

# 瞬态两相流的矢通量分裂解

俞荣周

(华侨大学, 泉州)

(刘人怀推荐, 1991年11月14日收到)

## 摘 要

本文用矢通量分裂法求解了瞬态两相流问题。首先导出了瞬态两相流控制方程的特征根, 然后将矢通量分裂成二个子矢量, 使每一个子矢量仅包含一种符号的特征值, 再利用空间的一侧差分, 得到差分方程并求解, 最后将数值预测与实验结果进行了比较, 其结果十分吻合。

**关键词** 两相流 矢通量 分裂法

## 符 号

$c_p$	J/kg·°C	定压比热	$h_{gf}$	J/kg	汽化潜热
$c$	m/s	音速	$p$	N/m <sup>2</sup>	压力
$d$	m	管径	$T$	°C, K	温度
$f$		阻力系数	$t$	s	时间
$G$	kg/m <sup>2</sup> ·s	质量流量	$u$	m/s	速度
$g$	m/s <sup>2</sup>	重力加速度	$V_g$	m <sup>3</sup> /kg	蒸汽比容
$h_f$	J/kg	液体饱和焓	$V_l$	m <sup>3</sup> /kg	液体比容
$h_g$	J/kg	蒸汽饱和焓	$Z$	m	长度
$a$		空隙度	$\lambda$		特征值
$\beta$	m <sup>3</sup> ·K/J	特性关系	$\rho$	kg/m <sup>3</sup>	密度
$\theta$		与沿垂方向的倾角	$\rho_m$	kg/m <sup>3</sup>	平均密度

## 一、前 言

随着发电厂单机容量和给水泵容量的增加, 给水泵的安全工作变得很重要, 给水泵的安全工作主要取决于下降管的汽化以及汽化程度问题, 对于前者, 研究的较多, 对于后者, 至今未见报道, 但却是一个十分重要的问题。如在火力发电厂的变工况情况下, 常在除氧器的下降管中发生两相流流动, 严重的情况下汽泡前沿可达到给水泵的吸入口, 引起给水泵工作不稳定甚至停水, 造成事故。因此, 下降管中的瞬态两相流的研究, 对于给水泵的安全工作十分重要。

瞬态两相流是一个非线性双曲线型方程组, 在一般的情况下得不到封闭的解析解, 因此数值方法具有重要意义。

对双曲线型方程曾用特征线-差分法<sup>[1~3]</sup>求解,但对于亚音速流,方程的特征值有正有负,因此若采用单侧空间差分格式,常引起不稳定,但一侧的空间差分比中心差分来说有较高的计算效率。

G·莫拉斯<sup>[4]</sup>提出了一种 $\lambda$ -格式积分气动力学欧拉方程,该方法考虑了波的传播方向问题,最近有人提出<sup>[5,6]</sup>对于波的不同传播方向采用不同的差分格式来求解单相流问题。

然而对于两相流,它远比单相流复杂,我们的目的在于寻找一种矢量通量分裂的方法求解两相流问题以便为给水泵安全操作提供科学根据。

## 二、瞬态两相流方程组及特征根

在绝热,无滑动和热平衡状态下,一维瞬态两相流问题可采用三方程组的控制方程。

$$[A] \frac{\partial [W]}{\partial t} + [B] \frac{\partial [W]}{\partial z} = [C] \quad (2.1)$$

这里

$$[W] = \begin{bmatrix} G \\ p \\ \alpha \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -C^2 \rho_{gf} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

$$[B] = \begin{bmatrix} \frac{2G}{\rho_m} & 1 & -\frac{G^2 \rho_{gf}}{\rho_m^2} \\ 0 & \frac{G}{\rho_m} & -\frac{c^2 G \rho_{gf}}{\rho_m} \\ \frac{1}{\rho_{gf}} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

$$[C] = \begin{bmatrix} g \rho_m - \frac{2fG^2}{d \rho_m} \\ \frac{2fG^3}{d \beta \rho_m^2 (\rho c_p)_m} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

其中 $c$ 是音速

$$c^2 = \frac{h_{gf} \rho_f \rho_g}{c_{gf} \beta \rho_m^2 \rho_{fg}} \quad (2.6)$$

在均相热平衡状态下

$$\beta = \frac{T_f}{h_{gf}} (V_g - V_f) \quad (2.7)$$

$$\rho_m = \alpha \rho_g + (1 - \alpha) \rho_f \quad (2.8)$$

如果用 $[A]^{-1}$ 左乘(2.1)式,那么得

$$\frac{\partial[W]}{\partial t} + [D] \frac{\partial[W]}{\partial z} = [E] \quad (2.9)$$

这里

$$[D] = \begin{bmatrix} \frac{2G}{\rho_m} & 1 & -\frac{G^2 \rho_{gf}}{\rho_m^2} \\ c^2 & \frac{G}{\rho_m} & -\frac{c^2 G \rho_{gf}}{\rho_m} \\ \frac{1}{\rho_{gf}} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

$$[E] = \begin{bmatrix} g\rho_m - \frac{2fG^2}{d\rho_m} \\ 2fG^3 \\ d\rho_m^2 \beta(\rho c_p)_m \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

如果方程 (2.9) 的特征根都是实数, 那么该方程是双曲线型, 为了求方程 (2.9) 的特征根, 令

$$|[D] - \lambda[I]| = 0 \quad (2.12)$$

由此得到方程 (2.9) 的特征根是:

$$\lambda_1 = \frac{G}{\rho_m} + c, \quad \lambda_2 = \frac{G}{\rho_m} - c, \quad \lambda_3 = \frac{G}{\rho_m} \quad (2.13)$$

流体的速度  $u = G/\rho_m$ , 如果  $|u| < c$  为亚音速流动, 管道中多属于此流动, 在这种情形下有混合特征根, 因此求解时必须考虑特征根的这种形式。

### 三、相容方程和边界条件

求解方程 (2.9) 需要附加初始和边界条件, 对于边界条件, 在一般情况下需要知道进出口截面的质量流量  $G$ , 压力  $P$  和空隙度  $\alpha$ , 但对于双曲线型方程, 其中某些边界条件可以由初始时刻值来决定, 这也就是由相容方程来决定, 这种边界条件称计算边界条件。

相容方程的推导, 设  $[L^i]$  表示相应于特征根  $\lambda_i$  的  $[D]$  的左特征向量, 为导出此特征向量我们有:  $[L^i] \{ [D] - \lambda_i [I] \} = 0$  (3.1)

这里  $[L^i] = [L_1^i \quad L_2^i \quad L_3^i]$

对于  $\lambda_1 = G/\rho_m + c$ , 由 (3.1) 式得

$$[L_1^i \quad L_2^i \quad L_3^i] \begin{bmatrix} \frac{G}{\rho_m} - c & 1 & -\frac{G^2 \rho_{gf}}{\rho_m^2} \\ c^2 & -c & -\frac{c^2 G \rho_{gf}}{\rho_m} \\ \frac{1}{\rho_{gf}} & 0 & -\frac{G}{\rho_m} - c \end{bmatrix} = 0 \quad (3.2)$$

解出 (3.2), 得相应于  $\lambda_1$  的特征向量

$$[L^1] = \left[ 1 \quad \frac{1}{c} \quad -\frac{\rho_{gf} G}{\rho_m} \right] \quad (3.3)$$

类似的得相应于 $\lambda_2, \lambda_3$ 的特征向量

$$[L^2] = \begin{bmatrix} -1 & \frac{1}{c} & \frac{G\rho_{gf}}{\rho_m} \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

$$[L^3] = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{c^2} & \rho_{gf} \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

现在用这些特征向量左乘(2.9)式, 便得到分别相应于 $\lambda_i$ 的相容方程

$$[L^i] \left\{ \frac{\partial[W]}{\partial t} + [D] \frac{\partial[W]}{\partial z} \right\} = [L^i][E]$$

由(3.1)式, 上式可写成

$$[L^i] \left\{ \frac{\partial[W]}{\partial t} + \lambda_i \frac{\partial[W]}{\partial z} \right\} = [L^i][E] \quad (3.6)$$

因此分别相应于 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 的相容方程式是:

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{c} \frac{\partial p}{\partial t} - \frac{\rho_{gf}G}{\rho_m} \frac{\partial \alpha}{\partial t} + \left( \frac{G}{\rho_m} + c \right) \frac{\partial G}{\partial z} + \left( \frac{G}{\rho_m} + c \right) \\ \cdot \frac{1}{c} \frac{\partial p}{\partial z} - \left( \frac{G}{\rho_m} + c \right) \frac{\rho_{gf}G}{\rho_m} \frac{\partial \alpha}{\partial z} = g\rho_m - \frac{2fG^2}{d\rho_m} + \frac{2fG^3}{cd\rho_m^2\beta(\rho c_p)_m} \end{aligned} \quad (3.7a)$$

$$\begin{aligned} -\frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{c} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\rho_{gf}G}{\rho_m} \frac{\partial \alpha}{\partial t} - \left( \frac{G}{\rho_m} - c \right) \frac{\partial G}{\partial z} + \left( \frac{G}{\rho_m} - c \right) \frac{1}{c} \frac{\partial p}{\partial z} \\ + \left( \frac{G}{\rho_m} - c \right) \frac{\rho_{gf}G}{\rho_m} \frac{\partial \alpha}{\partial z} = -g\rho_m + \frac{2fG^2}{d\rho_m} + \frac{1}{c} \frac{2fG^3}{d\rho_m^2\beta(\rho c_p)_m} \end{aligned} \quad (3.7b)$$

$$-\frac{1}{c^2} \frac{\partial p}{\partial t} + \rho_{gf} \frac{\partial \alpha}{\partial t} - \frac{1}{c^2} \frac{G}{\rho_m} \frac{\partial p}{\partial z} + \rho_{gf} \frac{G}{\rho_m} \frac{\partial \alpha}{\partial z} = -\frac{1}{c^2} \frac{2fG^3}{d\rho_m^2\beta(\rho c_p)_m} \quad (3.7c)$$

关于边界条件, 从式(2.13)知, 在管的入口截面有一根特征线从内部向外部穿过, 这表明可以沿着这根特征线确定一组入口截面的计算边界条件, 它由相容方程(3.7b)确定, 入口截面其余二个边界条件必须给定, 对于出口截面, 由式(2.13)知有二根特征线穿过, 由此有二个计算边界条件, 它们分别由相容方程(3.7a)和(3.7c)确定, 另一组必须给定。

#### 四、矢通量分裂及差分方程

现在回到式(2.9), 令

$$[T]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{c} & -\frac{\rho_{gf}G}{\rho_m} \\ -1 & \frac{1}{c} & \frac{\rho_{gf}G}{\rho_m} \\ 0 & -\frac{1}{c^2} & \rho_{gf} \end{bmatrix}$$

将其左乘到式(2.9)并经适当变换我们得

$$[T]^{-1} \frac{\partial[W]}{\partial t} + [A_D][T]^{-1} \frac{\partial[W]}{\partial z} = [T]^{-1}[E] \quad (4.1)$$

这里  $[A_D]$ 是式(2.9)特征根的对角矩阵

$$[A_b] = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3 \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

式(4.1)又可写成下式

$$\frac{\partial[W]}{\partial t} + [T][A_b][T]^{-1} \frac{\partial[W]}{\partial z} = [E] \quad (4.3)$$

比较(2.9)式与(4.3)式得:

$$[D] = [T][A_b][T]^{-1} \quad (4.4)$$

现在如果 $\lambda_i$ ,  $[A_b]$ 和 $[D]$ 分别被分成正负的两部份, 即

$$\lambda_i = \lambda_i^+ + \lambda_i^- \quad (4.5a)$$

$$[A_b] = [A_b]^+ + [A_b]^- \quad (4.5b)$$

$$[D] = [D]^+ + [D]^- \quad (4.5c)$$

我们得

$$[D]^+ = [T][A_b]^+[T]^{-1} \quad (4.6)$$

$$[D]^- = [T][A_b]^- [T]^{-1} \quad (4.7)$$

这里

$$\lambda_i^+ = \frac{\lambda_i + |\lambda_i|}{2} \quad \lambda_i^- = \frac{\lambda_i - |\lambda_i|}{2} \quad (4.8)$$

将式(2.13)代入式(4.8), 特征值就分裂成如下式

$$\lambda_1^+ = \frac{u+c+|u+c|}{2} \quad \lambda_1^- = \frac{u+c-|u+c|}{2} \quad (4.9a)$$

$$\lambda_2^+ = \frac{u-c+|u-c|}{2} \quad \lambda_2^- = \frac{u-c-|u-c|}{2} \quad (4.9b)$$

$$\lambda_3^+ = \frac{u+|u|}{2} \quad \lambda_3^- = \frac{u-|u|}{2} \quad (4.9c)$$

最后, 在 $0 \leq u \leq c$ 范围内, 子矢量通量 $[D]^+$ ,  $[D]^-$ 分别是:

$$[D]^+ = \begin{bmatrix} \frac{\lambda_1}{2} \left( 1 + \frac{G}{c\rho_m} \right) & \frac{\lambda_1}{2c} \left( 1 + \frac{G}{c\rho_m} \right) - \frac{\lambda_3 G}{c^2 \rho_m} & -\frac{\lambda_1 \rho_{gf} G}{2\rho_m} \left( 1 + \frac{G}{c\rho_m} \right) + \frac{\lambda_3 \rho_{gf} G}{\rho_m} \\ \frac{\lambda_1 c}{2} & \frac{\lambda_1}{2} & -\frac{\lambda_1 \rho_{gf} G c}{2\rho_m} \\ \frac{\lambda_1}{2c\rho_{gf}} & \frac{\lambda_1}{2c^2 \rho_{gf}} - \frac{\lambda_3}{c^2 \rho_{gf}} & -\frac{\lambda_1 G}{2c\rho_m} + \lambda_3 \end{bmatrix} \quad (4.10a)$$

$$[D]^- = \begin{bmatrix} \frac{\lambda_2}{2} \left( 1 - \frac{G}{c\rho_m} \right) & -\frac{\lambda_2}{2c} \left( 1 - \frac{G}{c\rho_m} \right) & -\frac{\lambda_2 \rho_{gf} G}{2\rho_m} \left( 1 - \frac{G}{c\rho_m} \right) \\ -\frac{\lambda_2 c}{2} & \frac{\lambda_2}{2} & \frac{\lambda_2 c \rho_{gf} G}{2\rho_m} \\ -\frac{\lambda_2}{2c\rho_{gf}} & \frac{\lambda_2}{2c^2 \rho_{gf}} & \frac{\lambda_2 G}{2c\rho_m} \end{bmatrix} \quad (4.10b)$$

这样方程(2.9)变为如下形式

$$\frac{\partial[W]}{\partial t} + [D]^+ \frac{\partial[W]}{\partial z} + [D]^- \frac{\partial[W]}{\partial z} = [E] \quad (4.11)$$

按照 Fourier 稳定性分析<sup>[8]</sup>，我们发现为了满足稳定性要求，式(4.11)左边的第二项必须采用向后差分格式而第三项必须用向前差分，现在用∇表示一阶后差算子，用Δ表示一阶前差算子，那么(4.11)式可以写成如下显式的差分方程

$$[W]_i^{j+1} = [W]_i^j + [E] \Delta t - \{ [D]^+ \nabla [W]_i^j + [D]^- \Delta [W]_i^j \} \frac{\Delta t}{\Delta z} \quad (4.12)$$

当  $|\lambda_{\max}^{\pm}| \frac{\Delta t}{\Delta z} \leq 1$  (4.13)

时方程(4.12)稳定<sup>[1]</sup>。

### 五、理论预测与实验结果的比较

为了与实验结果进行比较，将管道分成N个截面（参看图1），在入口截面取质量流量G为计算边界条件，取压力p和汽泡空隙度α为给定边界条件。对出口截面，取压力p和空隙度α为计算边界条件，取质量G流量为给定边界条件。

图2和图3分别是当Δt=0.001，Δz=1时，管中不同截面处空隙度α和压力p随时间的变化关系曲线，其中实线是进口截面所给定的边界条件。

图4和图5表示了理论预测与实验结果<sup>[9]</sup>的比较，图4是管的中间截面处空隙度α随时间的变化关系。图5是管的进口截面压力差随时间的变化关系，图4中的实线是进口截面处的给定边界条件。这两个图中的虚线是本文的理论预测值，而\*号是相同初始边界条件下的实验结果。从图4、图5可知理论预测和实验结果十分吻合。

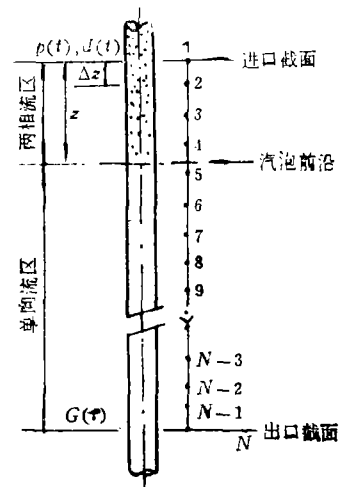


图1 管道结点的划分

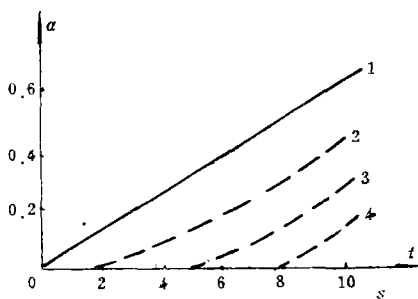


图2 不同截面处α与t关系

- (1)进口截面 (2)距进口3米
- (3)距进口6米 (4)距进口10米

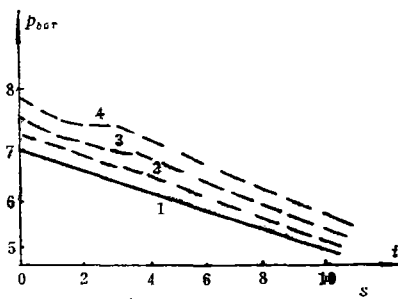
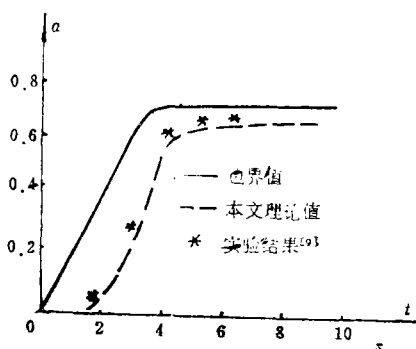
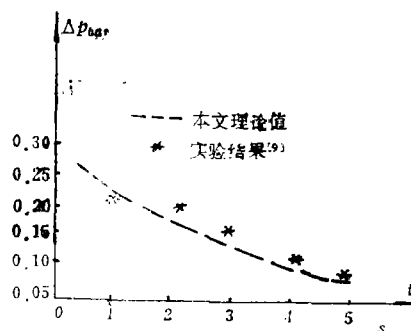


图3 不同截面处P与t关系

- (1)进口截面 (2)距进口3米
- (3)距进口6米 (4)距进口10米

### 六、结 论

当机组甩负荷后，在下降管中出现瞬态两相流动，它的求解对确定给水泵的安全工作十分重要，对于流动模型和求解方法方面都有待进一步研究。

图 4  $\alpha$ 与 $t$ 的关系图 5 压差 $\Delta P$ 与 $t$ 的关系

本文采用的无滑动均相方程模型似乎是一个较好的模型。

本文提出将方程组的矢量通量分裂成两个子矢量通量,使每一个子矢量通量仅包含一个符号特征根的求解办法,克服了采用一侧空间差分不稳定性问题,对于求解瞬态两相流动问题具有普遍意义。

致谢 H. C. Simpson教授在本课题研究中曾给予指导,提供了他的博士研究生N. C. Kimchoon 的实验结果并审阅了原稿,在此深表谢意。

#### 参 考 文 献

- [1] Courant, R., E. Isaacson and M. Rees, On the solution of nonlinear hyperbolic differential equation by finite differences, *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 5 (1952), 243—255.
- [2] Whitham, G. B., *Linear and Non-Linear Waves*, Wiley, New York (1974).
- [3] Gonzalez—Santal, J. M. and R. T. Lahey, Jr., An exact solution for flow of transients in two—phase system, by method of characteristics, *J. Heat Transfer* 95(470), (1973).
- [4] Moretti, G. The  $\lambda$ -scheme, *Computers and Fluid*, 7(1979), 191—205.
- [5] Chakravarthy, S. R., D. A. Anderson and M. Salas, The splist—coefficient matrix method for hyperbolic systems of gas dynamic equations, AIAA Paper 80—0263, Pasadena, California (1980).
- [6] Steger, J. L., Coefficient matrices for implicit finite—difference solution of the inviscid fluid conservation law equation, *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, 13, (1978), 175—188.
- [7] Banerjee, E., and W. T. Hancock, On the development of methods for analysing transient flow—boiling, *Int. J. Multiphase Flow*, 4 (1978), 437—460.
- [8] Steger, J. L. and R. F. Warming, Flux vector splitting of the inviscid gasdynamic equations with application to finite—difference methods, *J. of Comp. Physics*, 40 (1981), 263—293.
- [9] Kim—choon, N. G, Some aspects of transient two—phase flow, Ph. D. Thesis, University of Strathclyde, Glasgow.

## The Solution for Two-Phase Flow by Split Flux Vector Method

Weng Rong-zhou

(*Hua Qiao University, Quanzhou*)

### Abstract

In this paper the transient two-phase flow equations and their eigenvalues are first introduced. The flux vector is then split into subvectors which just contain a specially signed eigenvalue. Using one-sided spatial difference operators finite difference equations and their solutions are obtained. Finally, comparison with experiment shows predicted results produce good agreement with experimental data

**Key words** two-phase flow, vector flux, split flux vector method