应用数学和力学，第14卷第2期（1993年2月）
Applied Mathematics and Mechanics
应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

非饱和土固结的混合物理论（Ⅰ）

陈正汉　谢定义　刘祖典

（重庆 后勤工程学院）　（西安 陕西机械学院）

（蒋咏秋推荐，1992年5月22日收到）

摘　要

非饱和土是由土粒、水、气组成的三相介质，本文以混合物理论为基础研究了非饱和土的固结问题。文中导出了各向异性多孔介质及非饱和土的有效应力的理论公式，把有效应力原理和Curie对称原理作为非饱和土的两个重要的本构原理，建立了非饱和土固结的数学模型：由25个方程求解25个未知量。在增量线性化的情况下，本模型简化为5个控制方程求解5个未知量：3个固相位移、孔隙水压力和孔隙气压力。模型中包含7个材料参数，都可由试验测定，便于工程应用。Biot 理论是本模型的特例。

关键词　非饱和土　固结　混合物理论　有效应力　Curie对称原理

一、引　言

工程中遇到的土通常处于非饱和状态，因此，非饱和土的固结问题是土力学的一个基本课题[1]，也是工程中急待解决的问题[2]。非饱和土是由土粒（固相）、水（液相）和空气（或水蒸汽）组成的三相介质，其力学性质十分复杂。非饱和土的固结涉及到三相的耦合运动及三相间的应力转移等复杂过程，迄今对这些问题的研究大多数尚处于初级阶段[2]。在理论研究方面主要限于一维问题，用唯象方法建立控制方程[3,4]，缺乏适当的理论基础和严谨的理论体系。对于二维和三维问题，Fredlund经多年努力，未能成功[5,6]。

近年来，有的学者尝试用混合物理论研究固-液-气三相多孔介质[7~9]。但在这些研究工作中，有的引入的附加变量太多使问题更加复杂[7]，有的人为假设太多而缺乏理论根据与实验基础[8]，有的则包含着模糊不清的概念[9]，因而都难以应用于工程实际。

本文把非饱和土视为不溶混的三相混合物，用混合物理论的观点研究非饱和土的固结问题。与现有的多孔介质的混合物理论相比，本文的特点在于：(1)把有效应力原理和Curie原理作为非饱和土的两个重要的本构原理。(2)导出了各向异性多孔介质及非饱和土的有效应力的理论公式。(3)在不计热效应的情况下，直接应用本构原理建立非饱和土固结所必需的本构方程而不借助于熵、自由能及化学势等概念[10~12]。(4)控制方程组以增量形式给出，包含的未知数和材料参数少，为工程应用提供了方便。(5)一维问题和二维问题已分别给出了解析解和有限元解[23]，其结果可直接应用于工程实际。

二、基本假设和场方程

本文采用文[10～12]中的符号及有关术语．为了简化问题，特作以下基本假设：

1．不考虑相变和气在水中的溶解．

2．组分应力是对称的．

3．土是均质各向同性的，小变形，准静态．

4．土中水与气各自连通，水和气不承受剪应力．

5．土粒和水不可压缩．

6．等温过程，不计热效应，气相服从理想气体的状态方程．

此外，沿用土力学惯例，以压应力和压应变为正．

用ϕ，ρ和γ分别表示某组分的体积分数、体密度和真密度，用下标s，f和g分别代表固相、液相和气相，则对于非饱和土有：

$$\left.\begin{array}{ll}\phi_s=1-n, & \rho_s=(1-n)\gamma_s \\ \phi_f=ns, & \rho_f=ns\gamma_f \\ \phi_g=n(1-s), & \rho_g=n(1-s)\gamma_g,\ \ \gamma_g=\dfrac{\Omega}{R\Theta}P_g\end{array}\right\} \tag{2.1}$$

式中，n是土的孔隙率，s是水的饱和度，Ω是气体的分子量，R是气体普适常数，Θ是绝对温度，$P_g=p_a+u_a$为绝对气压，而p_a是大气压，u_a则是气压力超过大气压以上的部分．以$\boldsymbol{X}_s$，$\boldsymbol{X}_f$和$\boldsymbol{X}_g$分别表示三相的位移，用字母右上角的撇号表示对组分运动的物质导数，三相的连续方程分别为

$$\left.\begin{array}{ll}\text{固相} & \dfrac{\partial(1-n)}{\partial t}+\nabla\cdot[(1-n)\boldsymbol{X}_s']=0 \\ \text{水} & \dfrac{\partial(ns)}{\partial t}+\nabla\cdot[ns\boldsymbol{X}_f']=0 \\ \text{气} & \dfrac{\partial[n(1-s)P_g]}{\partial t}+\nabla\cdot[n(1-s)P_g\boldsymbol{X}_g']=0\end{array}\right\} \tag{2.2}$$

选用水的、气的和总体的动量守恒方程作为运动方程，用P_f表示孔隙水压力，$\mathbf{T}$表示总应力张量，$\hat{\boldsymbol{p}}_f$和$\hat{\boldsymbol{p}}_g$分别表示水和气所受到的扩散阻力（动量供给量），略去体力和惯性力可得：

$$\nabla(nsP_f)=\hat{\boldsymbol{p}}_f,\quad \nabla[n(1-s)P_g]=\hat{\boldsymbol{p}}_g,\quad \nabla\cdot\mathbf{T}=0 \tag{2.3}$$

根据基本假设2，动量矩守恒方程自动满足．由于不计热效应，可以不应用能量方程．

(2.2)和(2.3)共12个场方程，其中包含n，s，P_f，P_g，$\boldsymbol{X}_s'$，$\boldsymbol{X}_f'$，$\boldsymbol{X}_g'$，$\hat{\boldsymbol{p}}_f$，$\hat{\boldsymbol{p}}_g$和$\mathbf{T}$共25个未知量，必须再补充13个本构方程才能形成封闭的方程组．

三、本构原理和有效应力

建立本构关系应以本构原理为指南．混合物理论中常用的本构原理有等存性原理、相容性原理、客观性原理等[10]．由于混合物的独立本构变量较多，其本构关系远比单一介质复杂，尽量减少本构变量的数目便成了学者们努力的目标之一．对于不溶混的混合物，如流

体-多孔介质，许多学者提出了相分离原理[13,14]，但该原理对土并不适用[15]。

为了建立非饱和土的本构关系，我们分别从物理学和土力学引入Curie对称原理和有效应力原理。这是本文最关键的一步。

Curie对称原理[16] 在各向同性体系中，张量阶数之差为奇数的两个量之间不存在相互作用。

有效应力原理[17] 非和饱土的体积变形由有效应力控制。

它们是非饱和土的两个重要的本构原理。前者早已定论，后者在使用上尚存在困难。问题主要是对Bishop提出的非饱和土的有效应力公式[17]的正确性有疑虑[2]，且测定其中包含的参数尚没有比较成熟的方法。因此，从理论上建立非饱和土的有效应力公式是本文的重要任务之一。

自Terzaghi于1923年提出饱和土的有效应力方程

$$\sigma=T-P_f \tag{3.1}$$

以来，Biot和Willis[18]，Skempton[17]，Nur和Byerlee[19]先后从不同的角度推得：对于多孔介质的体积变形，有效应力的精确表达式为

$$\sigma=T-\left(1-\frac{C_s}{C}\right)P_f=T-\left(1-\frac{K}{K_s}\right)P_f \tag{3.2}$$

式中，σ=有效应力，T=总应力，C=土骨架的压缩性$=1/K$，K=土骨架的体变模量，C_s=土颗粒的压缩性$=1/K_s$，K_s=土颗粒的体变模量.对土而言，$K\ll K_s$，表明Terzaghi公式(3.1)是足够精确的。

对于非饱和土，Bishop考虑到应包含饱水与饱气（干土）两个极端的情况，提出以下的有效应力公式

$$\sigma=T-[\chi P_f+(1-\chi)P_g] \tag{3.3}$$

式中，χ=有效应力参数，与饱和度有关，$0\leqslant\chi\leqslant1$. 1960年，Skempton把上式改为

$$\sigma=T-s_\chi P_f,\quad s_\chi=1+(1-\chi)(P_g-P_f)/P_f \tag{3.4}$$

考虑到土的压缩性，类比(3.2)与(3.1)间的关系，他直接给出非饱和土的有效应力的一般表达式

$$\sigma=T-(1-C_s/C)s_\chi P_f=T-(1-K/K_s)[\chi P_f+(1-\chi)P_g] \tag{3.5}$$

显然，式(3.3)和(3.5)都是由直觉判断得出的，有必要对它们从理论上加以考察。

先考虑各向异性线性变形的多孔介质。设试样受到的总应力为T_{ij}，孔隙中充满两种不溶混的液体，它们的体积分数分别是sn和$(1-s)n$，s是第一种流体的饱和度，n是多孔介质的孔隙率，并设孔隙压力$P_2>P_1>0$。试样受到的这种应力状态可以设想为是经过三个加载步骤实现的：

第一步，在孔隙sn中施加孔压P_1，在孔隙$(1-s)n$中施加$P_2'=P_1$，并在试样外施加总应力$T_{ij}'=P_1\delta_{ij}$。这时，从变形上看，试样等价于一个无孔固体，即试样中的孔隙可用骨架材料填充，试样的应变ε_{ij}^1为

$$\varepsilon_{ij}^1=C_{ijkl}^0P_1\delta_{kl}=P_1C_{ijkl}^0 \tag{3.6}$$

式中C_{ijkl}^0是多孔介质骨架材料本身的变形柔度张量。

第二步，在孔隙$(1-s)n$中施加$P_2''=P_2-P_1$，在试样外施加总应力$T_{ij}''=P_2''\delta_{ij}$。这时，孔隙$(1-s)n$部分可用骨架材料代替，试样等价于一个孔隙率为$ns$的多孔固体，其应变$\varepsilon_{ij}^2$为

$$\varepsilon_{ij}^2=C_{ijkl}^{sn}(P_2-P_1)\delta_{kl}=C_{ijkl}^{sn}(P_2-P_1) \tag{3.7}$$

式中，C^{sn}_{ijkl}是孔隙率为sn的多孔材料的柔度张量.

第三步，对试样仅施加外围总应力T'''_{ij}

$$T'''_{ij}=T_{ij}-T'_{ij}-T''_{ij}=T_{ij}-P_1\delta_{ij}-(P_2-P_1)\delta_{ij}=T_{ij}-P_2\delta_{ij} \tag{3.8}$$

这时试样等价于一个孔隙率为n但无孔隙流体的多孔固体，其应变ε^3_{ij}为

$$\varepsilon^3_{ij}=C^n_{ijkl}(T_{kl}-P_2\delta_{kl}) \tag{3.9}$$

C^n_{ijkl}是孔隙率为n的多孔固体的柔度张量.

根据线弹性假设，应用叠加原理得试样的总应变为

$$\varepsilon_{ij}=\varepsilon^1_{ij}+\varepsilon^2_{ij}+\varepsilon^3_{ij} \tag{3.10}$$

另一方面，根据有效应力的概念，

$$\varepsilon_{ij}=C^n_{ijkl}\sigma_{kl} \tag{3.11a}$$

或

$$\sigma_{ij}=M^n_{ijkl}\varepsilon_{kl} \tag{3.11b}$$

式中，M^n_{ijkl}是孔隙率为n的多孔固体的弹性张量. 把(3.6)～(3.10)代入(3.11b得)

$$\sigma_{ij}=M^n_{ijkl}[P_1C^0_{klmm}+(P_2-P_1)C^{sn}_{klmm}+C^n_{klmn}T_{mn}-P_2C^n_{klmm}] \tag{3.12}$$

利用恒等式

$$M^n_{ijkl}C^n_{klmn}=(\delta_{im}\delta_{jn}+\delta_{in}\delta_{jm})/2 \tag{3.13}$$

(3.12)变为

$$\sigma_{ij}=T_{ij}-P_1M^n_{ijkl}(C^{sn}_{klmm}-C^0_{klmm})-P_2(\delta_{ij}-M^n_{ijkl}C^{sn}_{klmm}) \tag{3.14}$$

这就是各向异性弹性多孔介质中有两种不溶混液体流动时的有效应力公式. 这里所说的各向异性包括三个方面：骨架材料的各向异性，由C^0_{ijkl}反映；多孔介质的结构的各向异性，由M^n_{ijkl}反映；孔隙率为sn的多孔介质的结构的各向异性，由C^{sn}_{ijkl}反映.

若骨架材料和两种有孔隙结构的多孔介质都是各向同性的，利用

$$\left.\begin{aligned}&M^n_{ijkl}=\lambda^n\delta_{ij}\delta_{kl}+\mu^n(\delta_{ik}\delta_{jl}+\delta_{il}\delta_{jk})\\&C^0_{klmm}=\frac{1}{3K^0}\delta_{kl},\quad C^{sn}_{klmm}=\frac{1}{3K^{sn}}\delta_{kl}\end{aligned}\right\} \tag{3.15}$$

则(3.14)简化为

$$\sigma_{ij}=T_{ij}-P_1\left(\frac{K^n}{K^{sn}}-\frac{K^n}{K^0}\right)\delta_{ij}-P_2\left(1-\frac{K^n}{K^{sn}}\right)\delta_{ij} \tag{3.16}$$

在(3.15)和(3.16)中，λ^n和μ^n是孔隙率为n的多孔介质的Lame常数，K^0，K^{sn}和K^n则分别是骨架材料本身的体变模型量、孔隙率为sn的多孔介质的体变模量及孔隙率为n的多孔介质的体变模量.

对于非饱和土，由于孔隙水压力小于零，故情况稍复杂一点. 为了简化讨论，本文仅研究各向同性的情况. 设土样受到的围压（总应力）是T，孔隙水压力$P_f<0$，孔隙气压力$P_g>0$. 仍设想土样的应力状态是通过三个步骤实现的：

第一步，施加$T'=P'_g=P_f<0$，土样受拉力作用，其体应变θ_1为

$$\theta_1=-\frac{1}{{}^0K}|P_f|=\frac{1}{{}^0K}P_f \tag{3.17}$$

式中${}^0K$为土粒的膨胀模量.

第二步，在$(1-s)n$孔隙部分施加P''_g，

$$P''_g=P_g+|P_f|+P_g-P_f$$

并施加围压$T''=P''_g$，土的体应变θ_2为

$$\theta_2=\frac{1}{K^{sn}}P''_g=\frac{1}{K^{sn}}(P_g-P_f) \tag{3.18}$$

第三步，只施加围压T'''

$$T'''=T-T'-T''=T-P_g$$

土的体应变θ_3为

$$\theta_3=\frac{1}{K^n}T'''=\frac{1}{K^n}(T-P_g) \tag{3.19}$$

结合(3.17)～(3.19)得土的总应变，并代入有效应力公式

$$\sigma=K^n\theta \tag{3.20}$$

得

$$\sigma=T-\left(\frac{K^n}{K^{sn}}-\frac{K^n}{{}^0K}\right)P_f-\left(1-\frac{K^n}{K^{sn}}\right)P_g \tag{3.21}$$

对土粒而言，在小变形条件下，可以认为${}^0K=K^0$，则(3.12)就归结为(3.16)式。因此，(3.16)式是土中充满两种不溶混流体的有效应力的普遍表达式。

如土粒是不可压缩的，即$K^0\to\infty$，式(3.21)变为

$$\sigma=T-\left[\frac{K^n}{K^{sn}}P_f+\left(1-\frac{K^n}{K^{sn}}\right)P_g\right] \tag{3.22}$$

与Bishop 公式(3.3)比较可知

$$\chi=K^n/K^{sn} \tag{3.23}$$

对于饱和土，$s=1$，$K^{sn}=K^n$，$\chi=1$，(3.22)就退化为Terzaghi 方程(3.1)。对于饱气土（干土），$s=0$，$K^{sn}=K^0\to\infty$，$\chi=0$，(3.22)式退化为

$$\sigma=T-P_g \tag{3.24}$$

由于总有$K^n\leqslant K^{sn}$，故$0\leqslant\chi\leqslant1$。因此，当Bishop 公式(3.3)中的参数χ以(3.23)式定义时，它是不计土粒压缩性的有效应力的正确表达式。由(3.23)易见，χ与土的饱和度有关。

(3.21)式还可被写成

$$\sigma=T-\left(1-\frac{K^n}{K^0}\right)\left(\frac{1/K^{sn}-1/K^0}{1/K^n-1/K^0}P_f+\frac{1-1/K^{sn}}{1-K^n/K^0}P_g\right) \tag{3.25}$$

由于

$$1-\frac{1/K^{sn}-1/K^0}{1/K^n-1/K^0}=\frac{1/K^n-1/K^{sn}}{1/K^n-1/K^0}=\frac{1-K^n/K^{sn}}{1-K^n/K^0} \tag{3.26}$$

比较Skempton 公式(3.5)和(3.25)可知，在考虑土粒压缩性时有

$$\chi=\frac{1/K^{sn}-1/K^0}{1/K^n-1/K^0}=\frac{K^0/K^{sn}-1}{K^0/K^n-1} \tag{3.27}$$

式(3.23)和(3.27)可用来测定χ值。对于土用前式，对于岩石和混凝土用后式。它们赋予参数χ明确的物理意义。

由于有效应力的概念明确，近年来又引起了许多学者的重视和兴趣。在非饱和土有效应力方面提出了多种不同的表达式[8,9,10~22]，但多属于误解，笔者在文[15，23]中进行了澄清。

最后，我们把(3.21)式推广到更一般情况。设多孔介质的孔隙中有N种不溶混的流体，孔隙压力依次为$P_1<P_2<\cdots<P_N$，对应的饱和度为s_1，s_2，…，s_N，且

$$s_1+s_2+\cdots+s_N=1 \tag{3.28}$$

则有效应力为

$$\sigma=T-\chi_1P_1-\chi_2P_2-\cdots-\chi_{N-1}P_{N-1}-\chi_NP_N \tag{3.29}$$

式中

$$\left.\begin{aligned}&\chi_1=K^n\left(\frac{1}{K^{s_1n}}-\frac{1}{K^0}\right),\quad \chi_2=K^n\left(\frac{1}{K^{(s_1+s_2)n}}-\frac{1}{K^{s_1n}}\right)\\&\cdots\cdots\\&\chi_{N-1}=K^n\left(\frac{1}{K^{(s_1+s_2+\cdots+s_{N-1})n}}-\frac{1}{K^{(s_1+s_2+\cdots+s_{N-2})n}}\right)\\&\chi_N=K^n\left(\frac{1}{K^n}-\frac{1}{K^{(s_1+s_2+\cdots+s_{N-1})n}}\right)\end{aligned}\right\} \tag{3.30}$$

当多孔骨架材料不可压缩($K^0\to\infty$)且孔隙中只有两种流体时，则

$$\chi_1=\frac{K^n}{K^{s_1n}}=\chi,\quad \chi_2=1-\frac{K^n}{K^{s_1n}}=1-\chi \tag{3.31}$$

(3.29)式就退化为(3.22)式。

四、本构关系和封闭方程

在场方程的25个未知量中，选 $\hat{p}_f$，$\hat{p}_g$，T 和s为13个相关本构变量，其余12个均可作为本构变量。但由(2.2a)知，n只依赖于X'_s，故可以省去n。考虑到应力-应变关系中必须包含应变，而应变由几何关系

$$\boldsymbol{\varepsilon}=-[\nabla X_s+(\nabla X_s)^*]/2 \tag{4.1}$$

确定（上式中的*号表示转置），所以本构变量中还应包含$\boldsymbol{\varepsilon}$。这样一来，独立的本构变量共有17个，即P_f，P_g，X'_s，X'_f，X'_g和$\boldsymbol{\varepsilon}$。

为了建立13个本构方程，首先由等存性原理知，T，$\hat{p}_f$，$\hat{p}_g$和s都是P_f,P_g,X'_s，X'_f，X'_g和$\boldsymbol{\varepsilon}$的函数。再由Curie对称原理知：$\hat{p}_f$和$\hat{p}_g$只与X'_s，X'_f及X'_g有关，而T和s只与P_f，P_g及$\boldsymbol{\varepsilon}$有关。以下分别确定这些本构关系。

1. 扩散阻力的本构关系

设

$$\hat{p}_f=f_1(X'_s,\ X'_f,\ X'_g),\quad \hat{p}_g=f_2(X'_s,\ X'_f,\ X'_g) \tag{4.2}$$

以f_1为例，它必须满足客观性原理，按照标架变换规则[10]可得

$$\mathrm{Q}\hat{p}_f=f_1(\dot{c}(t)+\mathrm{Q}X'_s+\dot{\mathrm{Q}}X_s,\ \hat{p}(t)+\mathrm{Q}X'_f+\dot{\mathrm{Q}}X_f,\ \dot{c}(t)+\mathrm{Q}X'_g+\dot{\mathrm{Q}}X_g) \tag{4.3}$$

要求对所有的$c(t)$和正交变换$\mathrm{Q}(t)$，f_1的形式保持不变，特别地，取$\mathrm{Q}(t)=1$，$\dot{\mathrm{Q}}(t)=0$及$\dot{c}(t)=-X'_s$，则(4.3)给出

$$\hat{p}_f=f_1(X'_f-X'_s,\ X'_g-X'_s) \tag{4.4}$$

这表明，本构函数f_1只能通过速度差$X'_f-X'_s$和$X'_g-X'_s$依赖于X'_s，X'_f和X'_g。同理，

$$\hat{p}_g=f_2(X'_f-X'_s,\ X'_g-X'_s) \tag{4.5}$$

显然，$X'_f-X'_s$和$X'_g-X'_s$就是水和气在土中的相对渗透速度，而P_f和P_g就是水和气所受到的渗透阻力。如定义

$$X'_f-X'_s=0,\quad X'_g-X'_s=0 \tag{4.6}$$

为渗流的平衡态，则由$\hat{p}_f$和$\hat{p}_g$的物理意义可知

$$\hat{p}_f^+=\hat{p}_g^+=0 \tag{4.7}$$

上标+表示平衡态的值．对于平衡态的小的偏离，即渗透速度较小时，由(4.4)、(4.5)及(4.7)，并考虑到渗透阻力与渗流方向相反，应有

$$\hat{\boldsymbol{p}}_f=-\xi_{11}(\boldsymbol{X}'_f-\boldsymbol{X}'_s)-\xi_{12}(\boldsymbol{X}'_g-\boldsymbol{X}'_s),\quad \hat{\boldsymbol{p}}_g=-\xi_{21}(\boldsymbol{X}'_f-\boldsymbol{X}'_s)-\xi_{22}(\boldsymbol{X}'_g-\boldsymbol{X}'_s) \tag{4.8}$$

其中已利用了基本假设3，土的渗透性是各向同性的．式中ξ_{11}，ξ_{12}，ξ_{21}，ξ_{22}都是材料参数．(4.8)式表明：水、气渗流不仅会受到因本身对土骨架作相对运动而产生的阻力，而且两种流体间也存在着阻力，它们是互相牵连的．

2．土骨架变形的本构关系

由平均应力定理[20]知，混合理论中的固相应力实际上是粒间应力的表观值，用这种应力建力本构关系包含着数目较多且难以确定的参数[24]．总应力则和土骨架变形之间没有明确的对应关系．有效应力原理指出，决定土骨架变形的是有效应力，因此用有效应力建立土骨架变形的本构关系是恰当的．根据有效应力的概念，可设

$$\boldsymbol{\sigma}=\mathbf{f}_3(\boldsymbol{\varepsilon}) \tag{4.9}$$

客观性原理要求

$$\mathbf{Q}\boldsymbol{\sigma}\mathbf{Q}^*=\mathbf{f}_3(\mathbf{Q}\boldsymbol{\varepsilon}\mathbf{Q}^*) \tag{4.10}$$

即

$$\mathbf{Q}\mathbf{f}_3(\boldsymbol{\varepsilon})\mathbf{Q}^*=\mathbf{f}_3(\mathbf{Q}\boldsymbol{\varepsilon}\mathbf{Q}^*) \tag{4.11}$$

满足(4.11)的函数$\mathbf{f}_3$称为各向同性张量函数[25,26]．由于$\boldsymbol{\sigma}$和$\boldsymbol{\varepsilon}$都是实二阶对称张量，故(4.12)成立的充要条件是

$$\boldsymbol{\sigma}=\lambda_0\mathbf{I}+\lambda_1\boldsymbol{\varepsilon}+\lambda_2\boldsymbol{\varepsilon}^2 \tag{4.12}$$

其中λ_0，λ_1和λ_2都是$\boldsymbol{\varepsilon}$的三个不变量的函数．由小变形假设，略去二阶以上的量，(4.12)就简化为广义 Hook 定律

$$\boldsymbol{\sigma}=\lambda\theta\mathbf{I}+2\mu\boldsymbol{\varepsilon} \tag{4.13}$$

式中$\theta=\mathrm{tr}\boldsymbol{\varepsilon}$，$\lambda$和$\mu$是 Lame 常数．

3．饱和度的本构关系

前已述及，s只和$\boldsymbol{\varepsilon}$，P_f及P_g有关，故可设

$$s=f_4(\boldsymbol{\varepsilon},\ P_f,\ P_g) \tag{4.14}$$

但因s是标量，$\boldsymbol{\varepsilon}$是二阶张量，故s对$\boldsymbol{\varepsilon}$的依存关系只有通过$\boldsymbol{\varepsilon}$的三个不变量才能实现．作为初步研究，暂不考虑其第二、第三不变量对s的影响，(4.14)简化为

$$s=f_4(\theta,\ P_f,\ P_g) \tag{4.15}$$

据此，并参照土壤物理学研究的成果，我们通过试验得出的f_4函数为[23]

$$s=a(n)-b(n)\lg[(P_g-P_f)/p_a] \tag{4.16a}$$

式中，P_g-P_f称为土的吸力．这里用n代替了θ对s的影响．其中的参数a，b由试验测定给出

$$a=1.6486-2.2857n,\quad b=0.6830-0.7330n \tag{4.16b}$$

在(4.8)中略去水、气之间的阻力，再代入运动方程(2.3)，并记

$$\frac{K_f}{\gamma_f}=\frac{(ns)^2}{\xi_{11}},\quad \frac{K_g}{\gamma_f}=\frac{[n(1-s)]^2}{\xi_{22}} \tag{4.17}$$

则得

$$ns(\boldsymbol{X}'_f-\boldsymbol{X}'_s)=-\frac{K_f}{\gamma_f}\nabla P_f,\quad n(1-s)(\boldsymbol{X}'_g-\boldsymbol{X}'_s)=-\frac{K_g}{\gamma_f}\nabla P_g \tag{4.18}$$

K_f和K_g分别称为渗水系数和渗气系数，显然，它们都与土的密度及饱和度有关。上式左边分别是土中水、气渗流的表观速度，故土中水、气流动都可用Darcy定律描述，而Darcy定律的实质是水、气运动方程的简化形式，简化的条件前已述及。

把有效应力公式(3.22)和(3.23)代入(2.3)第三式，得土的总体平衡方程

$$\nabla\cdot\boldsymbol{\sigma}+\chi\nabla P_f+(1-\chi)\nabla P_g=0 \tag{4.19}$$

三相连续方程(2.2)、水气运动方程(4.18)、总体平衡方程(4.19)、几何方程(4.1)、土骨架的本构方程(4.13)及饱和度-密度-吸力状态方程(4.16)共计25个方程，包含25个未知数：n，s，P_f，P_g，$\boldsymbol{X}_s$，$\boldsymbol{X}_f$．$\boldsymbol{X}_g$．$\boldsymbol{\sigma}$，$\boldsymbol{\varepsilon}$，故它们是封闭的。这些方程就是本文提出的非饱和土固结的物理数学模型，其中包含7个材料参数；K_f，K_g，χ，λ，μ，a，b，它们都可由试验测定，详见文[23]。

五、增量线性化控制方程组

非饱和土固结的封闭方程组是用全量给出的，且式(2.2)、(4.18)和(4.16)是非线性的，这些给求解和应用造成了困难。为了能够模拟施工过程和加入复杂的本构关系，需要对这些方程进一步简化，并改写成增量形式。

设土中一点开始处于平衡状态，初始状态量为n，s，P_f，P_g，$\boldsymbol{\sigma}$，$\boldsymbol{\varepsilon}$，$\boldsymbol{X}_s$，$\boldsymbol{X}_f$，$\boldsymbol{X}_g$，在施加荷载增量后各量的相应改变量为δn，δs，δP_f，δP_g，$\delta\boldsymbol{\sigma}$，$\delta\boldsymbol{\varepsilon}$，$\delta\boldsymbol{X}_s$；$\delta\boldsymbol{X}_f$，$\delta\boldsymbol{X}_g$。为了简化问题而又能抓住其主要方面，我们略去两个增量的乘积，并略去不同量的时间导数与坐标导数的乘积．从而连续方程变为

$$-\delta\dot{n}+(1-n)\nabla\cdot\delta\boldsymbol{X}_s'=0 \tag{5.1}$$

$$n\delta\dot{s}+s\delta\dot{n}+ns\nabla\cdot\delta\boldsymbol{X}_f'=0 \tag{5.2}$$

$$-n\delta\dot{s}+(1-s)\delta\dot{n}+n(1-s)\delta\dot{P}_g/P_g+n(1-s)\nabla\cdot\delta\boldsymbol{X}_g'=0 \tag{5.3}$$

把水、气的运动方程取散度得

$$ns(\nabla\cdot\delta\boldsymbol{X}_f'-\nabla\cdot\delta\boldsymbol{X}_s')=-\frac{K_f}{\gamma_f}\nabla^2(\delta P_f) \tag{5.4}$$

$$n(1-s)(\nabla\cdot\delta\boldsymbol{X}_g'-\nabla\cdot\delta\boldsymbol{X}_s')=-\frac{K_g}{\gamma_f}\nabla^2(\delta P_g) \tag{5.5}$$

(4.19)、(4.1)、(4.13)简化为

$$\nabla\cdot(\delta\boldsymbol{\sigma})+\chi\nabla(\delta P_f)+(1-\chi)\nabla\delta P_g=0 \tag{5.6}$$

$$\delta\boldsymbol{\varepsilon}=-[\nabla(\delta\boldsymbol{X}_s)+(\nabla(\delta\boldsymbol{X}_s))^*]/2 \tag{5.7}$$

$$\delta\boldsymbol{\sigma}=\lambda\delta\theta\mathbf{I}+2\mu\delta\boldsymbol{\varepsilon} \tag{5.8}$$

由(5.1)得

$$\delta\dot{n}=(1-n)\nabla\cdot\delta\boldsymbol{X}_s'=-(1-n)\delta\dot{\theta} \tag{5.9}$$

把(5.9)、(5.4)和(5.5)代入(5.2)和(5.3)

$$n\delta\dot{s}-s\delta\dot{\theta}=\frac{K_f}{\gamma_f}\nabla^2(\delta P_f) \tag{5.10}$$

$$-n\delta\dot{s}-(1-s)\delta\dot{\theta}+n(1-s)\frac{\delta\dot{P}_g}{P_g}=\frac{K_g}{\gamma_f}\nabla^2(\delta P_g) \tag{5.11}$$

这是两个重要的控制方程．为了说明它们的意义，兹考察两个极端情况．

1．饱和土．$s=1$，$\delta\dot{s}=0$，$\delta P_g=0$，$1-s=0$，(5.11)自行消失，(5.10)变为

$$-\delta\dot{\theta}=\frac{K_f}{\gamma_f}\nabla^2(\delta P_f) \tag{5.12}$$

这是Biot理论的连续方程的增量形式[27]，而(5.6)则因$\chi=1$化为Biot理论的平衡方程，故Biot理论是本模型的一个特例.

2. 饱气土(干土)，$s=0$，$\delta\dot{s}=0$，$\delta P_f=0$，(5.10)自动消失，而(5.11)变为

$$-\delta\dot{\theta}+n(1-s)\frac{\delta\dot{P}_g}{P_g}=\frac{K_g}{\gamma_f}\nabla^2(\delta P_g) \tag{5.13}$$

由Boyle定律知，$n(1-s)\delta\dot{P}_g/P_g$代表单位土体积中气体的压缩率，故上式意味着土的压缩率等于气体的压缩率与排气量之和. 因而上式即是干土的连续方程.

把(5.10)和(5.11)相加可得，

$$-\delta\dot{\theta}+n(1-s)\frac{\delta\dot{P}_g}{P_g}=\frac{K_f}{\gamma_f}\nabla^2(\delta P_f)+\frac{K_g}{\gamma_f}\nabla^2(\delta P_g) \tag{5.14}$$

这就是非饱和土的总体连续方程，但它不是独立的方程.

饱和度-密度-吸力状态方程(4.16)的增量形式是

$$\delta s=\alpha\delta\theta+\beta\delta P_f+\gamma\delta P_g \tag{5.15a}$$

$$\alpha=(1-n)(2.2857-0.7330\lg[(P_g-P_f)/p_a]) \tag{5.15b}$$

$$\beta=0.4343(0.6830-0.7330n)/(P_g-P_f) \tag{5.15c}$$

$$\gamma=-\beta \tag{5.15d}$$

其中利用了(5.9). 把(5.7)、(5.8)代入(5.6)，把(5.15)代入(5.10)和(5.11)，即得到非饱和土固结的增量线性化控制方程组

$$\left.\begin{aligned}&\mu\nabla^2(\delta\boldsymbol{X}_s)+(\lambda+\mu)\nabla\nabla\cdot(\delta\boldsymbol{X}_s)-\chi\nabla(\delta P_f)-(1-\chi)\nabla(\delta P_g)=0\\&(s-\alpha n)\nabla\cdot(\delta\boldsymbol{X}_s')+\beta n(\delta\dot{P}_f-\delta\dot{P}_g)=\frac{K_f}{\gamma_f}\nabla^2(\delta P_f)\\&(1-s-\alpha n)\nabla\cdot(\delta\boldsymbol{X}_s')-\beta n(\delta\dot{P}_f)+\left[\frac{n(1-s)}{P_g}+\beta n\right]\delta\dot{P}_g=\frac{K_g}{\gamma_f}\nabla^2(\delta P_g)\end{aligned}\right\} \tag{5.16}$$

(5.16)共5个方程求解5个未知量：δP_f，δP_g和$\delta\boldsymbol{X}_s$，仍包含7个材料参数：K_f，K_g，χ，λ，μ，a，b. (5.16)概括了非饱和土的三相连续方程、水气运动方程、总体平衡方程、几何方程、有效应力方程、理想气体的状态方程、广义Hook定律及饱和度-密度-吸力状态方程共11方面的关系，每一个方程都包含了5个基本未知量，充分体现了应力场、应变场与渗水、渗气场的耦合效应. 尽管7个材料参数都与饱和度及土的密度有关，但这并不影响(5.16)的使用. 因为控制方程以增量形式给出，在每一次增量过程中，可以把材料参数视为常数，而在增量过程的末尾根据实际的饱和度与孔隙率调整它们的值，供下一个增量过程使用，从而为考虑土的非线性本构关系及模拟施工过程提供了方便.

应用控制方程(5.16)已求得了一维问题的解析解和二维问题的有限元解[23]，有关结果将另文讨论.

参 考 文 献

[1] 蒋彭年，非饱和土工程性质简论，岩土工程学报，11(6)(1989).

[2] 包承纲，非饱和土的应力应变关系和强度特性，岩土工程学报，7(1)(1986).

[3] Barden, L., Consolidation of campacted and unsaturated clays, *Geotechnique*, 15(3) (1965), 267—285.

[4] Fredlund, D. G. and J. U. Hasan, One-dimensional consolidation theory:

Unsaturated soils, *Canadian Geotechnical Journal*: 16(3) (1979), 521—531.

[5] Fredlund, D. G., Consolidation of unsaturated porous media, *Proc. of the NATO Advanced Study Institute on Mechanics of Fluids in Porous Media*, Newark, Delaware, U. S. A. (1982), 525—578.

[6] Fredlund, D. G., Soil mechanics principles that embrace unsaturated soils, *Proc. of 11th ICSMFE*, San Francisco, U. S. A. (1985), 313—321.

[7] Thigpen, L. and J. G. Berryman, Mechanics of porous elastic materiais containing multiphase fluid, *Int. J. Engng. Sci.*, 23(1) (1985), 1203—1214.

[8] Vardoulakis, I. and D.E.Beskos, Dynamic behavior of nearly saturated porous media, *Mechanics of Materials*, 5 (1986), 87—108.

[9] Boer, R. and W. Ehler, On the problem of fluid- and gas-filled elasto-plastic solids, *Int. J. Solids Structures*, 22(11) (1986), 1231—1242.

[10] Bowen, R. M., 《混合物理论》, 现代连续统物理丛书, 13, 许慧已等译, 董务民、戴天民校, 江苏科学技术出版社 (1983).

[11] Bowen, R. M., Incompressible porous media models by use of the theory of mixture, *Int. J. Engng. Sci.*, 18 (1980), 1129—1148.

[12] Bowen, R. M., Compressible porous media models by use of the theory of mixture, *Int. J. Engng. Sci.*, 20(6) (1982), 697—735.

[13] Bedford, A. and D. S. Drumheller, Theories of immiscible and structured mixtures, *Int. J. Engng. Sci.*, 21(8) (1983), 863—960.

[14] Passman, S. L., J. W. Nunziato and E. K. Walsh, A theory of multiphase mixtures, *Rational Thermodynamics*, Ed. by C. Truesdell, Springer-Verlag, New York (1984), 286—325.

[15] 陈正汉、谢定义, 混合物理论当前研究中的两个问题, 《MMM-Ⅳ文集》, 兰州 (1991).

[16] Degroot, S. R. and P. Mazur, 《非平衡热力学》, 上海科学技术出版社 (1983).

[17] Skempton, A. W., *Effective Stress in Soils, Concrete and Rock, Pore Pressure and Suction in Soils*, Butterworths, London (1960), 4—16.

[18] Biot, M. A. and D. G. Willis, The elastic coefficients of the theory of consolidation, *J. Appl. Mech.*, 24 (1957), 594—601.

[19] Nur, A. and J. D. Byerlee, An exact effective stress law for elastic deformation of rock with fluids, *J. Geophys. Res.*, 76 (1971), 6414—6419.

[20] Carroll, M. M., Mechanical response of fluid-saturated porous materials, *Proc. 15-th IUTAM*, North-Holland, New York (1980), 251—262.

[21] Mctigue, D. F., R. K. Wilson and J. W. Nunziato, An effective stress principle for partially saturated media, *Mechanics of Granular Materials*, Ed. by J. T. Jenkins and M. Satake, Elsevier (1983), 195—210.

[22] 李希、郭尚平, 渗流过程的混合物理论, 中国科学 (A辑), 31(3) (1988), 265—274.

[23] 陈正汉, 非饱和土固结的混合物理论——数学模型·试验研究·边值问题, 陕西机械学院博士学位论文 (1991).

[24] 陈正汉、谢定义、刘祖典, 非饱和土的固结理论, 《岩土力学中新的分析方法讨论会文集》, 上海 (1989).

[25] 郭仲衡, 《非线性弹性理论》, 科学出版社 (1980).

[26] 黄克智等编, 《张量分析》, 清华大学出版社 (1985).

Consolidation Theory of Unsaturated Soil Based on the Theory of Mixture (Ⅰ)

Chen Zheng-han

(Logistical Engineering College, Chongqing)

Xie Ding-yi Liu Zu-dian

(Shaanxi Mechanical College, Xi'an)

Abstract

Unsaturated soil is a three-phase media and is composed of soil grain, water and gas. In this paper, the consolidation problem of unsaturated soil is investigated based on the theory of mixture. A theoretical formula of effective stress on anisotropic porous media and unsaturated soil is derived. The principle of effective stress and the principle of Curie symmetry are taken as two fundamental constitutive principles of unsaturated soil. A mathematical model of consolidation of unsaturated soil is proposed, which consists of 25 partial differential equations with 25 unknowns. With the help of increament linearizing method, the model is reduced to 5 governing equations with 5 unknowns, i. e., the three displacement components of solid phase, the pore water pressure and the pore gas pressure, 7 material parameters are involved in the model and all of them can be measured using soil tests. It is convenient to use the model to engineering practice. The well known Biot's theory is a special case of the model.

Key words unsaturated soil, consolidation, theory of mixture, effective stress, the principle of Curie symmetry