag{3.12}$$

应用(3.8)式，进行适当的运算得

$$x^j\varphi^{(kl-i+j)}(x)=\sum_{s=0}^{i} s(s-1)\cdots(s-j+1)x^s\varphi^{(kl-i+s)}(0)/s! \tag{3.13}$$

令$x=k$代入上式，得

$$k^j\varphi^{(kl-i+j)}(k)=\sum_{s=0}^{i} s(s-1)\cdots(s-j+1)k^s\varphi^{(kl-i+s)}(0)/s! \tag{3.14}$$

将(3.14)代入(3.12)得

$$P_i^{(k)}=\Big\{\sum_{j=0}^{l} C_l^j C_{kl-i+l}^{l-j}(l-j)!k^j\varphi^{(kl-i+j)}(k)\Big\}\Big/(kl+l)! \tag{3.15}$$

在恒等式 $(x-k)^l\varphi(k-x)=(-1)^{kl}\varphi(x)x^l$ 两边取 $kl-i+l$ 阶导数并置 $x=0$ 得

$$\sum_{j=0}^{l} C_l^j C_{kl-i+l}^{l-j}(l-j)!k^j\varphi^{(kl-i+j)}(k)=(-1)^i C_{kl-i+l}^l l!\varphi^{(kl-i)}(0)$$

上式两边除 $(kl+l)!$ 再联合(3.9)与(3.15)得

$$P_i^{(k)}=(-1)^i r_i \qquad (i=0,\ 1,\ \cdots,\ kl)$$

我们把(3.9)及(3.10)的结果列成定理的形式：

定理3.2 设 $\xi_k(\bar{h})=P(\bar{h})/Q(\bar{h})$,

$$P(\bar{h})=\sum_{i=0}^{kl} t_i\bar{h}^i,\quad Q(\bar{h})=\sum_{i=0}^{kl} r_i\bar{h}^i$$

则 $\quad r_i=(kl-i+1)(kl-i+2)\cdots(kl-i+l)\varphi^{(kl-i)}(0)/(kl+l)!$

$\quad t_i=(-1)^i r_i$

其中 $\quad \varphi(x)=[(x-1)(x-2)\cdots(x-k)]^l$

四、稳定性分析

定理4.1[1] 倘使 $\xi_k(\bar{h})=Q(-\bar{h})/Q(\bar{h})$, $Q(\bar{h})$ 在左半平面没有零点，则方法(2.2)是 A—稳定的。

定理4.2(Hurwitz) 对实系数多项式

$$P(z)=a_0z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_{n-1}z+a_n \qquad (*)$$

其Hurwitz行列式定义为

$$\Delta_1=a_1,\quad \Delta_2=\begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix},\quad \Delta_3=\begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{vmatrix}$$

$$\cdots\cdots$$

$$\Delta_n=\begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ a_{2n-1} & a_{2n-2} & a_{2n-3} & a_{2n-4} & a_{2n-5} & \cdots & a_0 \end{vmatrix} \quad 倘\ i>n,\ a_i=0$$

则多项式(*)的根的实部全为负的充要条件为 $\Delta_1>0$, $\Delta_2>0$, $\cdots$, $\Delta_{n-1}>0$, $\Delta_n>0$。

那末为了判定 $Q(\bar{h})$ 在左半平面无零点，我们只要将 Hurwitz 定理用于 $Q(-\bar{h})$，如果 $Q(-\bar{h})$ 的根的一切实部为负的，那么断定 $Q(\bar{h})$ 在左半平面无零点。我们用计算机符号运算来判断 Δ_i 的符号，得出如下结论

当 $l=1$, $k\leqslant 8$; 当 $l=2$, $k\leqslant 5$; 当 $l=3$, 4, $k\leqslant 3$; 当 $5\leqslant l\leqslant 10$, $k\leqslant 2$, $Q(\bar{h})$ 的根位于右半平面，由定理4.1知方法(2.2)是 A—稳定的。特别要指出的是当 $l=1$ 时，我们的结果与Watts及Shampine在1972年得出的结果是一致的（见[2]）。

对 $l\geqslant 11$, $k=2$ 时已不是 A—稳定的，而当 $k=1$ 时，由定理3.2

$$r_i=(l-i+1)(l-i+2)\cdots(l-i+l)\varphi^{(l-i)}(0)/(2l)!,\qquad (i=0,1,\ 2,\ \cdots,\ l)$$

此处 $\quad \varphi(x)=(x-1)^l$,

于是

$$r_i=(-1)^i(2l-i)!l!/[(l-i)!i!(2l)!] \tag{4.1}$$

$$t_i=(2l-i)!l!/[(l-i)!i!(2l)!] \tag{4.2}$$

根据Birkhoff及Varga[3]指明，如果一个有函数$R(\bar{h})$是$\exp[\bar{h}]$的对角 Pade′ 逼近，那么$|R(\bar{h})|<1$。因此，我们只要指明$\xi_k(\bar{h})$是$\exp[\bar{h}]$的对角Pade′逼近，便证明了方法(2.2)是A—稳定的。

倘$\hat{P}_k(z)/\hat{Q}_j(z)$是$e^z$的Pade′逼近，那么

$$\hat{P}_k(z)=\sum_{s=0}^{k}\{k!(j+k-s)!/[(k-s)!(j+k)!s!]\}z^s \tag{4.3}$$

$$\hat{Q}_j(z)=\sum_{s=0}^{j}\{(-1)^s j!(k+j-s)!/[(j-s)!(j+k)!s!]\}z^s \tag{4.4}$$

联合(4.1)、(4.2)、(4.3)及(4.4)我们立即看出

$$\xi_k(\bar{h})=\hat{P}_l(\bar{h})/\hat{Q}_l(\bar{h})$$

即 $\xi_k(\bar{h})$是$\exp[\bar{h}]$的对角Pade′逼近，从而对$l\geqslant 11$及$k=1$时(2.2)是A—稳定的。

我们把上列结果用定理的形式表达出来：

定理4.3 对收敛阶$p=kl+l$的方法(2.2)，当$l=1$，$k\leqslant 8$；$l=2$，$k\leqslant 5$；$l=3$，4，$k\leqslant 3$；$5\leqslant l\leqslant 10$，$k\leqslant 2$以及$l\geqslant 11$，$k=1$时它是A—稳定的。

五、数 值 例

这一节，我们对$l=k=2$的情况，用定理3.2中的公式计算r_i，$i=0$，1，2…，4，而用公式(3.11)计算，$\mathbf{P}_i^{(k)}=t_i$，然后与文献[1]中的结果比较。

按定理3.2中的结果

$$r_i=(kl-i+1)(kl-i+2)\cdots(kl-i+l)\varphi^{(kl-i)}(0)/(kl+l)!$$

这里$k=l=2$，故

$$r_i=(4-i+1)(4-i+2)\varphi^{(4-i)}(0)/6!,\qquad (i=0,\ 1,\ \cdots,\ 4)$$

$$\varphi(x)=[(x-1)(x-2)]^2$$

不难算出

$$r_0=1,\ r_1=-1,\ r_2=13/30,\ r_3=-1/10,\ r_4=1/90$$

再按公式(3.11)计算$\mathbf{P}_i^{(k)}=t_i$，

$$\mathbf{P}_i^{(k)}=\sum_{s=0}^{i}r_{i-s}k^s/s!$$

结果为

$$t_0=1,\ t_1=1,\ t_2=13/30,\ t_3=1/10,\ t_4=1/90$$

从而

$$\xi_k(\bar{h})=\frac{1+\bar{h}+13\bar{h}^2/30+\bar{h}^3/10+\bar{h}^4/90}{1-\bar{h}+13\bar{h}^2/30-\bar{h}^3/10+\bar{h}^4/90}$$

这与文[1]中的结果完全一致，而[1]中是用更为复杂的方法求出的。同时，这里不难验证$\Delta_1>0$，$\Delta_2>0$，$\Delta_3>0$及$\Delta_4>0$，故$|\xi_k(\bar{h})|<1$。

参 考 文 献

[1] 匡蛟勋，带有高阶导数的块隐式单步法，高校计算数学学报，9(1) (1987)，15—23.

[2] Watts, H. A. and L. F., Shampine, *A*-stable block implicit one-step methods, *BIT*, 12 (1972), 252—266.

[3] Birkhoff, G. and R. S. Varga, Discretization errors for well-set Cauchy problems (I), *J. Math. Phys.*, 4 (1965), 1—23.

The Numerical Stabilities of Multiderivative Block Method

Kuang Jiao-xun Lin Yu-hua

(Shanghai Normal University, Shanghai)

Abstract

In [1], a class of multiderivative block methods (MDBM) was studied for the mumerical solutions of stiff ordinary differential equations. This paper is aimed at solving the problem proposed in [1] that what conditions should be fulfilled for MDBMs in order to guarantee the *A*-stabilities. The explicit expressions of the polynomials $P(\bar{h})$ and $Q(\bar{h})$ in the stability functions $\xi_k(\bar{h})=P(\bar{h})/Q(\bar{h})$ are given. Furthermore, we prove $P(-\bar{h})=Q(\bar{h})$. With the aid of symbolic computations and the expressions of diagonal Pade' approximations, we obtained the biggest block size k of the *A*-stable MDBM for any given l (the order of the highest derivatives used in MDBM, $l\geqslant 1$).

Key words multiderivative block methods, *A*-stability, block size