应用数学和力学，第13卷第12期（1992年12月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

常系数线性常微分方程组的显式解*

黄 永 念

（北京大学力学系，1991年10月25日收到）

摘 要

本文利用张量分析给出了常系数线性常微分方程组和 n 阶常系数线性常微分方程初值问题一般解的显式表示，包括特征根有重根时的情况．实际上本文给出了计算矩阵 $\exp[\boldsymbol{A}t]$ 的元素的一般公式．这种方法不仅在公式表示上简洁方便，而且更适用于计算机的程序设计，大大加快了运算速度．

关键词 张量微分方程 特征张量 显式解

一、常系数线性常微分方程组的求解

近年来，张量分析已越来越广泛地被采用．因为在很多问题中，如果利用张量分量的表示形式，不仅计算公式简洁明了，而且容易得到显式的一般解．在实际计算中使用特别方便．例如，最常见的常系数线性常微分方程组是

$$d\boldsymbol{x}/dt=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \tag{1.1}$$

$$\boldsymbol{x}|_{t=0}=\boldsymbol{x}^{(0)} \tag{1.2}$$

其中 $\boldsymbol{x}$ 是 n 维向量，$\boldsymbol{A}$ 是 n 阶常数矩阵．它的求解通常是采用矩阵 $\exp[\boldsymbol{A}t]$ 的形式

$$\boldsymbol{x}=\exp[\boldsymbol{A}t]\boldsymbol{x}^{(0)} \tag{1.3}$$

但是现有的计算 $\exp[\boldsymbol{A}t]$ 的方法很不方便，特别是在特征根有重根的情况中计算更为复杂．我们发现，如果利用张量分量的表示，令

$$x_i=B_{ij}x_j^{(0)} \qquad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ n) \tag{1.4}$$

这里和下面均采用约定求和法则，重复脚标表示对 1 到 n 求和，实际上，B_{ij} 就是矩阵 $\boldsymbol{B}=\exp[\boldsymbol{A}t]$ 的元素，则上面的问题可化为求解张量微分方程

$$dB_{ij}/dt=A_{im}B_{mj} \qquad (i,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ n) \tag{1.5}$$

$$B_{ij}|_{t=0}=\delta_{ij} \qquad (i,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ n) \tag{1.6}$$

其中 A_{im} 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的元素．由此可以求出 $\exp[\boldsymbol{A}t]$ 即 $\boldsymbol{B}$ 的元素 B_{ij} 的显式解表示．

我们知道，根据Cayley-Hamilton定理，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 或它的元素 A_{ij} 满足长期方程

$$A_{ij}^n-I_1A_{ij}^{n-1}+I_2A_{ij}^{n-2}+\cdots+(-1)^nI_n\delta_{ij}=0 \tag{1.7}$$

这里我们记

* 郭仲衡推荐．

$$A^2_{ij}=A_{im}A_{mj} \qquad \text{(即矩阵}\boldsymbol{A}^2\text{的元素)}$$
$$A^3_{ij}=A_{im}A_{mn}a_{nj} \qquad \text{(即矩阵}\boldsymbol{A}^3\text{的元素)}$$
$$\cdots\cdots$$

是张量A_{ij}的乘幂．$I_i(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$是张量$A_{ij}$的$n$个不变量．它恰好是张量$A_{ij}$的特征方程

$$\det(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})=0 \tag{1.8}$$

($\boldsymbol{E}$是单位矩阵)的n个系数．

如果此特征方程的所有特征根λ_k都不同，则不论λ_k的值是否是复数，满足方程(1.5)和初条件(1.6)的显式解必定可写成

$$B_{ij}=\sum_{k=1}^{n}C_kB_{ij}^{(k)}\exp[\lambda_kt] \tag{1.9}$$

这里

$$C_k=\Big[\prod_{\substack{s=1\\ s\neq k}}^{n}(\lambda_k-\lambda_s)\Big]^{-1} \tag{1.10}$$

并定义

$$B_{ij}^{(k)}=(A_{im}-\lambda_{k+1}\delta_{im})(A_{mp}-\lambda_{k+2}\delta_{mp})\cdots(A_{qj}-\lambda_{k+n-1}\delta_{qj}) \tag{1.11}$$

$$\lambda_{k+n}=\lambda_k \tag{1.12}$$

如果用矩阵形式表示，则(1.9)式和(1.11)式可分别写成

$$\boldsymbol{B}=\sum_{k=1}^{n}C_k\boldsymbol{B}^{(k)}\exp[\lambda_kt] \tag{1.13}$$

和

$$\boldsymbol{B}^{(k)}=\prod_{\substack{s=1\\ s\neq k}}^{n}(\boldsymbol{A}-\lambda_s\boldsymbol{E}) \tag{1.14}$$

证明时只要注意以下两个事实．首先，我们可将(1.7)式改写为

$$\begin{aligned}&(A_{im}-\lambda_k\delta_{im})(A_{mp}-\lambda_{k+1}\delta_{mp})\cdots(A_{qj}-\lambda_{k+n-1}\delta_{qj})\\&\quad=(A_{im}-\lambda_k\delta_{im})B_{mj}^{(k)}=0 \qquad (k=1,\ 2,\ \cdots,\ n)\end{aligned} \tag{1.15}$$

由此可知(1.9)式和号中每一项均满足方程(1.5)式．其次，我们有恒等式

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{(\lambda-\lambda_{k+1})(\lambda-\lambda_{k+2})\cdots(\lambda-\lambda_{k+n-1})}{(\lambda_k-\lambda_{k+1})(\lambda_k-\lambda_{k+2})\cdots(\lambda_k-\lambda_{k+n-1})}-1\equiv0 \tag{1.16}$$

因为这是λ的一个$(n-1)$次代数方程，它最多只有$n-1$个根．但现在如果用n个不同的特征值$\lambda_j(j=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$代入此方程，不难发现它们都满足这个方程，故此方程必定恒等于零，即λ的任何幂次前系数均为零，因此我们有

$$\sum_{k=1}^{n}C_k\lambda_k^r=0 \qquad (r=0,\ 1,\ \cdots,\ n-2) \tag{1.17}$$

和

$$\sum_{k=1}^{n}C_k\lambda_k^{n-1}-1=0 \tag{1.18}$$

由此我们证得

$$\sum_{k=1}^{n} C_k B_{ij}^{(k)} = \delta_{ij} \tag{1.19}$$

即解(1.9)式也满足初条件(1.6)式．故(1.9)式就是我们所要找的矩阵exp[$\boldsymbol{A}t$]的元素．

如果特征根出现重根，例如，不失一般性我们可设 $\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_p$，其余特征根均不同，则$B_{ij}$的显式解可写成

$$B_{ij}= \left[H_{ij}^{(p)}+\sum_{r=1}^{p-1}H_{ij}^{(p-r)}\sum_{s=p+1}^{n}(\lambda_s-\lambda_1)^{-r}\right]\exp[\lambda_1 t]\Big/\prod_{s=p+1}^{n}(\lambda_1-\lambda_s)$$

$$+\sum_{k=p+1}^{n} C_k B_{ij}^{(k)}\exp[\lambda_k t] \tag{1.20}$$

其中

$$H_{ij}^{(r)}=\sum_{s=1}^{r}\frac{t^{r-s}}{(r-s)!}D_{ij}^{(s)} \qquad (r=1,\ 2,\ \cdots,\ p) \tag{1.21}$$

和

$$D_{ij}^{(s)}=(A_{im}-\lambda_{s+1}\delta_{im})(A_{mp}-\lambda_{s+2}\delta_{mp})\cdots(A_{qj}-\lambda_n\delta_{qj}) \qquad (s=1,\ 2,\ \cdots,\ p) \tag{1.22}$$

如用矩阵形式表示，则

$$\boldsymbol{H}^{(r)}=\sum_{s=1}^{r}\frac{t^{r-s}}{(r-s)!}\boldsymbol{D}^{(s)} \tag{1.23}$$

和

$$\boldsymbol{D}^{(s)}=\prod_{r=s+1}^{n}(\boldsymbol{A}-\lambda_r\boldsymbol{E})=(\boldsymbol{A}-\lambda_1\boldsymbol{E})^{p-s}\prod_{r=p+1}^{n}(\boldsymbol{A}-\lambda_r\boldsymbol{E}) \tag{1.24}$$

这里我们有

$$\boldsymbol{D}^{(1)}=\boldsymbol{H}^{(1)}=\boldsymbol{B}^{(1)} \tag{1.25}$$

证明(1.20)式可以利用数学归纳法．显然，$p=1$时(1.20)是我们所要找的解，因为它就是(1.9)式．设$p=N$时，(1.20)式是解，则在$p=N+1$时，利用$p=N$时的公式，并可$\lambda_{N+1}=\lambda_1+\varepsilon$，代入后对$\varepsilon$作小参数展开，再令$\varepsilon\to 0$取极限，使$\lambda_{N+1}=\lambda_1$，则经过直接计算设以发现其结果就是$p=N+1$时的(1.20)式．因此证得$p=N+1$时(1.20)式亦成立．由此说明(1.20)式对任意p重根时均成立．如果同时出现几组重根，则每一组重根均可按(1.20)式中重根部分的形式给出，然后再与其它单根形式的解加在一起，就构成我们所要求的解．

要证明(1.20)式满足初条件（1.6）式仍然需要利用恒等式（1.16）式，这里还需要令$\lambda_2=\lambda_1+\varepsilon_1$，$\lambda_3=\lambda_1+\varepsilon_2$，…再令$\varepsilon_1\to 0$，$\varepsilon_2\to 0\cdots$．利用极限状态下的恒等式(1.16)式就可证明(1.6)式成立．

如果特征根出现全部相等的情况，则解B_{ij}可直接写成

$$B_{ij}=\sum_{s=1}^{n}\frac{t^{n-s}}{(n-s)!}D_{ij}^{(s)} \tag{1.26}$$

和定义

$$D_{ij}^{(n)}=\delta_{ij} \tag{1.27}$$

现在我们讨论张量$B_{ij}^{(k)}$与特征向量$\xi_i^{(k)}$，$\eta_j^{(k)}$之间的关系. 不难看出，若令h_j为一个任意向量，只要$\xi_i^{(k)}=B_{ij}^{(k)}h_j$和$\eta_j^{(k)}=B_{ij}^{(k)}h_i$不是零向量，则$\xi_i^{(k)}$和$\eta_j^{(k)}$就分别是右特征向量和左特征向量. 因此我们可以把$B_{ij}^{(k)}$定义为相应于特征值$\lambda_k$的特征张量. 显然，从上面我们可以发现特征张量$B_{ij}^{(k)}$比特征向量$\xi_i^{(k)}$或$\eta_j^{(k)}$更为本质，因为$B_{ij}^{(k)}$没有任何任意性，而$\xi_i^{(k)}$和$\eta_j^{(k)}$可以有一个任意常数.

特征张量$B_{ij}^{(k)}$具有某些有趣的性质. 例如，根据(1.15)式，我们有

$$(A_{im}-\lambda_p\delta_{im})B_{mj}^{(k)}=(\lambda_k-\lambda_p)B_{ij}^{(k)} \tag{1.28}$$

因此

$$B_{ij}^{(k)2}=B_{im}^{(k)}B_{mj}^{(k)}=B_{ij}^{(k)}/C_k \tag{1.29}$$

和

$$B_{im}^{(k)}B_{mj}^{(p)}=0 \qquad (\text{对}k\neq p) \tag{1.30}$$

由此可得

$$B_{im}^{(k)}B_{mj}^{(p)}=\delta_{kp}B_{ij}^{(k)}/C_k \tag{1.31}$$

它表明$B_{ij}^{(k)}(k=1, 2, \cdots, n)$是一组互相正交的张量.

如果利用(1.31)式，从(1.9)式可得出

$$B_{im}B_{mj}^{(k)}=C_kB_{im}^{(k)}B_{mj}^{(k)}\exp[\lambda_kt]=\exp[\lambda_kt]\cdot B_{ij}^{(k)} \tag{1.32}$$

它表明$\exp[\lambda_kt](k=1, 2, \cdots, n)$是$B_{ij}^{(k)}$的特征值.

此外，在有重根的情况中，从(1.21)和(1.22)式可以看出$D_{ij}^{(s)}$实际上对应了王柔怀等人[1]所指的特征向量$h^{(1)}$的循环列，因此，$D^{(s)}$也可称为循环列矩阵.

二、n阶常系数线性常微分方程的求解

利用上一节的结果，我们可以很快给出n阶常系数线性常微分方程

$$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\cdots+a_ny=0 \tag{2.1}$$

$$y|_{t=0}=y_n,\ y'|_{t=0}=y_{n-1},\ \cdots,\ y^{(n-1)}|_{t=0}=y_1 \tag{2.2}$$

的初值问题的显式解. 设此微分方程的特征方程

$$\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+a_2\lambda^{n-2}+\cdots+a_{n-1}\lambda+a_n=0 \tag{2.3}$$

的n个特征根为$\lambda_k(k=1, 2, \cdots, n)$. 如果没有任何重根，则满足方程(2.1)和初条件(2.2)的解可表示为

$$y=\sum_{k=1}^{n}C_kb_{kj}y_j\exp[\lambda_kt] \tag{2.4}$$

其中

$$b_{kj}=\sum_{r=1}^{j}a_{j-r}\lambda_k^{r-1} \tag{2.5}$$

$$a_0=1 \tag{2.6}$$

系数C_k仍由(1.10)式给出. 显然，解(2.4)满足方程(2.2)式. 利用(1.17)和(1.18)式，可以直接证明(2.4)式也满足初条件(2.3)式. 因此(2.4)式确是我们所要求的解.

如果特征根有重根，例如我们设 $\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_p$，则满足方程(2.2)式和初条件(2.3)式的解可表示为

$$y=\left[H_{p,j}+\sum_{r=1}^{p-1}H_{p-r,j}\sum_{s=p+1}^{n}(\lambda_s-\lambda_1)^{-r}\right]y_j\exp[\lambda_1 t]\Big/\prod_{s=p+1}^{n}(\lambda_1-\lambda_s)$$

$$+\sum_{k=p+1}^{n}C_k b_{kj}y_j\exp[\lambda_k t] \tag{2.7}$$

其中

$$H_{r,j}=\sum_{s=1}^{r}\frac{t^{r-s}}{(r-s)!(s-1)!}\frac{d^{s-1}b_{1j}}{d\lambda_1^{s-1}} \tag{2.8}$$

$$H_{1j}=b_{1j} \tag{2.9}$$

b_{kj}由(2.5)式给出.

(2.7)式的证明同样也是采用类似上一节的数学归纳法和取极限的过程，这里就省略了.

如果特征根全部相等，则解可直接写成

$$y=\sum_{s=1}^{n}\frac{t^{n-s}}{(n-s)!(s-1)!}\frac{d^{s-1}b_{1j}}{d\lambda_1^{s-1}}y_j\exp[\lambda_1 t] \tag{2.10}$$

这里$\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_n$.

三、讨　　论

本文给出了常系数线性常微分方程组和n阶常系数线性常微分方程初值问题的一般解的显式表示. 虽然这类问题的求解早已解决，但本方法的优点是除了所有的方法都必须计算特征方程的特征根以外，给出了不依赖初值的一般解. 即给出了计算矩阵 $\exp[At]$的元素的通用算法. 1966年Putzer曾给出了计算矩阵$\exp[At]$的另一种方法[2]，但他还要计算一个初值问题. 显然，我们的方法要更好一些，它直接给出的是最后结果，无须再求解方程.

另外，本文引进了对应特征值λ_k的特征张量$B_{ij}^{(k)}$的概念. 它比特征向量更为本质，因为它没有任意性，它完全由系数a_{ij}确定. 本文的工作有助于定态解的线性化稳定性分析.

参 考 文 献

[1] 王柔怀、伍卓群，《常微分方程讲义》，人民教育出版社 (1963)，146.

[2] 王高维、周之铭等，《常微分方程》(第2版)，高等教育出版社 (1983)，223.

The Explicit Solution of Homogeneous Linear Ordinary Differential Equations with Constant Coefficients

Huang Yong-nian

(Department of Mechanics, Peking University, Beijing)

Abstract

In this paper by using tensor analysis we give the explicit expressions of the solution of the initial-value problem of homogeneous linear differential equations with constant coefficients and the nth-order homogeneous linear differential equation with constant coefficients. In fact, we give the general formula for calculating the elements of the matrix e^{At}. We also give the results when the characteristic equation has the repeated roots. The present method is simpler and better than the other methods.

Key words tensor differential equation, characteristic tensor, explicit solution