应用数学和力学，第13卷第12期（1992年12月）
Applied Mathematics and Mechanics
应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

半圆形弹性薄板弯曲的功的互等定理法*

李 农

（洛阳工学院，1990年5月25日收到）

摘 要

半圆形弹性薄板的弯曲问题，由于其边界条件的复杂性，给求解带来一定困难．本文应用功的互等定理，提出一种计算此板挠曲面方程的简便、通用的算法．

关键词 半圆形薄板 互等定理 挠曲面方程

一、引 言

弹性薄板的弯曲问题，归结为在一定边界条件下，求解一个四阶偏微分方程．如果能够寻找到一个既满足边界条件，又满足这个偏微分方程的解的话，这个解就是精确的解析解．然而，对于边界形状复杂，且不规整的板，如半圆形板，要找到其解析解是有一定困难的．

文献[3]首先提出应用功的互等定理求解弹性矩形板的弯曲；文献[4]则将功的互等定理推广应用于弹性圆板；本文进一步将功的互等定理运用到半圆形薄板的挠曲面方程的计算．

首先我们导出半圆形板的基本解，然后在基本解系统和实际系统之间运用功的互等定理，于是便得到了具有复杂边界条件，受复杂载荷作用的半圆形板的挠曲面方程．

最后我们通过算例，给出几种边界条件下的半圆形板的挠曲面方程的解析表达式．

二、基 本 解

图1所示的半径为a的周边固定圆板，在流动坐标(ξ,φ)处作用一单位集中载荷．它所引起的挠度由下列式子给出[4]

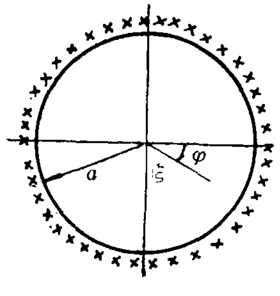

图 1

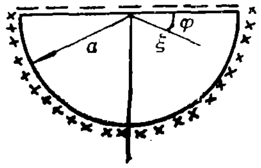

图 2

* 潘立宙推荐．

$$W(\xi,\varphi,r,\theta)=\begin{cases} R_0'+\sum\limits_{m=1,2}^{\infty}R_m'\cos m(\theta-\varphi) & 0\leqslant r\leqslant\xi \\ R_0+\sum\limits_{m=1,2}^{\infty}R_m\cos m(\theta-\varphi) & \xi\leqslant r\leqslant a \end{cases} \tag{2.1}$$

式中

$$\left.\begin{aligned}
R_0'&=\frac{1}{8\pi D}\left[(r^2+\xi^2)\ln\frac{\xi}{a}+\frac{(a^2+r^2)(a^2-\xi^2)}{2a^2}\right]\\
R_0&=\frac{1}{8\pi D}\left[(r^2+\xi^2)\ln\frac{r}{a}+\frac{(a^2+\xi^2)(a^2-r^2)}{2a^2}\right]\\
R_1'&=-\frac{\xi^3}{16\pi D}\left[\frac{2(a^2-\xi^2)r}{a^2\xi^2}+\frac{(a^2-\xi^2)^2r^3}{a^4\xi^4}-\frac{4r}{\xi^2}\ln\frac{a}{\xi}\right]\\
R_1&=-\frac{\xi^3}{16\pi D}\left[\frac{1}{r}+\frac{2(a^2-\xi^2)r}{a^2\xi^2}-\frac{(2a^2-\xi^2)r^3}{a^4\xi^2}-\frac{4r}{\xi^2}\ln\frac{a}{r}\right]\\
R_m'&=\frac{\xi^m}{8m(m-1)\pi D}\left\{\frac{r^m}{a^{2m}}\left[(m-1)\xi^2-ma^2+\frac{a^{2m}}{\xi^{2m-2}}\right]\right.\\
&\quad\left.+(m-1)\frac{r^{m+2}}{a^{2m}}\left[1-\frac{m}{m+1}\left(\frac{\xi}{a}\right)^2-\frac{1}{m+1}\left(\frac{a}{\xi}\right)^{2m}\right]\right\}\\
R_m&=\frac{\xi^m}{8m(m-1)\pi D}\left\{\frac{r^m}{a^{2m}}\left[(m-1)\xi^2-ma^2+(m-1)r^2-\frac{m(m-1)}{m+1}\right.\right.\\
&\quad\left.\left.\cdot\frac{\xi^2r^2}{a^2}\right]+\frac{1}{r^m}\left(r^2-\frac{m-1}{m+1}\xi^2\right)\right\}\qquad(m=2,3,\cdots)
\end{aligned}\right\} \tag{2.2}$$

现假设在图1所示圆板的流动坐标(ξ,φ)和$(\xi,-\varphi)$处各作用了一个大小相等、方向相反的单位集中载荷。则由此所引起的板的挠度应为两个单位集中载荷分别单独作用时所引起挠度的叠加，写成

$$W_1(\xi,\varphi,r,\theta)=[W(\xi,\varphi,r,\theta)]_{(\xi,\varphi)}+[W(\xi,\varphi,r,\theta)]_{(\xi,-\varphi)} \tag{2.3}$$

式中的下标(ξ,φ)和$(\xi,-\varphi)$表示集中载荷的作用位置。

将(2.1)和(2.2)代入(2.3)，整理得

$$W_1(\xi,\varphi,r,\theta)=\begin{cases} \sum\limits_{m=1,2}^{\infty}2R_m'\sin m\theta\sin m\varphi & 0\leqslant r\leqslant\xi \\ \sum\limits_{m=1,2}^{\infty}2R_m\sin m\theta\sin m\varphi & \xi\leqslant T\leqslant a \end{cases} \tag{2.4}$$

这里R_m'和R_m仍为式(2.2)所表示。

于是我们就得到直边简支、圆弧边固定的半圆板（图2）的基本解$W_1(\xi,\varphi,r,\theta)$。

如果我们在图2和具有一般边界条件，受真实载荷作用的半圆板之间运用功的互等定理，则后者的挠曲面方程可以表示为

$$W_2(\xi,\varphi)=\iint\limits_{\substack{0\leqslant r\leqslant a\\0\leqslant\theta\leqslant\pi}}q_2(r,\theta)W_1(\xi,\varphi,r,\theta)rdrd\theta$$

$$+\sum_{i=1}^{m} P_{2i}W_1(\xi,\varphi,r_i,\theta_i)+\sum_{j=1}^{n}M_{2rj}\left[\frac{\partial}{\partial r}W_1(\xi,\varphi,r,\theta)\right]_{\substack{r=r_j\\ \theta=\theta_j}}$$

$$+\sum_{k=1}^{p} M_{2r\theta_k}\left[\frac{\partial}{\partial s}W_1(\xi,\varphi,r,\theta)\right]_{\substack{r=r_k\\ \theta=\theta_k}}-\int\limits_{0<\theta<\pi}V_{1r}W_2(r,\theta)ds$$

$$-\int\limits_{-a<r<a}V_{1\theta}W_2(r,\theta)dr+\int\limits_{0<\theta<\pi}M_{1r}\frac{\partial}{\partial r}W_2(r,\theta)ds$$

$$-\int\limits_{-a<r<a}M_{2\theta}\frac{\partial}{r\theta\partial}W_1(\xi,\varphi,r,\theta)dr \tag{2.5}$$

三、半圆形板挠曲面方程计算

（一） 直边简支圆弧边固定半圆板

设图2所示的直边简支，圆弧边固定的半圆板受到均布载荷q作用．这时式(2.5)成为

$$W_2(\xi,\varphi)=\iint\limits_{\substack{0\leq r\leq a\\ 0\leq\theta\leq\pi}}qW_1(\xi,\varphi,r,\theta)rdrd\theta \tag{3.1}$$

将(2.4)代入上式，积分得

$$W_2(\xi,\varphi)=\frac{qa^4}{\pi D}\sum_{m=1,3}^{\infty}\frac{1}{m}\left[\frac{\rho^{m+2}}{(m+4)(m^2-4)}-\frac{\rho^m}{(m+2)(m^2-16)}\right.$$

$$\left.+\frac{2\rho^4}{(m^2-4)(m^2-16)}\right]\sin m\varphi \tag{3.2}$$

其中 $\rho=\xi/a$。

（二） 周边简支半圆板

如图3所示，周边简支半圆板受到均载作用．设其圆弧边界转角为

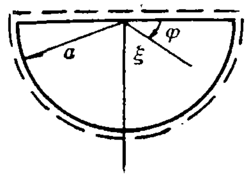

图 3

$$\theta_a=\sum_{m=1,3}^{\infty}\theta_m\sin m\theta \tag{3.3}$$

于是式(2.5)成为

$$W_2(\xi,\varphi)=\iint\limits_{\substack{0\leq r\leq a\\ 0\leq\theta\leq\pi}}qW_1(\xi,\varphi,r,\theta)rdrd\theta+\int\limits_{0<\theta<\pi}M_{1r}\Big|_{r=a}\theta_a a d\theta \tag{3.4}$$

式中

$$M_{1r}\Big|_{r=a}=-D\left[\frac{\partial^2W_1}{\partial r^2}+\mu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial W_1}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2W_1}{\partial\theta^2}\right)\right]_{r=a} \tag{3.5}$$

将(2.4)代入(3.5)，求导后再代入(3.4)，积分后得到

$$W_2(\xi,\varphi)=\sum_{m=1,3}^{\infty}\frac{2q\xi^m}{\pi Dm}\left[\frac{\xi^2a^{-m+2}}{(m+4)(m^2-4)}-\frac{a^{-m+4}}{(m+2)(m^2-16)}\right.$$

$$+\frac{2\xi^{-m+4}}{(m^2-16)(m^2-4)}\Bigg]\sin m\varphi-\sum_{m=1,3}^{\infty}\frac{\theta_m}{2a}\left(\frac{\xi}{a}\right)^m(a^2-\xi^2)\sin m\varphi \tag{3.6}$$

这里θ_m由下列边界条件确定

$$M_{2\xi}\Big|_{\xi=a}=-D\left[\frac{\partial^2 W_2}{\partial\xi^2}+\mu\left(\frac{\partial W_2}{\xi\partial\xi}+\frac{1}{\xi^2}\frac{\partial^2 W_2}{\partial\varphi^2}\right)\right]_{\xi=a}=0 \tag{3.7}$$

将式(3.6)代入(3.7)，化简得

$$\theta_m=-\frac{2qa^3(m-2)(m-4)}{\pi Dm(m^2-4)(m^2-16)(m+(1+\mu)/2)}$$

于是挠曲面方程(3.6)最后变成

$$W_2(\xi,\varphi)=\frac{2qa^4}{\pi D}\sum_{m=13}^{\infty}\Bigg[\frac{2\rho^4}{m(m^2-16)(m^2-4)}+\frac{(m+3+\mu)\rho^{m+2}}{m(m+4)(m^2-4)(2m+1+\mu)}$$

$$+\frac{(m+5+\mu)\rho^m}{m(m+2)(16-m^2)(2m+1+\mu)}\Bigg]\sin m\varphi \tag{3.8}$$

(三) 圆弧边界上受均布弯矩作用的简支半圆板

图 4 所示的周边简支半圆板，在它的圆弧边界上承受均布弯矩M_0作用．设圆弧边界转角为

$$\theta_a=\sum_{m=1,3}^{\infty}\theta_m\sin m\theta \tag{3.9}$$

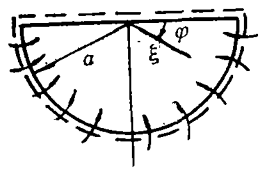

图 4

根据方程(2.5)，挠曲面方程成为

$$W_2(\xi,\varphi)=\int_{0<\theta<\pi}M_{1r}\Big|_{r=a}\theta_a a\,d\theta \tag{3.10}$$

式中 $M_{1r}|_{r=a}$的表达式如式(3.5)所示．利用(3.6)的积分结果，上式变成

$$W_2(\xi,\varphi)=-\sum_{m=1,3}^{\infty}\frac{\theta_m}{2a}\left(\frac{\xi}{a}\right)^m(a^2-\xi^2)\sin m\varphi \tag{3.11}$$

式(3.11)必须满足下列边界条件

$$M_{2\xi}=-D\left[\frac{\partial^2 W_2}{\partial\xi^2}+\mu\left(\frac{\partial W_2}{\xi\partial\xi}+\frac{\partial^2 W_2}{\xi^2\partial\varphi^2}\right)\right]_{\xi=a}=M_0 \tag{3.12}$$

将式(3.11)代入(3.12)，得

$$-\sum_{m=1,3}^{\infty}\theta_m a^{-1}D(2m+1+\mu)\sin m\varphi=M_0 \tag{3.13}$$

为了解出θ_m，我们将式(3.13)的右端项M_0在区间$(0,\pi)$上展开成 Fourier 正弦级数．当我们对M_0作了奇延拓之后，得

$$M_0=\frac{4M_0}{\pi}\sum_{m=1,3}^{\infty}\frac{1}{m}\sin m\varphi \tag{3.14}$$

比较式(3.13)和式(3.14)，得

$$\theta_m=-\frac{4M_0 a}{\pi D(2m+1+\mu)m}$$

代回到式(3.11)，得

$$W_2(\xi,\varphi)=\frac{2M_0a^2}{\pi D}\sum_{m=1,3}^{\infty}\frac{\rho^2(1-\rho^2)}{m(2m+1+\mu)}\sin m\varphi \tag{3.15}$$

其中 $\rho=\xi/a$.

四、结 束 语

由上面算例可见，对于各种复杂边界条件，受复杂载荷作用的半圆板，其挠曲面方程均可用方程(2.5)表示。我们只要进行一些简单的定积分运算，便可得到半圆板挠曲面方程的解析表达式。这种算法比在每一个给定边界条件下，求解一个四阶偏微分方程的经典解法要简便，有效。应用本文方法，还可以求解更复杂边界条件和载荷条件的半圆板的弯曲，我们将继续研究。

参 考 文 献

[1] 钱伟长、叶开沅，《弹性力学》，科学出版社(1956).

[2] Timoshenko, S. and S. Woinowsky-Krieger, *Theory of Plates and Shells*, 2nd Ed. (1959).

[3] 付宝连，应用功的互等定理求解具有复杂边界条件的矩形板的挠曲面方程，应用数学和力学，3(3) (1982), 315—325.

[4] 李农、付宝连，应用功的互等定理计算弹性圆薄板挠曲面方程，应用数学和力学，9(9) (1988), 835—842.

A Method Using the Reciprocal Theorem to Solve the Bending of Thin Elastic Semicircular Plates

Li Nong

(Luoyang Institute of Technology, Luoyang, He'nan)

Abstract

The bending of the thin elastic semicircular plate, because of its complicated boundary conditions, brings some difficulties for us to obtain its solution. This paper applies the reciprocal theorem to propose a general simple convenient method to obtain the transverse deflectional equations of the plate.

Key words thin semicircular plate, reciprocal theorem, deflectional equation