应用数学和力学，第13卷第11期（1992 年11月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

分析土壤半无限域的一种有限层方法(Ⅱ)
——几种特殊情形及算例*

卢文达 杨正文**

（上海工业大学，上海市应用数学和力学研究所）

（1991年 9 月16日收到）

摘 要

本文就几种特殊情形用作者所研究的一种用于横观各向同性体动力学的有限层法作了简化分析，分别讨论了二维问题、轴对称问题以及静力问题，并推广到介质具有粘性性质的情形．对于轴对称情形，本文还给出两个算例，表明作者所研究的有限层法用于分析半无限域层状土壤介质是可行的，因而为研究土壤与结构相互作用问题提供了一条新途径．

关键词 土壤半空间 有限层方法 半无限层状土壤 土壤与结构的相互作用

一、引 言

在文献［1］中，作者详细研究了一种用于横观各向同性体动力学的有限层法的一般理论，得到了求解位移的有限层方程组式(3.22)和式(3.38)．这种有限层法可以用来分析半无限域层状土壤介质．当将介质沿深度方向人为地分成足够多层时，我们总可以得到所考虑问题的满意结果．

本文就几种特殊情形用这种有限层法作了简化分析，分别讨论了二维问题、轴对称问题以及静力问题，并推广到介质具有粘性性质的情形．对于轴对称情形，本文还给出了两个数值计算例子，例子表明，用有限层法分析半无限域层状土壤介质是可行的，因而这种有限层法为研究土壤与结构相互作用问题提供了一条新途径．

二、二 维 问 题

在重力坝和船坞底板等水工结构设计和民用建筑设计中，常将支承体——半无限域土壤介质视为二维的[2,3,4]，即半平面体．

考虑半平面体，设置笛卡尔直角坐标系xOz，其中x轴与半平面体的表面重合，z轴沿深

---

* 国家自然科学基金资助项目．

** 现在华中理工大学工程力学系工作．

度方向．关于坐标x，定义位移u和w、应力σ_{xz}和σ_{zz}以及体力密度X和Z的Fourier 变换如下

$$\{\bar{u},\bar{w}\}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\{iu,w\}\exp[-i\alpha x]dx \tag{.21a}$$

$$\{\bar{\sigma}_{xz},\bar{\sigma}_{zz}\}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\{i\sigma_{xz},\sigma_{zz}\}\exp[-i\alpha x]dx \tag{2.1b}$$

$$\{\bar{X},\bar{Z}\}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\{iX,Z\}\exp[-i\alpha x]dx \tag{2.1c}$$

其中 $\bar{X}$表示X的Fourier变换．

逆变换表示为

$$\{u,w\}=\int_{-\infty}^{\infty}\{-i\bar{u},\bar{w}\}\exp[i\alpha x]d\alpha \tag{2.2}$$

与文献[1]中的推导类似，可以得到二维问题的基本方程

$$-\left[a\alpha^2\bar{u}-\left(\frac{f}{2}\bar{u}_{,z}\right)_{,z}+\alpha c\bar{w}_{,z}+\alpha\left(\frac{f}{2}w\right)_{,z}\right]+\bar{X}=\rho\ddot{\bar{u}} \tag{2.3a}$$

$$\alpha(c\bar{u})_{,z}+\frac{f}{2}\alpha\bar{u}_{,z}+(d\bar{w}_{,z})_{,z}-\frac{f}{2}\alpha^2\bar{w}+\bar{Z}=\rho\ddot{\bar{w}} \tag{2.3b}$$

式(2.3)实际上可由文献[1]中的式(3.2)令$\bar{u}_2=0$及$\beta=0$而得到．

可见，只要将α换成r，式(2.3a,b)和文献[1]中的式(3.4a,b)完全相同．因此，我们可以象处理三维问题的面内未知量一样来分析二维问题．

三、轴对称问题

工程实践中常见到土壤介质半空间体上图形基础受轴对称荷载作用的情况[5,6]，这时自然可以将半空间体看成一个半径为无限大的旋转轴对称体，只须求解一个轴对称问题．

考虑轴对称体，设置圆柱坐标系，其中z轴沿深度方向．

在圆柱坐标系中，径向和竖向位移分量分别以u和w表示，相应的体力密度为X和Z，应力分量为σ_r、σ_z、σ_θ和σ_{rz}．

作圆柱坐标系和三维笛卡尔直角坐标系之间的变换

$$x_1=r\cos\alpha,\quad x_2=r\sin\alpha,\quad x_3=z \tag{3.1}$$

则由文献[1]中的式(3.1)，对于横观各向同性介质，得到轴对称问题的动力学方程

$$a\left(u_{,rr}+\frac{1}{r}u_{,r}-\frac{u}{r^2}\right)+\left[\frac{f}{2}(u_{,z}+w_{,r})\right]_{,z}+cw_{,rz}+X=\rho\ddot{u} \tag{3.2a}$$

$$(dw_{,z})_{,z}+\frac{f}{2}\left(w_{,rr}+\frac{1}{r}w_{,r}\right)+\left[c\left(u_{,r}+\frac{u}{r}\right)\right]_{,z}+\frac{f}{2}\left(u_{,r}+\frac{u}{r}\right)_{,z}+Z=\rho\ddot{w} \tag{3.2b}$$

对于轴对称问题，双重Fourier变换将转化为Hankel变换．因为只须关于坐标r进行变换，使得问题大为简化．

对于位移、应力和体力密度分量，定义如下0阶和1阶Hankel变换

$$\{\bar{w},\bar{\sigma}_z,\bar{Z}\}=\int_0^{\infty}r\{w,\sigma_z,Z\}J_0(\alpha r)dr \tag{3.3a}$$

$$\{\bar{u},\bar{\sigma}_r,\bar{X}\}=\int_0^{\infty}r\{u,\sigma_r,X\}J_1(\alpha r)dr \tag{3.3b}$$

其中 $J_0(\alpha r)$和$J_1(\alpha r)$分别表示0阶和1阶Bessel函数.

逆变换写为

$$\{w,\sigma_z,Z\}=\int_0^\infty \alpha\{\bar{w},\bar{\sigma}_z,\bar{Z}\}J_0(\alpha r)d\alpha \tag{3.4a}$$

$$\{u,\sigma_r,X\}=\int_0^\infty \alpha\{\bar{u},\bar{\sigma}_r,\bar{X}\}J_1(\alpha r)d\alpha \tag{3.4b}$$

对式(3.2)作Hankel变换，整理得基本方程

$$-\left[a\alpha^2\bar{u}-\left(\frac{f}{2}\bar{u}_{,z}\right)_{,z}+c\alpha\bar{w}_{,z}+\alpha\left(\frac{f}{2}\bar{w}\right)_{,z}\right]+\bar{X}=\rho\ddot{\bar{u}} \tag{3.5a}$$

$$\alpha(c\bar{u})_{,z}+\frac{f}{2}\alpha\bar{u}_{,z}+(d\bar{w}_{,z})_{,z}-\frac{f}{2}\alpha^2\bar{w}+\bar{Z}=\rho\ddot{\bar{w}} \tag{3.5b}$$

式(3.5)和式(2.3)完全一致. 因此，用有限层法分析轴对称问题实际上是分析一个二维问题.

四、静 力 问 题

在用有限层法研究动力问题时，我们曾使用标准粘性边界，它可以吸收极大部分传到边界处的能量，因而比简单地采用固定底边界条件来得优越[1]. 但是，在静力分析中，这种人工边界条件是不可能简化使用的.

在以往许多研究工作中，静力条件下，土壤介质半空间体看成一个有限域，有限域的边界多认为固定的，所有的变形能均被封闭在有限域内，只有当有限域取得足够大时，所得的结果才会正确可靠，此时需较大的计算量. 为了克服这一缺点，类似于动力分析，我们在底部边界上引入所谓的静力人工边界，它是Winkler假定的一种推广.

设层状土壤介质沿深度方向是有限厚的. 对于介质的底部边界处作如下假定

$$\sigma_{13}=k_1u_1,\quad \sigma_{23}=k_2u_2,\quad \sigma_{33}=k_3u_3 \tag{4.1}$$

其中称k_1，k_2和k_3为广义基床系数，它们描述的实际上是层状半空间体中有限厚土壤介质层下面的土壤半空间体的弹性特性，且不管此半空间体内部的特性是如何变化的.

调整k_1，k_2和k_3便能得到问题的满意解答. k_1，k_2和k_3之值可据边界能量传递的程度来确定，也可在已知问题的解答的情况下通过结果的比较而获得.

当$k_1=k_2$时，由式(4.1)得

$$\sigma_{rz}=k_1u,\quad \sigma_{\theta z}=k_2v,\quad \sigma_{zz}=k_3w \tag{4.2}$$

其中引用了文献[1]中的代换式(3.3).

因为对于静力问题，平衡方程可由动力学方程中令$\rho=0$得到，故对于面内未知量，特征方程简化为

$$\frac{f}{2}d(m^2-\mu^2)^2+[c(c+f)-ad]r^2(m^2-\mu^2)+2fc\mu^2r^2+\frac{f}{2}ar^4=0 \tag{4.3}$$

对于面外未知量，特征方程为

$$p^2+2\mu p+(b-a)r^2/f=0 \tag{4.4}$$

式(4.3)和式(4.4)与Rowe等的研究工作[7]吻合.

考虑到式(4.2)，则对于面内未知量，文献[1]中的整体方程组式(3.22)是$2(n+1)$阶的，由总刚度矩阵$\boldsymbol{K}(r)$的形式见式(3.26)，其中

$$\mathring{D}_{n+1}=\mathrm{diag}(k_1,k_3) \tag{4.5}$$

而对于面外未知量，文献[1]中的整体方程组式(3.38)是$(n+1)$阶的，外总刚度矩阵K_θ的形式见式(3.40)，但其中的$\rho_n^*\omega\bar{V}_s$应换成k_2.

五、粘弹性问题

在前面的所有分析中，我们都把土壤介质看成一种弹性介质．然而，事实并非如此，土壤介质的本构关系极其复杂，至今也未能完全了解．但是，可以肯定，考虑土壤介质中的粘性阻尼从而将其视为粘弹性介质相比于简单地看成纯弹性介质则是一个进步．

因此，我们将有限层法推广到粘弹性介质，以便更为准确地模拟土壤介质半空间体．

通常情况下，介质中的内阻尼即粘性阻尼与介质中质点的形变速率成正比，对于软土或者岩石这类介质，表现为粘滞阻尼，则材料函数可表示为如下形式

$$E=E_0(1+j\eta) \tag{5.1}$$

其中　E_0是弹性系数，η称为介质的粘滞阻尼系数，可取10%或更小．

比较式(5.1)和文献[1]中的式(2.3)可见，求解粘弹性问题的有限层法完全可以借助于求解弹性问题的有限层法，只不过材料函数是复数形式，须在复数域内求解．正如Christensen所指出的那样[8]，线性粘弹性问题的解完全可以借助于其相应弹性问题的解而获得．

六、数值计算

在使用有限层法进行数值计算时，关键是如何进行Fourier变换的反演，建议采用FFT算法。至于求解方程组所需的计算量是很少的．

作为算例，对于轴对称情形，本文用有限层法求得了表面受载层状土壤介质的表面沉陷以及分层土壤介质半空间体上刚性圆盘的位移函数．

例1　静力分析．该层状土壤介质层厚H，表面受轴对称均布荷载q^*，其直径为D，下表面固定，如图1所示．求荷载中心点的表面沉陷δ.

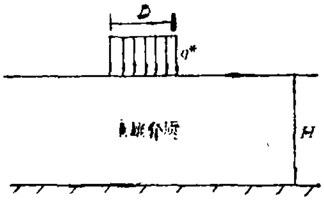

图1　表面受轴对称荷载的层状土壤介质

表1　　表面沉陷

有限层总数	2	2	5	5
模拟方法	a	b	a	b
$\beta^*\delta/Dq^*$ 解[9]	1.082	1.011	1.020	0.997

设$H/D=5$，材料函数的变化规律为

$$E=\alpha^*z+\beta^* \tag{6.1}$$

若取$\beta^*=6000$，$D=10$，沿深度方向人为地分成5层，各层交接面处的E按等比级数增加，则有

$$H=50,\qquad \alpha^*=600,\qquad E_l/E_k=1.431$$
$$z_1=0\qquad z_2=4.31\qquad z_3=10.48$$
$$E_1=6000,\qquad E_2=8586,\qquad E_3=12286$$

$$z_4=19.30,\quad z_5=31.93,\quad z_6=50$$
$$E_4=17581,\quad E_5=25158,\quad E_6=36000$$

当泊桑系数取常值$\nu=1/3$时，表1中列出了沿深度方向分别划分为2层或5层使用(a)配点法或(b)最小二乘法模拟材料函数变化规律的结果．显然，对于这个问题只需将层状介质划分为5个有限层，便能得到满意的结果．同时可见，配点法因总是过小估计材料函数，故对表面沉陷的估计过大．最小二乘法用来模拟材料函数变化规律显得更好．

例2 动力分析．如图2所示，分层土壤介质半空间体上的刚性圆盘中心处作用有集中力$P_0\exp[j\omega t]$，求其竖向位移函数的实部F_1与无量纲频率a_0的关系曲线，其中$a_0=\omega r_0/c_2$，c_2是介质中的剪切波波速．

取底部固定边界条件．位移函数F_1与a_0的关系曲线绘于图3中；当第2层介质无限厚时，Hadjian等的结果也示于图3中．可见，当第二层足够厚时，本文用有限层方法得到的结果（材料函数用最小二乘法模拟）与Hadjian等的结果基本吻合．造成误差的原因除第二层介质的厚度不同之外，还在于材料函数的变化是跳跃性的，且第一层与第二层层厚相差太大．若材料函数沿深度方向连续变化且递增不快，则可望得到更好的结果．

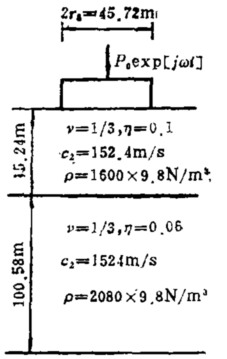

图2 层状土壤介质半空间体上的无重刚性圆盘

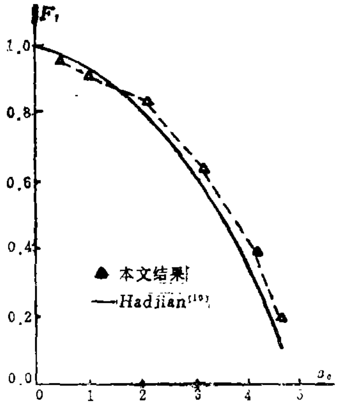

图3 位移函数F_1与无量纲频率a_0的关系

七、结　论

本文及文献[1]所研究的有限层法的基本思想是通过将半无限域介质沿深度方向人为地划分为若干个有限厚的层状单元，在每个单元里将材料函数的变化规律用指数函数来模拟，从而便于寻求解的解析表达式．这实际上也是一种半解析方法，因而有一般半解析法具备的数据前后处理量少及计算量小等优点．

虽然研究土壤介质及地基的工作还有很多，但着重研究介质内部性质变化的工作并不多见．

本文对于轴对称情形，给出了两个数值计算例子，结果表明用有限层法解半无限域问题是行之是效的．对于一般动力学问题，只须利用对时间变量的Fourier变换，在频域中关于足够多个频率ω求解，便能由Fourier逆变换求得问题的解答．

作者对钱伟长教授的关心和指导表示衷心的感谢．

参考文献

[1] 杨正文、卢文达，分析土壤半无限域的一种有限层方法（Ⅰ）——一般理论，应用数学和力学 13(10) (1992), 881—890.

[2] 张子明、赵光恒，成层地基上基础梁的计算，水利学报，(2) (1986), 65—72.

[3] Chopra, A.K., et al., Dynamic stiffness matrices for viscoelastic half-plane foundations, *ASCE*, 102 (EM3), 497—514.

[4] 张瑞丰、倪汉根，半无限粘弹性地基对重力坝特性的影响，水利学报，(4) (1986), 66—71.

[5] Kausel, E. and J.M. Roesset, Dynamic stiffness of circular foundations, *ASCE*, 101, (EM6) (1975), 771—785.

[6] 王凯，N层弹性连续体系在圆形均布垂直荷载作用下的力学计算，土木工程学报，15(2) (1982), 65—76.

[7] Rowe, R.K. and J.R. Booker, Finite layer analysis of nonhomogeneous soils, *ASCE*, 108(EM1) (1982), 115—132.

[8] Christensen, R. M., *Theory of Viscoelasticity, An Introduction*, 2nd Edition, Academic Press (1982).

[9] Brown, P.T. and R.E. Gibson, Surface settlement of a deep elastic layer whose modulus increases linearly with depth, *Canadian Geotechnical Journal*, 9 (4) (1972), 467—476.

[10] Hadjian, A.H. and J.E. Luco, On the importance of layering on the impedance functions, *Proc. 6th WCEE*, New Delhi (1977), 1675—1680.

Finite Layer Analysis for Semi-Infinite Soils (Ⅱ) ——Special Cases and Numerical Examples

Loo wen-da Yang Zheng-wen

(Shanghai UniV. of Tech.; Shanghai Institute of Appl. Math. &. Mech., Shanghai)

Abstract

In the present paper reductions of the finite layer method once studied in detail by the authors for the elastodynamics of transverse isotropic bodies are given to several special cases. Two-dimensional problems, axisymmetric problems and static problems are discussed, respectively, and this finite layer method is also generalized to the problems in which materials possess viscous properties. Two numerical examples have been presented for the axisymmetric case. From these two examples it can be concluded that the finite layer method can be used to analyse semi-infinite layered soils and to deal with the problem of the interaction between soils and structures.

Key words semi-infinite soils, finite layer method, numerical analysis