应用数学和力学，第13卷第8期(1992年8月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

模糊(Fuzzy)映象的广义补余问题*

张石生　　黄南京

（成都 四川大学数学系，1991年7月1日收到）

摘　要

本文引入一类关于模糊（Fuzzy）映象的新的广义补余问题，构造出一类新的迭代算法．我们讨论这类广义补余问题解的存在性及迭代序列的收敛性．

关键词　Fuzzy映象　广义补问题　算法

一、引　言

自60年代早期由Lemke[1]，Cottle 与 Dantzig[2] 及另外一些作者引入并讨论相补问题以来，相补理论大量地应用于数学和工程技术的各个方面．近来，为了研究产生于控制与优化，经济与运输平衡，弹性接触问题与介质渗流等方面的大量问题，人们从许多方面出发推广和发展相补理论（参见引文[3～5]及其参考文献）．

本文继续这方面的研究工作，引入一类关于模糊（Fuzzy）映象的新的广义补余问题，构造出一类新的迭代算法，讨论这类广义补余问题解的存在性以及迭代序列的收敛性．

二、预 备 知 识

以下我们用$\mathscr{F}(R^n)$表R^n上Fuzzy集之全体．从R^n到$\mathscr{F}(R^n)$的映象称为Fuzzy映象．设F是R^n上的Fuzzy映象，则$F(x)$（以下简记为F_x）是R^n上的Fuzzy集，而$F_x(y)$是点y在F_x处的隶属度．

设$B\in\mathscr{F}(R^n)$，$p\in[0,1]$，则集

$$(B)_p=\{x\in R^n:\ B(x)\geqslant p\}$$

称为B的p-截集．

Fuzzy映象$F:R^n\to\mathscr{F}(R^n)$称为满足条件(I)，如果下面的条件成立：

(I) 存在函数 p: $R^n\to[0,1]$，使得对任一$x\in R^n$,截集 $(F_x)_{p(x)}\in C(R^n)$，这里 $C(R^n)$表示R^n的非空紧子集之全体．

利用Fuzzy映象F，我们定义集值映象$\tilde{F}$如下：

$$\tilde{F}:\ R^n\to C(R^n),\ x\mapsto(F_x)_{p(x)}$$

* 国家自然科学基金资助课题

我们称$\tilde{F}$为由Fuzzy映象F导出的集值映象。

以下我们分别用$(\cdot,\cdot)$和$\|\cdot\|$表示R^n的内积和范数。

给定映象T: $R^n\to R^n$, $p:R^n\to[0,1]$，非线性映象$A:R^n\to R^n$及Fuzzy映象$F:R^n\to\mathscr{F}(R^n)$，我们考虑下述问题：寻求$u,y\in R^n$，使得$F_u(y)\geqslant p(u)$，且

$$u\geqslant 0,\ Tu+Ay\geqslant 0,\ (u,Tu+Ay)=0 \tag{2.1}$$

如果T是非线性映象，则问题(2.1)称为关于Fuzzy映象的广义强非线性补问题。如果T是仿射变换$u\mapsto Mu+q$，其中$M\in R^{n\times n}$, $q\in R^n$,则问题(2.1)等价于寻求$u,y\in R^n$，使得$F_u(y)\geqslant p(u)$，且

$$u\geqslant 0,\ Mu+q+Ay\geqslant 0,\ (u,Mu+q+Ay)=0 \tag{2.2}$$

问题(2.2)称为关于Fuzzy映象的广义适度非线性补问题。

设$G:R^n\to 2^{R^n}$是一集值映象，借用G，定义一模糊映象$F:R^n\to\mathscr{F}(R^n)$, $x\mapsto\chi_{G(x)}$，其中$\chi_{G(x)}$是$G(x)$的特征函数。取$p(x)\equiv 1$, $x\in R^n$，则问题(2.1)，(2.2)分别等价于求$u\in R^n$, $y\in F(u)$，使

$$u\geqslant 0,\ Tu+Ay\geqslant 0,\ (u,Tu+Ay)=0 \tag{2.3}$$

$$u\geqslant 0,\ Mu+q+Ay\geqslant 0,\ (u,Mu+q+Ay)=0 \tag{2.4}$$

如果$G:R^n\to R^n$是恒等映象，则问题(2.3)等价于寻求$u\in R^n$，使

$$u\geqslant 0,\ Tu+Au\geqslant 0,\ (u,Tu+Au)=0 \tag{2.5}$$

我们称问题(2.5)为强非线性补问题，而问题(2.4)等价于寻求$u\in R^n$，使

$$u\geqslant 0,\ Mu+q+Au\geqslant 0,\ (u,Mu+q+Au)=0 \tag{2.6}$$

我们称问题(2.6)为适度非线性补问题（见Noor[6,7]）。

问题(2.5)、(2.6)产生于下述类型的带约束条件的非线性偏微分不等式的有限差分（有限元）逼近：

$$\left.\begin{array}{l} -Lu(x)+f(x,u(x))\geqslant 0,\ x\in D;\ u(x)\geqslant 0,\ x\in D \\ u(x)[-Lu(x)+f(x,u(x))]=0,\ x\in D;\ u(x)=g(x),x\in S \end{array}\right\} \tag{2.7}$$

其中L是已知的非线性（线性）椭圆型算子，$D\subset R^n$是具边界S的区域，$f(u)\equiv f(x,u(x))$是x与$u(x)$的非线性函数，g是给定的函数。

能写成形式(2.7)的自由边值问题的熟知的例子，包含了介质渗流、轴承润滑问题与弹性接触等问题（参见[3～5]）。

显然，问题(2.2)～(2.6)均为问题(2.1)的特例。

问题(2.1)和(2.2)能写成

$$u\geqslant 0,\ v=Tu+Ay\geqslant 0,\ (u,v)=0 \tag{2.8}$$

$$u\geqslant 0,\ v=Mu+q+Ay\geqslant 0,\ (u,v)=0 \tag{2.9}$$

现在我们考虑下述变换：

$$u=(|x|+x)/2,\ v=(\rho E)^{-1}(|x|-x) \tag{2.10}$$

其中$\rho>0$。$E\in R^{n\times n}$是正对角矩阵。显然$u\geqslant 0$, $v\geqslant 0$。利用(2.10)，我们易知问题(2.8)和(2.9)分别等价于寻求$x,y\in R^n$，使得

$$F_{\frac{|x|+x}{2}}(y)\geqslant p\left(\frac{|x|+x}{2}\right)$$

且

$$x=\frac{|x|+x}{2}-\frac{\lambda\rho}{2}\left\{T\left(\frac{|x|+x}{2}\right)+Ay\right\} \tag{2.11}$$

$$x=\frac{|x|+x}{2}-\frac{\lambda\rho E}{2}\left\{M\left(\frac{|x|+x}{2}\right)+q+Ay\right\} \tag{2.12}$$

其中$\rho>0$是常数．

三、算　　法

根据上节的讨论，我们构造问题(2.8)和(2.9)的迭代算法如下：

算法3.1　设$F:R^n\to\mathscr{F}(R^n)$为满足条件(I)的Fuzzy映象，给定$x_0\in R^n$，取$y_0\in\tilde{F}((|x_0|+x_0)/2)$，令

$$x_1=(1-\lambda)\frac{|x_0|+x_0}{2}+\lambda\left(\frac{|x_0|+x_0}{2}-\frac{\rho}{2}\left\{T\left(\frac{|x_0|+x_0}{2}\right)+Ay_0\right\}\right)$$

因为$y_0\in\tilde{F}((|x_0|+x_0)/2)$，$F$满足条件(I)，故$y_0\in\tilde{F}((|x_0|+x_0)/2)\in C(R^n)$．由[8]知存在$y_1\in\tilde{F}((|x_1|+x_1)/2)$，使得

$$\|y_0-y_1\|\leqslant H\left(\tilde{F}\left(\frac{|x_0|+x_0}{2}\right),\ \tilde{F}\left(\frac{|x_1|+x_1}{2}\right)\right)$$

其中$H(\cdot,\cdot)$表示$C(R^n)$上的Hausdorff度量．令

$$x_2=(1-\lambda)\frac{|x_1|+x_1}{2}+\lambda\left(\frac{|x_1|+x_1}{2}-\frac{\rho}{2}\left\{T\left(\frac{|x_1|+x_1}{2}\right)+Ay_1\right\}\right)$$

根据归纳法，我们可得两序列$\{x_n\}$及$\{y_n\}$如下：

$$\left.\begin{aligned}&y_n\in\tilde{F}((|x_n|+x_n)/2)\\&\|y_n-y_{n+1}\|\leqslant H\left(\tilde{F}\left(\frac{|x_n|+x_n}{2}\right),\ \tilde{F}\left(\frac{|x_{n+1}|+x_{n+1}}{2}\right)\right)\\&x_{n+1}=(1-\lambda)\frac{|x_n|+x_n}{2}+\lambda\left(\frac{|x_n|+x_n}{2}-\frac{\rho}{2}\left\{T\left(\frac{|x_n|+x_n}{2}\right)+Ay_n\right\}\right)\\&\qquad\qquad(n=0,1,2,\cdots)\end{aligned}\right\} \tag{3.1}$$

其中$0<\lambda<1$，$\rho>0$是松驰参数．

算法3.2　设F是满足条件(I)的Fuzzy映象，取$x_0\in R^n$，仿算法3.1我们可得两序列$\{x_n\}$及$\{y_n\}$如下：

$$\left.\begin{aligned}&y_n\in\tilde{F}((|x_n|+x_n)/2)\\&\|y_n-y_{n+1}\|\leqslant H\left(\tilde{F}\left(\frac{|x_n|+x_n}{2}\right),\ \tilde{F}\left(\frac{|x_{n+1}|+x_{n+1}}{2}\right)\right)\\&x_{n+1}=(1-\lambda)\frac{|x_n|+x_n}{2}+\frac{\lambda}{2}\left(|x_n|+x_n-\rho E\left\{M\left(\frac{|x_n|+x_n}{2}\right)\right.\right.\\&\qquad\left.\left.+q+L(x_{n+1}-x_n)+Ay_n\right\}\right)\qquad(n=0,1,2,\cdots)\end{aligned}\right\} \tag{3.2}$$

其中$0<\lambda<1$，$\rho>0$是松驰参数，E,L是$R^{n\times n}$中的矩阵．

如果$F:R^n\to C(R^n)$为通常的集值映象，则由算法3.1及3.2可得下述算法．

算法3.3　对于给定的$x_0\in R^n$，我们能得到两序列$\{x_n\}$及$\{y_n\}$如下：

$$\left.\begin{aligned}&y_n\in F((|x_n|+x_n)/2)\\&\|y_n-y_{n+1}\|\leqslant H\left(F\left(\frac{|x_n|+x_n}{2}\right),F\left(\frac{|x_{n+1}|+x_{n+1}}{2}\right)\right)\\&x_{n+1}=(1-\lambda)\frac{|x_n|+x_n}{2}+\lambda\left(\frac{|x_n|+x_n}{2}-\frac{\rho}{2}\left\{T\left(\frac{|x_n|+x_n}{2}\right)+Ay_n\right\}\right)\\&\qquad\qquad(n=0,1,2,\cdots)\end{aligned}\right\}\tag{3.3}$$

其中$0<\lambda<1,\rho>0$是松驰参数。

算法3.4 给定$x_0\in R^n$，我们能得两序列$\{x_n\}$及$\{y_n\}$如下：

$$\left.\begin{aligned}&y_n\in F((|x_n|+x_n)/2)\\&\|y_n-y_{n+1}\|\leqslant H\left(F\left(\frac{|x_n|+x_n}{2}\right),F\left(\frac{|x_{n+1}|+x_{n+1}}{2}\right)\right)\\&x_{n+1}=(1-\lambda)\frac{|x_n|+x_n}{2}+\frac{\lambda}{2}\left(|x_n|+x_n-\rho E\left\{M\left(\frac{|x_n|+x_n}{2}\right)\right.\right.\\&\qquad\left.\left.+q+L(x_{n+1}-x_n)+Ay_n\right\}\right)\qquad(n=0,1,2,\cdots)\end{aligned}\right\}\tag{3.4}$$

其中$0<\lambda<1$，$\rho>0$为松驰参数，E,L为$R^{n\times n}$中的矩阵。

如果$F:R^n\to R^n$是恒等映象，则由算法3.3和3.4可得下述算法.

算法3.5 对给定的$x_0\in R^n$，计算

$$\begin{aligned}x_{n+1}=&(1-\lambda)\frac{|x_n|+x_n}{2}+\lambda\left(\frac{|x_n|+x_n}{2}-\frac{\rho}{2}\left\{T\left(\frac{|x_n|+x_n}{2}\right)\right.\right.\\&\left.\left.+A\left(\frac{|x_n|+x_n}{2}\right)\right\}\right)\qquad(n=0,1,2,\cdots)\end{aligned}\tag{3.5}$$

其中$0<\lambda<1$，$\rho>0$是松驰参数。

算法3.6 对给定的$x_0\in R^n$，计算

$$\begin{aligned}x_{n+1}=&(1-\lambda)\frac{|x_n|+x_n}{2}+\frac{\lambda}{2}\left(|x_n|+x_n-\rho E\left\{M\left(\frac{|x_n|+x_n}{2}\right)\right.\right.\\&\left.\left.+q+L(x_{n+1}-x_n)+A\left(\frac{|x_n|+x_n}{2}\right)\right\}\right)\qquad(n=0,1,2,\cdots)\end{aligned}\tag{3.6}$$

其中$0<\lambda<1$，$\rho>0$为松驰参数，E,L为$R^{n\times n}$中的矩阵。

四、存在性与收敛性

本节我们讨论关于Fuzzy映象的广义补问题解的存在性以及由算法所构造的迭代序列的收敛性。

首先，我们给出下述定义。

定义4.1 实矩阵$M\in R^{n\times n}$称为Z-矩阵（P-矩阵），如果M除对角线外的元素均非正（M具正主子式）。一方阵称为M-矩阵，如果它除对角线外的元素均非正且具有非负逆．可以证明，既是P-矩阵又是Z-矩阵的矩阵一定是一个M-矩阵（细节参见[9]）.

定义4.2 映象$T:R^n\to R^n$称为

(i)强单调的，如果存在常数$\alpha>0$，使

$$(Tu-Tv,u-v)\geqslant\alpha\|u-v\|^2,\qquad \forall u,v\in R^n$$

(ii)Lipschitz连续的，如果存在常数$\beta>0$，使

$$\|Tu-Tv\|\leqslant\beta\|u-v\|,\qquad \forall u,v\in R^n$$

特别地，可得知$\alpha\leqslant\beta$。

定义4.3　集值映象$V:R^n\to C(R^n)$称为H-Lipschitz连续的，如果存在常数$\eta>0$，使

$$H(V(u),V(v))\leqslant\eta\|u-v\|,\qquad \forall u,v\in R^n$$

定理4.1　设$T:R^n\to R^n$是强单调Lipschitz连续的，相应的强单调系数和Lipschitz常数分别为$\alpha>0$和$\beta>0$。设$A:R^n\to R^n$是Lipschitz连续的，其Lipschitz常数为ξ，$F:R^n\to\mathscr{F}(R^n)$满足条件(I)，且$\tilde{F}$是H-Lipschitz连续的，其H-Lipschitz常数为η。如果

$$0<\rho<\frac{4(\alpha-\xi\eta)}{\beta^2-\xi^2\beta^2},\quad \rho\xi\eta<2,\quad \xi\eta<\alpha \tag{4.1}$$

则存在$u=(|x|+x)/2\in R^n$，$y\in R^n$，$F_u(y)\geqslant p(u)$，它们是问题(2.1)的解，且

$$(|x_n|+x_n)/2\to u,\quad y_n\to y\qquad (n\to\infty)$$

其中$\{x_n\}$及$\{y_n\}$为算法3.1所构造的序列。

证　由算法3.1知

$$\begin{aligned}\|x_{n+1}-x_n\|\leqslant&(1-\lambda)\|x_n-x_{n-1}\|+0.5\lambda\Big\||x_n|+x_n-|x_{n-1}|-x_{n-1}\\&-\rho\left\{T\left(\frac{|x_n|+x_n}{2}\right)-T\left(\frac{|x_{n-1}|+x_{n-1}}{2}\right)+Ay_n-Ay_{n-1}\right\}\Big\|\\\leqslant&(1-\lambda)\|x_n-x_{n-1}\|+0.5\lambda\rho\|Ay_n-Ay_{n-1}\|\\&+\lambda\left\|\frac{|x_n|+x_n-|x_{n-1}|-x_{n-1}}{2}-\frac{\rho}{2}\left\{T\left(\frac{|x_n|+x_n}{2}\right)-T\left(\frac{|x_{n-1}|+x_{n-1}}{2}\right)\right\}\right\|\end{aligned} \tag{4.2}$$

根据T的强单调性及Lipschitz连续性，有

$$\begin{aligned}&\left\|\frac{|x_n|+x_n-|x_{n-1}|-x_{n-1}}{2}-\frac{\rho}{2}\left\{T\left(\frac{|x_n|+x_n}{2}\right)-T\left(\frac{|x_{n-1}|+x_{n-1}}{2}\right)\right\}\right\|^2\\&\leqslant\left(1-\alpha\rho+\frac{\rho^2\beta^2}{4}\right)\|x_n-x_{n-1}\|^2\end{aligned} \tag{4.3}$$

由A的Lipschitz连续性及$\tilde{F}$的H-Lipschitz连续性，结合(3.1)、(4.2)和(4.3)易得

$$\begin{aligned}\|x_{n+1}-x_n\|&\leqslant(1-\lambda+0.5\lambda\rho\xi\eta+\sqrt{1-\alpha\rho+\beta^2\rho^2/4})\|x_n-x_{n-1}\|\\&=\theta\|x_n-x_{n-1}\|\end{aligned} \tag{4.4}$$

其中

$$\theta=1-\lambda+0.5\lambda\rho\xi\eta+\lambda\sqrt{1-\alpha\rho+\beta^2\rho^2/4}$$

由(4.1)易知$0<\theta<1$，因此，从(4.4)易得$\{x_n\}$是R^n中的Cauchy列。设$x_n\to x(n\to\infty)$，由$\tilde{F}$的H-Lipschitz连续性及(3.1)可得知

$$\begin{aligned}\|y_n-y_{n+1}\|&\leqslant H\left(\tilde{F}\left(\frac{|x_n|+x_n}{2}\right),\ \tilde{F}\left(\frac{|x_{n+1}|+x_{n+1}}{2}\right)\right)\\&\leqslant\eta\|x_n-x_{n+1}\|\end{aligned}$$

这表明$\{y_n\}$也为R^n中的Cauchy列，设$y_n\to y(n\to\infty)$。令$u=(|x|+x)/2$。

现在我们证明$y\in\tilde{F}(u)$。事实上，我们有

$$d(y,\tilde{F}(u))\leqslant\|y-y_n\|+d(y_n,\tilde{F}(u))$$
$$\leqslant\|y-y_n\|+H\left(\tilde{F}\left(\frac{|x_n|+x_n}{2}\right),\ \tilde{F}\left(\frac{|x|+x}{2}\right)\right)$$
$$\leqslant\|y-y_n\|+\eta\|x_n-x\|$$

其中 $d(y,\ \tilde{F}(u))=\inf\{\|y-z\|:z\in\tilde{F}(u)\}$。由上述不等式易知 $d(y,\ \tilde{F}(u))=0$。因为$\tilde{F}(u)\in C(R^n)$，故$y\in\tilde{F}(u)$，从而$F_u(y)\geqslant p(u)$。由T和A的连续性及(3.1)可得

$$x=\frac{|x|+x}{2}-\frac{\lambda\rho}{2}\left\{T\left(\frac{|x|+x}{2}\right)+Ay\right\}$$

因此，$u=(|x|+x)/2\in R^n$，$y\in R^n$，$F_u(y)\geqslant p(u)$是问题(2.1)的解，且

$$(|x_n|+x_n)/2\to u,\ y_n\to y\qquad(n\to\infty)$$

其中$\{x_n\}$和$\{y_n\}$为算法3.1所构造的序列。

定理证毕。

由定理4.1易得下述结果。

定理4.2 设T,A与定理4.1相同，集值映象$F:R^n\to C(R^n)$ 是 H-Lipschitz 连续的，其H-Lipschitz常数为η。如果

$$0<\rho<\frac{4(\alpha-\xi\eta)}{\beta^2-\xi^2\eta^2},\ \rho\xi\eta<2,\ \xi\eta<\alpha$$

则存在$u=(|x|+x)/2\ \in R^n$，$y\in F(u)$是问题(2.3)，且

$$(|x_n|+x_n)/2\to u,\ y_n\to y\qquad(n\to\infty)$$

其中$\{x_n\}$和$\{y_n\}$是由算法3.3所构造的序列。

推论4.1 设T,A与定理4.1相同，$F:R^n\to R^n$是恒等映象。如果

$$0<\rho<\frac{4(\alpha-\xi)}{\beta^2-\xi^2},\ \rho\xi<2,\ \xi<\alpha$$

则存在$u=(|x|+x)/2\ \in R^n$是问题(2.5)的解，且

$$(|x_n|+x_n)/2\to u\qquad(n\to\infty)$$

其中$\{x_n\}$是由算法3.5所构造的序列。

现在我们引入如下记号。

设 $x\in R^n$，$x=(x^1,x^2,\cdots,x^n)$。我们说，$|x|\leqslant a(|x|\geqslant a)$，如果$|x^i|\leqslant a(|x^i|\geqslant a)$，$i=1,2,\cdots,n$，这里$a\geqslant0$是常数。

定理4.3 设Fuzzy映象$F:R^n\to\mathscr{F}(R^n)$满足条件(I)，存在非负矩阵$N\in R^{n\times n}$及常数$\beta>0$，使得

$$|Ax-Ay|\leqslant N|x-y|,\qquad\forall x,y\in R^n\tag{4.5}$$
$$H(\tilde{F}(x),\tilde{F}(y))\leqslant\beta|x-y|,\qquad\forall x,y\in R^n\tag{4.6}$$

如果$\{x_n\}$是由算法3.2所构造的序列，则对任意n，有

$$|x_{n+1}-x_n|\leqslant(2I-\lambda\rho E|L|)^{-1}[|2I-\lambda\rho E(M-L)|+\lambda\beta\rho EN]|x_n-x_{n-1}|\tag{4.7}$$

其中E是正对角阵，L是严格上或下三角阵。

证 由算法3.2知

$$x_{n+1}-x_n=(1-\lambda)(|x_n|-|x_{n-1}|+x_n-x_{n-1})/2+0.5\lambda((|x_n|-|x_{n-1}|+x_n-x_{n-1})$$

$$-\rho E\{M\left(\frac{|x_n|-|x_{n-1}|+x_n-x_{n-1}}{2}\right)+L(x_{n+1}-x_n)-L(x_n-x_{n-1})$$

$$+Ay_n-Ay_{n-1}\})$$

在上式两端取绝对值并由(4.5)易得

$$|x_{n+1}-x_n|\leqslant(1-\lambda)|x_n-x_{n-1}|+\lambda\left|I-\frac{\lambda\rho E}{2}(M-L)\right||x_n-x_{n-1}|$$

$$+\frac{\lambda\rho E}{2}|L||x_{n+1}-x_n|+\frac{\lambda\rho E}{2}N|y_n-y_{n-1}|$$

又由(3.2)及(4.6)有

$$|y_n-y_{n-1}|\leqslant\|y_n-y_{n-1}\|\leqslant H\left(\tilde{F}\left(\frac{|x_n|+x_n}{2}\right),\ \tilde{F}\left(\frac{|x_{n-1}|+x_{n-1}}{2}\right)\right)$$

$$\leqslant\beta|x_n-x_{n-1}| \tag{4.8}$$

综合上述不等式可得

$$|x_{n+1}-x_n|\leqslant(1-\lambda)|x_n-x_{n-1}|+\left|\lambda I-\frac{\lambda\rho E}{2}(M-L)\right||x_n-x_{n-1}|$$

$$+\frac{\lambda\rho E}{2}|L||x_{n+1}-x_n|+\frac{\lambda\rho\beta}{2}EN|x_n-x_{n-1}|$$

上式可写成

$$(2I-\lambda\rho E|L|)|x_{n+1}-x_n|\leqslant[|2I-\lambda\rho E(M-L)|+\lambda\beta\rho EN]|x_n-x_{n-1}|$$

因为L是严格上或下三角阵，E是正对角阵，故$(2I-\lambda\rho E|L|)$是M-矩阵，从而$(2I-\lambda\rho E\cdot|L|)^{-1}$存在且非负。因此，我们有

$$|x_{n+1}-x_n|\leqslant(2I-\lambda\rho E|L|)^{-1}[|2I-\lambda\rho E(M-L)|+\lambda\beta\rho EN]|x_n-x_{n-1}|$$

定理证毕。

定理4.4 设E,N,A,F及$\tilde{F}$与定理4.3相同，如果$\sigma(G)<1$，这里

$$G=(2I-\lambda\rho E|L|)^{-1}[|2I-\lambda\rho E(M-L)|+\lambda\beta\rho EN] \tag{4.9}$$

且σ表示谱半径。则存在$u=(|x|+x)/2\in R^n$，$y\in R^n$，$F_u(y)\geqslant p(u)$，它们是问题（2.2）的解，且

$$(|x_n|+x_n)/2\to u,\ y_n\to y\qquad(n\to\infty)$$

其中$\{x_n\}$及$\{y_n\}$是由算法3.2所构造的序列。

证 首先，我们注意到由(4.9)所表示的矩阵G是非负的。由(4.7)易知

$$|x_{n+1}-x_n|\leqslant G|x_n-x_{n-1}|\leqslant\cdots\leqslant G^n|x_1-x_0| \tag{4.10}$$

因为$\sigma(G)<1$，由(4.10)我们可得知$\{x_n\}$是R^n中的Cauchy列。设$x_n\to x(n\to\infty)$，从(4.8)易知$\{y_n\}$也为R^n中的Cauchy列，设$y_n\to y(n\to\infty)$。利用(3.2)和(4.5)可得

$$x=\frac{|x|+x}{2}-\frac{\lambda\rho E}{2}\left\{M\left(\frac{|x|+x}{2}\right)+q+Ay\right\}$$

设$u=(|x|+x)/2$，仿定理4.1可证$y\in\tilde{F}(u)$。因此，$u=(|x|+x)/2\in R^n$，$y\in R^n$，$F_u(y)\geqslant p(u)$是问题(2.2)的解，且

$$(|x_n|+x_n)/2\to u,\ y_n\to y\qquad(n\to\infty)$$

其中$\{x_n\}$及$\{y_n\}$为算法3.2所构造的序列。

定理证毕。

从定理4.4易得下述结果。

定理4.5 设$F:R^n\to C(R^n)$是集值映象，A满足定理4.3中的条件(4.5)，存在常数$\beta>0$，使

$$H(F(x),\ F(y))\leqslant\beta|x-y|,\qquad\forall x,y\in R^n$$

设$\sigma(G)<1$，其中G由定理4.4中的(4.9)式所定义。则存在$u=(|x|+x)/2\in R^n$，$y\in F(u)$是问题(2.4)的解，且

$$(|x_n|+x_n)/2\to u,\ y_n\to y\qquad(n\to\infty)$$

其中$\{x_n\}$及$\{y_n\}$是由算法3.4所构造的序列。

推论4.2 设A与定理4.3相同，$\sigma(G)<1$，其中

$$G=(2I-\lambda\rho E|L|)^{-1}[|2I-\lambda\rho E(M-L)|+\lambda\rho EN]$$

这里$0<\lambda<1$，$\rho>0$是松弛参数，E是正对角阵，L是严格上或下三角阵。则存在$u=(|x|+x)/2\in R^n$是问题(2.6)的解，且

$$(|x_n|+x_n)/2\to u\qquad(n\to\infty)$$

其中$\{x_n\}$是由算法3.6所构造的序列。

参考文献

[1] Lemke, C. E., Bimatrix equilibrium points and mathematical programming, *Management Sci.*, **11** (1965), 681—689.

[2] Cottle, R. W. and G. B. Dantzig, Complementarity pivot theory of mathematical programming, *Linear Algebra Appl.*, **1** (1968), 103—125.

[3] Lin, Y. and C. W. Cryer, An alternating direction implicit algorithm for the solution of linear complementarity problems arising from free boundary problems, *Appl. Math. Optim.*, **13** (1985), 1—17.

[4] Cottle, R. W., Complementarity and variational problems, *Sympos. Math.*, **19** (1976), 177—208.

[5] Crank, J., *Free and Moving Boundary Problems*, Oxford Univ. Press, London (1984).

[6] Noor, M. A., Iterative methods for a class of complementarity problems, *J. Math. Anal. Appl.*, **133** (1988), 366—382.

[7] Noor, M. A., Fixed point approach for complementarity problems, *J. Math. Anal. Appl.*, **133** (1988), 437—448.

[8] Nadler, S. B., Jr., Multi-valued contraction mappings, *Pacific J. Math.*, **30** (1969), 475—488.

[9] Varga, R. S., *Matrix Iterative Analysis*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ (1962).

[10] Chang Shih-sen, Fixed degree for fuzzy mappings and a generalization of Ky Fan's theorem, *Fuzzy and Systems*, **24** (1987), 103—112.

[11] Chang Shih-sen and Zhu Yuan-guo, On variational inequalities for fuzzy mappings, *Fuzzy Sets and Systems*, **30** (1989).

Generalized Complementarity Problems for Fuzzy Mappings

Zhang Shi-sheng Huang Nan-jing

(Department of Mathematics, Sichuan University, Chengdu)

Abstract

In this paper we introduce a new class of generalized complementarity problems for the fuzzy mappings and construct a new iterative algorithm. We also discuss the existence of solutions for the generalized complementarity problems and the convergence of iterative sequence.

Key words fuzzy mapping, generalized complementarity problem, algorithm