应用数学和力学，第13卷第8期（1992年8月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

开孔薄板屈曲状态的存在性*

程昌钧　　杨　骁

（兰州大学力学系，1991年4月22日收到）

摘　要

基于[1，2]中对于开孔薄板建立的广义von Kármán 理论，本文系统地研究了沿开孔薄板的每一条边界受自身平衡的面内外力作用时开孔薄板屈曲状态的存在性，这一工作全面地推广了[3，4]中的结果。

关键词　开孔薄板　多连通域　修正von Kármán理论　屈曲状态　分支理论

一、引　　言

基于通常的von Kármán方程，Berger[3,4]一般地分析了无孔薄板的屈曲和过屈曲，并证明了在任何特征值处，分支解（物理上称为屈曲状态）的存在性．众所周知，由于开孔薄板所占区域是多连通的，通常的von Kármán方程是失效的.因此，一般地说，对于开孔薄板不存在单值的应力函数，而且还必须对控制方程追加某些条件以确保中面位移的单值性．根据这种观点，[1]和[2]中的作者系统地阐述了开孔薄板大挠度问题的数学理论，并证明了当作用于板的每一条边界上的面内边界上是自身平衡时，存在单值的应力函数．在相反的情形下，应力函数可以分解为一个单值函数和一些已知多值函数之和．因此，上述作者推广和修正了通常的von Kármán理论[1,2]．根据这一理论，本文讨论了在开孔薄板每条边界上受自身平衡的中面力作用时薄板屈曲状态的存在性．首先，在引入适当的Sobolev空间后，把控制方程化成一个等价的算子方程，并讨论了有关算子的性质，得到了相应的变分公式．其次，讨论了线性化问题和相应的特征值．最后，研究了分支解的存在性，证明了不管特征值的重数如何，在特征值处总发生分叉.对于单特征值λ^*，利用Liapunov-Schmidt过程，证明了分支解能够唯一地表成(4.13)和(4.14)，并且当$\lambda^*>0(<0)$时，分支解是稳定的右（左）分支，而且它们是成对的．对于重特征值，问题则化为寻求使泛函$h(LW,W)_X/2$在曲面∂A_R上取极大值和极小值的点．类似地，不难把本文的结论推广到沿每条边受自身不衡的中面边界力作用但整体平衡时的开孔薄板的更一般情形．

* 郭仲衡推荐．

国家教委博士点基金资助项目．

二、算子方程及其性质

不失一般性，我们只讨论具有一个孔的均匀、各向同性弹性板，并假设沿板的每条边界上作用的面内边界力是自身平衡的．令h，E和ν分别是板的厚度和弹性常数，根据[1][2]，在这种情况下存在单值的应力函数．因此，控制方程可以写成为

$$\left.\begin{aligned}&D\Delta^2W=h[W,\ F]+\lambda h[W,\ F^0],\\&\Delta^2F=-\frac{E}{2}[W,W];\end{aligned}\right\}\quad 在\Omega中 \tag{2.1}$$

$$L_i(F)-N_i(W)=0;\ i=1,2,3\quad 在\Gamma_1上 \tag{2.2}$$

$$\left.\begin{aligned}&W=\partial W/\partial n=0\quad 在\Gamma_{i,1}上\\&M_n=0,\ Q_n=0,\quad 在\Gamma_{i,2}上\end{aligned}\right\}(i=0,1) \tag{2.3}$$

$$\left.\begin{aligned}&F=\partial F/\partial n=0\quad 在\Gamma_0上\\&F=A_1+A_2x+A_3y,\ \partial F/\partial n=A_2\cos(n,x)+A_3\cos(n,y),\quad 在\Gamma_1上\end{aligned}\right\} \tag{2.4}$$

$$M_{ns}=0\quad 在角点P_r\in\Gamma_{i,2}处，(r=1,2,\cdots,m) \tag{2.5}$$

在(2.1)～(2.5)中，Ω是变形前中面所占的区域，$\Gamma=\Gamma_0+\Gamma_1$是Ω的边界，$\Gamma_i=\Gamma_{i,1}$（指定位移的边界）$+\Gamma_{i,2}$（指定力的边界）$i=0,1$，n是边界外法线的单位向量（如图1所示）．F^0是薄板未屈曲状态的应力函数，$D=Eh^3/12(1-\nu^2)$．在边值问题(2.1)～(2.5)中，未知量是挠度W、应力函数F和三个待定常数(A_1,A_2,A_3)．M_n，M_{ns}和Q_n是弯矩、扭矩和剪力．条件(2.2)表示位移单值性条件，它确保薄板中面位移的单值性，其中$L_i(F)$和$N_i(W)$分别是关于F和W的线性和非线性泛函，为

$$L_1(F)=\frac{2}{E}\oint_{\Gamma_1}\left(-\frac{\partial}{\partial y}\Delta F dx+\frac{\partial}{\partial x}\Delta F dy\right)$$

$$L_2(F)=\frac{2}{E}\oint_{\Gamma_1}\left(\frac{\partial^2F}{\partial y^2}dx-\frac{\partial^2F}{\partial x\partial y}dy\right)+\frac{2}{E}\oint_{\Gamma_1}\left(-y\frac{\partial}{\partial y}\Delta F dx+y\frac{\partial}{\partial x}\Delta F dy\right)$$

$$L_3(F)=\frac{2}{E}\oint_{\Gamma_1}\left(-\frac{\partial^2F}{\partial x\partial y}dx+\frac{\partial^2F}{\partial x^2}dy\right)+\frac{2}{E}\oint_{\Gamma_1}\left(x\frac{\partial}{\partial y}\Delta F dx\right.$$

$$\left.-x\frac{\partial}{\partial x}\Delta F dy\right)$$

$$N_1(W)\oint_{\Gamma_1}=\left(\frac{\partial^2W}{\partial x^2}\frac{\partial W}{\partial y}-\frac{\partial W}{\partial x}\frac{\partial^2W}{\partial x\partial y}\right)dx-\left(\frac{\partial W}{\partial x}\frac{\partial^2W}{\partial y^2}-\frac{\partial W}{\partial y}\frac{\partial^2W}{\partial x\partial y}\right)dy$$

$$N_2(W)=\oint_{\Gamma_1}\left[y\left(\frac{\partial^2W}{\partial x^2}\frac{\partial W}{\partial y}-\frac{\partial W}{\partial x}\frac{\partial^2W}{\partial x\partial y}\right)dx-y\left(\frac{\partial W}{\partial x}\frac{\partial^2W}{\partial y^2}-\frac{\partial W}{\partial y}\frac{\partial^2W}{\partial x\partial y}\right)dy\right]$$

$$+\oint_{\Gamma_1}\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2dx+\frac{\partial W}{\partial x}\frac{\partial W}{\partial y}dy$$

$$N_3(W)=-\oint_{\Gamma_1}\left[x\left(\frac{\partial^2W}{\partial x^2}\frac{\partial W}{\partial y}-\frac{\partial W}{\partial x}\frac{\partial^2W}{\partial x\partial y}\right)dx-x\left(\frac{\partial W}{\partial x}\frac{\partial^2W}{\partial y^2}\right.\right.$$

$$-\frac{\partial W}{\partial y}\frac{\partial^2 W}{\partial x\partial y}\Big)dy\Big]$$

$$+\oint_{\Gamma_1}\frac{\partial W}{\partial x}\frac{\partial W}{\partial y}dx+\left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)^2 dy$$

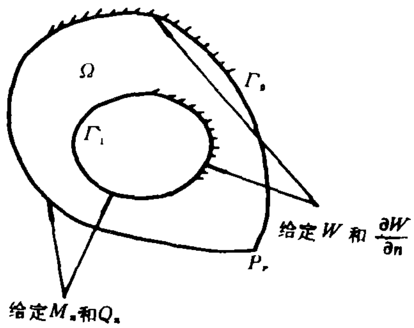

图 1

$[\varphi,\ \psi]$是非线性算子，定义为

$$[\varphi,\ \psi]=\varphi_{xx}\psi_{yy}-2\varphi_{xy}\psi_{xy}+\varphi_{yy}\psi_{xx}$$
$$=(\varphi_{yy}\psi_x-\varphi_{xy}\psi_y)_x+(\varphi_{xx}\psi_y-\varphi_{xy}\psi_x)_y$$

并且 $\quad \Delta^2=\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)^2$

我们看到由于条件(2.2)和(2.4)，边值问题(2.1) ～ (2.5)是与通常的von Kármán方程不同的．

现在，我们在Sobolev空间$H_2(\Omega)$中引入两个内积空间

$X=\{u\in H_2(\Omega)\,|\,u|_{\Gamma_{i,1}}=\partial u/\partial n|_{\Gamma_{i,1}}=0 \quad (i=0,1)$，（在跡的意义下）$\}$

$$Y=\left\{ v\in H_2(\Omega)\ \left|\begin{array}{l} v_{\Gamma_0}=\partial v/\partial n|_{\Gamma_0},\ v|_{\Gamma_1}=\gamma_1+\gamma_2 x+\gamma_3 y, \\ \partial v/\partial n|_{\Gamma_1}=\gamma_2\cos(n,x)+\gamma_3\cos(n,y), \end{array}\right. \text{（在跡的意义下）}\right\}$$

其中，$\gamma_i(i=1,2,3)$是三个任意实数．在空间X和Y中，定义两个内积

$$(u,v)_X=\iint_\Omega\Big[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)+2(1-\nu)\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$$
$$+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\nu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)\Big]d\Omega$$

$$(u,v)_Y=\iint_\Omega\Big[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)+2(1+\nu)\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$$
$$+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\nu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)\Big]d\Omega$$

显然，X和Y在范数$\|\cdot\|_{H_2(\Omega)}$下都是完备的．

引理2.1 对于任何的$\nu\in[0,\ 1/2)$，在空间X中由内积$(\cdot,\cdot)_X$导出的范数等价于$H_2(\Omega)$中的范数$\|\cdot\|_{H_2(\Omega)}$．

证明 由$(u,v)_X$的定义，对任何的$u\in X$，有

$$(u,u)_X=\iint_\Omega\Big[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)^2+2\nu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+2(1-\nu)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right)^2\Big]d\Omega$$
$$\leqslant(1+2(1-\nu)+\nu)\|u\|_{H_2(\Omega)}$$

并且

$$(u,\ u)_X=\nu\iint_\Omega\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)^2 d\Omega+(1-\nu)\iint_\Omega\Big[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^2$$
$$+\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)^2+2\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}\right)^2\Big]d\Omega$$

因此，利用Friedrich不等式[6]，存在与u无关的常数$K_1>0$，使得

$$(u,u)_X\geqslant K_1\|u\|^2_{H_2(\Omega)}$$

这样，引理得证．

类似地，我们有

引理2.2 对任何的$\nu\in[0,1/2)$，在空间Y中由内积$(\cdot,\cdot)_Y$导出的范数等价于$H_2(\Omega)$中的范数$\|\cdot\|_{H_2(\Omega)}$。

定理2.1 X和Y都是完备的Hilbert空间。

证明是显然的，并用$\|\cdot\|_X$和$\|\cdot\|_Y$表示X和Y中的范数。

定义2.1 一对元素$(W,F)\in X\times Y$被说成是问题(2.1)～(2.5)的弱解，如果(W,F)满足

$$(W,u)_X=h\lambda D^{-1}b(F^0,W,u)+hD^{-1}b(F,W,u),\qquad\forall u\in X\tag{2.6}$$
$$(F,v)_Y=-Eb(W,W,v)/2,\qquad\forall v\in Y$$

其中

$$b(\varphi,\psi,\sigma)=\iint_\Omega\left[\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial y}-\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)\frac{\partial\sigma}{\partial x}+\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial x}-\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)\frac{\partial\sigma}{\partial y}\right]d\Omega$$

容易看到，$b(\varphi,\psi,\sigma)$关于ψ和σ是对称的。

引理2.3 设$F^0\in H_2(\Omega)$，则对于任何固定的$W\in X$，$b(F^0,W,u)$是关于$u\in X$的有界线性泛函。

证明 显然，$b(F^0,W,u)$关于u是线性的。由Sobolev嵌入定理，$H_2(\Omega)\to W^{1,4}(\Omega)$，因此，

$$\left|\iint_\Omega\frac{\partial^2F^0}{\partial x\partial y}\frac{\partial W}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x}d\Omega\right|\leqslant\left(\iint_\Omega\left(\frac{\partial^2F^0}{\partial x\partial y}\right)^2d\Omega\right)^{1/2}\left(\iint_\Omega\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^4d\Omega\right)^{1/4}$$
$$\cdot\left(\iint_\Omega\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^4d\Omega\right)^{1/2}$$
$$\leqslant K_2(F^0)\|W\|_X\|u\|_X,\qquad K_2(F^0)>0$$

这样存在常数$K_3(F^0)>0$，使得

$$|b(F^0,W,u)|\leqslant K_3(F^0)\|W\|_X\cdot\|u\|_X,\qquad\forall u\in X$$

这表示$b(F^0,W,u)$是有界的。

由Reisz表现定理，存在$LW\in X$，使得

$$b(F^0,W,u)=(LW,u)_X$$

定理2.2 对于任意固定的$F^0\in H_2(\Omega)$，$L:X\to X$是全连续对称算子。

证明 显然，L是对称的。对于任意固定的$\varphi\in W^{1,4}(\Omega)$及任意的$\psi\in X$，有

$$|b(F^0,\varphi,\psi)|\leqslant K_4(F^0)\|\varphi\|_{W^{1,4}(\Omega)}\cdot\|\psi\|_X$$

于是，$b(F^0,\varphi,\psi)$是有界线性泛函，因此，存在唯一的线性算子$\tilde{L}:W^{1,4}(\Omega)\to X$，使得

$$b(F^0,\varphi,\psi)=(\tilde{L}\varphi,\psi)_X$$

不难证明$\tilde{L}:W^{1,4}(\Omega)\to X$是有界线性算子。由$\tilde{L}$的唯一性知，存在紧算子$I:X\to W^{1,4}(\Omega)$使得$L=\tilde{L}I$。因此，$L:X\to X$是紧的，证毕。

引理2.4 对于给定的$(W,F)\in X\times Y$，$b(F,W,\varphi)$是关于$\varphi\in X$的有界线性泛函。因此，存在$B_1(F,W)\in X$，使得对任意的$\varphi\in X$有

$$b(F,W,\varphi)=(B_1(F,W),\varphi)_X$$

引理2.5 对于任何固定的u，$v\in X$，$b(\varphi,u,v)$是关于$\varphi\in Y$的有界线性泛函。

因此，存在$B_2(u,\ v)\in Y$，使得对任意的$\varphi\in Y$，有

$$b(\varphi,\ u,\ v)=(\varphi,\ B_2(u,\ v))_Y$$

定理2.3 $B_1(\cdot,\ \cdot):Y\times X\to X$和$B_2(\cdot,\ \cdot):X\times X\to Y$是有界的双线性算子。

定理2.4 $B_2(\varphi,\ \psi):X\times X\to Y$是紧算子，且对于固定的$\varphi\in Y$，$\tilde{B}_1(\psi)=B_1(\varphi,\ \psi):X\to X$也是紧算子。

证明 对于固定的$\varphi\in X$，设序列$\psi_n\in X$弱收敛于$\psi\in X$，即在X中，$\psi_n\xrightarrow{W}\psi$（当$n\to\infty$时），则$\psi_n$在$W^{1,4}(\Omega)$中强收敛于$\psi\in W^{1,4}(\Omega)$，即$\psi_n\xrightarrow{S}\psi\in W^{1,4}(\Omega)$（当$n\to\infty$时），故

$$\|B_2(\varphi,\psi)-B_2(\varphi,\psi_n)\|_Y=\sup_{\sigma\in Y,\ \|\sigma\|\ =1}|b(\sigma,\varphi,\psi_n-\psi)|$$

$$=\sup_{\sigma\in Y,\|\sigma\|_1=1}\left|\iint_\Omega\left[\left(\frac{\partial^2\sigma}{\partial x\partial y}\ \frac{\partial}{\partial y}(\psi_n-\psi)-\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\ \frac{\partial}{\partial x}(\psi_n-\psi)\right)\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right.\right.$$

$$\left.\left.+\left(\frac{\partial^2\sigma}{\partial x\partial y}\ \frac{\partial}{\partial x}(\psi_n-\psi)-\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\ \frac{\partial}{\partial y}(\psi_n-\psi)\right)\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right]d\Omega\right|$$

$$\leqslant K_5\sup_{\sigma\in Y,\|\sigma\|_Y=1}\|\sigma\|_Y\cdot\|\varphi\|_{W^{1,4}(\Omega)}\|\psi-\psi_n\|_{W^{1,4}(\Omega)}$$

因此，在Y中，$B_2(\varphi,\ \psi_n)\xrightarrow{S}B_2(\varphi,\ \psi)$（当$n\to\infty$时）。类似地，有：在$Y$中，$B_2(\psi_n,\ \varphi)\xrightarrow{S}B_2(\psi,\ \varphi)$(当$n\to\infty$时)，$B_2(\psi_n,\ \psi_n)\xrightarrow{S}B_2(\psi,\ \psi)$，同时，在$X$中有$B_1(\sigma,\ \psi_n)\xrightarrow{S}B_1(\sigma,\ \psi)$（当$n\to\infty$时），证毕。

由上述结论，(2.6)等价于

$$W-hD^{-1}\lambda LW=hD^{-1}B_1(F,\ W),\quad F=-EB_2(W,\ W)/2\tag{2.7a, b}$$

将F代入(2.7a)，得

$$W-hD^{-1}\lambda LW+0.5EhD^{-1}B_1(B_2(W,W),W)=0\tag{2.8}$$

或者更方便地写成

$$W-\frac{h}{D}\lambda LW+\frac{Eh}{D}C(W)=0\tag{2.9}$$

式中，$C(W)=B_1(B_2(W,\ W),\ W)/2$。如果令$\tau(W)=(C(W),\ W)_X/4$，则不难证明下面的结论。

定理2.5 对于任意的$W,\ u,\ u_1,\ u_2\in X$，$C(W)$和$\tau(W)$具有性质：

$$\left.\begin{array}{ll}\text{(i)} & (C(W),W)_X=\|B_2(W,W)\|_Y^2/2\\ \text{(ii)} & C'(W)u=B_1(B_2(W,W),u)/2+B_1(B_2(W,u),W)\\ \text{(iii)} & C(\alpha W)=\alpha^3C(W),\quad \text{对任何的常数}\alpha\\ \text{(iv)} & \tau'(W)u=(C(W),u)_X\\ \text{(v)} & (C'(W)u_1,u_2)_X=(C'(W)u_2,u_1)_X\end{array}\right\}\tag{2.10}$$

由性质(iii)知，如果$(W,\ \lambda)$是(2.9)的解，则$(-W,\ \lambda)$也是解，于是有下面的推论。

推论 如果$(W,\ F,\ \lambda)$是(2.7)的解，则$(-W,\ F,\ \lambda)$也是(2.7)的解。

这表示分叉是成对发生的。

定理 2.6 设$W_1,\ W_2\in X$，并且$\|W_1\|_X$和$\|W_2\|_X$都不大于某个正数r，则$\|C(W_1)-$

$C(W_2)\|_X \leqslant Kr^2\|W_1-W_2\|_X$，其中$K>0$是与$W_i(i=1,\ 2)$无关的常数．

证明 $\|C(W_1)-C(W_2)\|_X = \sup\limits_{\varphi\in X,\ \|\varphi\|_X=1} |(C(W_1)-C(W_2),\varphi)_X|$

$$= \sup_{\varphi\in X,\ \|\varphi\|_X=1} |0.5(B_1(B_2(W_1,W_1),W_1)-B_1(B_2(W_2,W_2),W_2),\varphi)_X|$$

$$= \sup_{\varphi\in X,\ \|\varphi\|_X=1} |0.5(B_2(W_1,W_1),B_2(W_1,\varphi))_Y-(B_2(W_2,W_2),B_2(W_2,\varphi))_Y|$$

$$=0.5 \sup_{\varphi\in X,\ \|\varphi\|_X=1} |(B_2(W_1,W_1)-B_2(W_2,W_2),B_2(W_1,\varphi))_Y$$

$$+(B_2(W_2,W_2),B_2(W_1,\varphi)-B_2(W_2,\varphi))_Y|$$

$$\leqslant 0.5 \sup_{\varphi\in X,\ \|\varphi\|_X=1} \{\|B_2(W_1,W_1)-B_2(W_2,W_2)\|_Y\cdot\|B_2(W_1,\varphi)\|_Y$$

$$+\|B_2(W_2,W_2)\|_Y\cdot\|B_2(W_1-W_2,\varphi)\|_Y\}$$

因为$B_2(W_2,\ W_2)-B_2(W_1,\ W_1)=B_2(W_1+W_2,\ W_1-W_2)$，且$B_2$是有界算子，故有

$$\|B_2(W_2,W_2)-B_2(W_1,\ W_1)\|_Y \leqslant K_7 r\|W_1-W_2\|_X$$

$$\|B_2(W_1,\ \varphi)-B_2(W_2,\ \varphi)\|_Y \leqslant K_8\|\varphi\|_X\cdot\|W_1-W_2\|_X$$

$$\|C(W_1)-C(W_2)\|_X \leqslant 0.5K_7 r\tilde{K}\|W_1\|_X\cdot\|W_1-W_2\|_X$$

$$+0.5K_8\tilde{K}\|W_2\|_X^2\cdot\|W_1-W_2\|_X \leqslant Kr^2\|W_1-W_2\|_X$$

引理2.6 令W是（2.9）的一个解并设（$(C(W),W)_X=0$，则$W=0$[4]．

定理2.7 设一对元素（W，F）$\in X\times Y$是（2.7）的解，则在Ω内以及在边界Γ的充分光滑部份上，它也是问题（2.1）～（2.5）的古典解[4]．

不难得到板的势能$\widetilde{P}(W)$为

$$\widetilde{P}(W)=\frac{D}{2}(W,\ W)_X+\frac{Eh}{4}(C(W),\ W)_X-\frac{h\lambda}{2}(LW,W)_X+\frac{\lambda^2 h}{2E}(F^0,F^0)_Y$$

为了方便，称

$$P(W)=\frac{D}{2}(W,\ W)_X+\frac{Eh}{4}(C(W),W)_X-\frac{h\lambda}{2}(LW,W)_X \tag{2.11}$$

为板的势能．

定理2.8 当板处于屈曲状态时，势能$P(W)<0$．

实际上，由于$W\neq 0$，由(2.8)有

$$D(W,\ W)_X-h\lambda(LW,\ W)_X+Eh(C(W),W)_X=0$$

注意到(2.9)，$P(W)=-Eh(C(W),\ W)_X/4\leqslant 0$，但由引理2.6，当$W\neq 0$时$P(W)<0$．因此，定理成立．

定理2.9 元素$W\in X$是（2.9）的一个解当且仅当W是势能$P(W)$的一个稳定点．

这几乎是显然的．这意味着（2.9）左端的算子是变分型的，这不同于流体力学中的分叉现象．物理上，这意味着板在屈曲过程中不发生能量耗散，因此系统总是保守的．

定理2.10 (2.9)的解$W\in X$等价于寻求泛函$h(LW,W)_X/2$在曲面

$$\partial A_R=\left\{W\in X \;\middle|\; \frac{1}{2}D(W,W)_X+\frac{Eh}{4}(C(W),W)_X=R,\ \text{对任意的实数}R>0\right\}$$

上的稳定点．

利用Lagrange乘子法容易证明此定理．∂A_R称为曲面板的能量等势面并具有与[3]中等

势面类似的性质.

三、线性化问题和特征值

显然，对任何的λ，方程（2.9）有平凡解$(W,\lambda)=(0,\lambda)$.根据分支理论[12]，使（2.9）发生分叉的λ必使（2.9）左端的Fréchet导算子无有界逆，即算子方程$(DI-\lambda hL)$无有界逆. 根据L的性质，这等价于求λ的值，使得

$$(I-(h/D)\lambda L)W=0 \tag{3.1}$$

有非零解. 相应的微分方程边值问题为

$$\left.\begin{array}{lll} \Delta^2 W-(h/D)\lambda[F^0,\ W]=0, & \text{在}\Omega\text{内} & \\ W=0,\ \partial W/\partial n=0, & \text{在}\Gamma_{i,1}\text{上} & (i=0,1) \\ M_n=0,\ Q_n=0, & \text{在}\Gamma_{i,2}\text{上} & \end{array}\right\} \tag{3.2}$$

这样的λ称为特征值或临界载荷. 由上述分析，有下面的结论：

(i) 存在一个特征值的离散序列$\{\lambda_n^{\pm}\}$，以$\pm\infty$为聚点；

(ii) 相应于每个特征值的特征向量空间是有限维的；

(iii) 如果W_1和W_2是相应于两个不同特征值的特征向量，则$(W_1,\ W_2)_X=0$；

(iv) 令λ^*是一个特征值，X_{λ^*}是相应的特征向量空间，则

$$\mathrm{Rang}(I-hD^{-1}\lambda^* L)=X_{\lambda^*}^{\perp} \tag{3.3}$$

(v) $\mathrm{Null}\{L\}=\{0\}$，因此，所有的正交化特征向量构成X中的一组正交基底；

(vi) $\lambda=0$不是（3.2）的特征值.

这样，可以把所有的特征值排列成序列

$$\cdots<\lambda_4^-<\lambda_3^-<\lambda_2^-<\lambda_1^-<0<\lambda_1^+<\lambda_2^+<\lambda_3^+\cdots \tag{3.4}$$

定理3.1 对于$\lambda\in[\lambda_1^-,\ \lambda_1^+]$，(2.9)只有零解.

证明 若(2.9)有一个非零解$W\neq 0$，则

$$(W,W)_X-h\lambda D^{-1}(LW,\ W)_X+Eh/D^{-1}(C(W),W)_X=0$$

即

$$((I-hD^{-1}\lambda L)W,W)_X+EhD^{-1}(C(W),W)_X=0$$

由Rayleigh商公理[6]，有

$$\frac{D}{h}\frac{1}{\lambda_1^+}=\max_{u\in X,u\neq 0}\frac{(Lu,u)_X}{\|u\|_X^2},\quad \frac{D}{h}\frac{1}{\lambda_1^-}=\min_{u\in X,u\neq 0}\frac{(Lu,u)_X}{\|u\|_X^2}$$

因此，

$$\frac{1}{\lambda_1^-}\leqslant\frac{h}{D}\frac{(LW,W)_X}{\|W\|_X^2}\leqslant\frac{1}{\lambda_1^+}$$

$$((I-hD^{-1}\lambda L)W,W)_X=(W,W)_X-h\lambda D^{-1}(LW,W)_X$$

$$\geqslant\begin{cases}(1-\lambda/\lambda_1^+)(W,W)_X\geqslant 0, & \text{当}\lambda\geqslant 0\text{时}\\ (1-\lambda/\lambda_1^-)(W,W)_X\geqslant 0, & \text{当}\lambda\leqslant 0\text{时}\end{cases}$$

因而，$(C(W),W)_X=\|B_2(W,W)\|_Y^2/2=0$.而由引理2.6，有$W=0$，但这与假设矛盾，证毕.

四、分支解的存在性

下面，我们将证明在$\lambda=\lambda_1^+$处，(2.9) 总存在分支解．为了方便，设λ^*为λ_1^+或λ_1^-，并且设

$$X_1=\mathrm{Null}(I-(h/D)\lambda^*L)=\mathrm{Span}\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$$

其中，$v_i(i=1,2,\cdots,n)$是相应于λ^*的特征向量，且$(v_i,v_j)=\delta_{ij}$，且有$X_2=\mathrm{Rang}(I-(h/D)\lambda^*L)=X_1^\perp$．容易证明，$(I-(h/D)\lambda^*L):X_2\to X_2$是线性同胚映射．

令$Q:X\to X_1$是投影算子，因此

$$QW=\sum_{i=1}^{n}(W,v_i)_X\cdot v_i,\qquad 对\forall W\in X \tag{4.1}$$

这样，Q是有界的正交投影算子．令$P=I-Q:X\to X_2$也是有界的正交投影算子．因此，对任何$W\in X$，有

$$W=V+\sum_{i=1}^{n}\xi_i v_i \tag{4.2}$$

式中，$\xi=(\xi_1,\ \xi_2,\ \cdots,\ \xi_n)\in R^n$，$V\in X_2$．分解式(4.2)是唯一的．令

$$\lambda=\lambda^*(1+\eta) \tag{4.3}$$

将 (4.2)、(4.3) 代入(2.9)，得到

$$\left(I-\frac{h}{D}\lambda^*L\right)V-\frac{h}{D}\lambda^*\eta LV-\eta\sum_{i=1}^{n}\xi_i v_i+\frac{Eh}{D}C\left(V+\sum_{j=1}^{n}\xi_j v_j\right)=0 \tag{4.4}$$

将P和Q作用于(4.4)，则得到等价的方程组：

$$\left.\begin{aligned}&F(V,\xi,\eta)\equiv\left(I-\frac{h}{D}\lambda^*L\right)V-\frac{h}{D}\lambda^*\eta LV+\frac{Eh}{D}PC\left(V+\sum_{j=1}^{n}\xi_j v_j\right)=0\\&f_i(V,\xi,\eta)\equiv-\eta\xi_i+\frac{Eh}{D}\left(C\left(V+\sum_{j=1}^{n}\xi_j v_j\right),v_i\right)_X=0\end{aligned}\right\} \tag{4.5a,b}$$

容易看到，$F:X_2\times R^n\times R\to X_2$，且满足(i)$F(0,0,0)=0$；(ii) $F'_V(0,0,0)=(I-(h/D)\lambda^*L):X_2\to X_2$是线性同胚映射．

于是由隐函数定理[10]，在$(V,\xi,\eta)=(0,0,0)$的领域，(4.5a)有唯一解

$$V=V(\xi,\eta),\ 对于|\xi_i|<\xi_i^0,\ |\eta|<\eta^0 \tag{4.6}$$

解 (4.6) 具有性质：

$$\left.\begin{aligned}&(\mathrm{i})\quad V(\xi,\eta)是解析的，且V(0,0)=0\\&(\mathrm{ii})\quad 当|\eta|<\eta^0时，V_{\xi_i}(0,0)=0,\ V(0,\eta)=0\\&(\mathrm{iii})\quad 当|\eta|<\eta^0,\ |\xi_i|<\xi^0,\ \|V(\xi,\eta)\|_X\leqslant K\|\xi\|^3\end{aligned}\right\} \tag{4.7}$$

将 (4.6) 代入(4.5b)，得到一个代数方程组

$$f_i(\xi,\eta)=-\eta\xi_i+\frac{E}{D}h\left(C\Big(\sum_{j=1}^{n}\xi_jv_j+V(\xi,\eta)\Big),v_i\right)_X=0 \qquad (i=1,\ 2,\ \cdots,n) \tag{4.8}$$

称（4.8）为分支方程，上述过程就是熟知的Liapunov-Schmidt过程。

当λ^*是单特征值[11]时，(4.8)可进一步化为一个方程

$$f(\xi,\eta)=-\eta\xi+EhD^{-1}(C(V+\xi v_1),\ v_1)_X=0 \tag{4.9}$$

注意到（4.7）中的性质，$V(\xi,\ \eta)$可写成

$$V(\xi,\eta)=\tilde V(\xi,\eta)\xi,\ 且\tilde V(0,0)=0 \tag{4.10}$$

将（4.10）代入（4.9）并消去ξ，得到

$$\left.\begin{aligned}&\tilde f(\xi,\eta)=-\eta+\xi^2EhD^{-1}(C(\tilde V(\xi,\eta)+v_1),v_1)_X=0\\&\tilde f(0,0)=0,\ f'_\eta(0,0)=-1\end{aligned}\right\} \tag{4.11}$$

再次利用隐函数定理，在$(\xi,\eta)=(0,0)$的邻域，得到（4.11）的唯一解

$$\eta=\eta(\xi),\ |\xi|<\xi^0 \tag{4.12a}$$

容易看到，$\eta=\eta(\xi)$有性质：

(i) $\eta(0)=0$；(ii) $\eta'(0)=0$；(iii) $\eta''(0)=2(C(v_1),v_1)_X>0$ (4.12b)

这样我们已证明了分支定理。

定理4.1 如果λ^*是(3.1)的单特征值，则（2.9）的平凡解$(W,\lambda)=(0,\lambda)$在$(0,\lambda^*)$处必发生分叉，并且分支解可唯一地表成为

$$\left.\begin{aligned}&\lambda(\xi)=\lambda^*(1+\eta(\xi))=\lambda^*+\lambda^*(C(v_1),v_1)_X\xi^2+O(\xi^3)\\&W(\xi)=\xi v_1+\xi\tilde V(\xi,\eta)=\xi v_1+O(\xi^3)\end{aligned}\right\} \tag{4.13}$$

同时，应力函数给定为

$$F=-0.5EB_2(W,W)=-0.5EB_2(v_1,v_2)\xi^2+O(\xi^3) \tag{4.14}$$

由（4.13）知，当$\lambda^*=\lambda_1^+(\lambda_1^-)$时，存在一对分支解，它们是稳定的右（左）分支。

当λ^*是重特征值时，利用算子方程的变分性质和类似于前面的分析方法也能讨论（2.9）的分支解，但得不到象（4.13）那样的形式，而且分支解一般也不是唯一的。

现在设λ_1^+和λ_1^-都存在，根据定理2.10，对任意的正数$R>0$，我们能够建立下面两个变分问题：

MI问题：寻求使泛函$h(LW,W)_X/2$在曲面∂A_R上达到最大值的点。

NI问题：寻求使泛函$h(LW,W)_X/2$在曲面∂A_R上达到最小值的点。

显然，如果问题MI（NI）有解，则它必是（2.9）的非平凡解。

引理4.1 变分问题MI和NI都有解。

证明 显然，只要证明MI有解就足够了，对于NI问题，证明是类似的。首先，我们注意到下面的事实：

〈i〉 因为L是全连续对称算子，所以泛函$h(LW,W)_X/2$是弱连续的；

〈ii〉 $\partial A_R=\left\{u\in X\,\middle|\,\frac{D}{2}(u,u)_X+\frac{Eh}{4}(C(u),u)_X=R\right\}\subset X$

是有界的星形集合，因此，存在一个有界的上确界 $\sup\limits_{W\in\partial A_R}h(LW,W)_X/2=\overline{M}_1(R)$。即存在一个极大化序列，$u_n\in\partial A_R$，使得$\overline{M}_1(R)=\lim\limits_{n\to\infty}h(Lu_n,u_n)_X/2$。

因为X是Hilbert空间，所以存在弱收敛子序列$\{W_n\}\subset\{u_n\}$并具有弱极限$W_1^+(R)$。但由(i)，立即得到$\bar{M}_1(R)=h(LW_1^+(R),W_1^+(R))_X/2$。因为$B_2(\cdot,\cdot)$是紧的，所以$\lim\limits_{n\to\infty}(C(W_n),W_n)_X=(C(W_1^+(R)),W_1^+(R))_X$。注意到$\lim\limits_{n\to\infty}\|W_n\|_X\geqslant\|W_1^+(R)\|_X$，所以，$D(C(W_1^+(R)),W_1^+(R))_X/2+Eh(C(W_1^+(R)),W_1^+(R))_X/4\leqslant R$，而且等号也成立。否则，对于某个$t_R>1$，必有$t_RW_1^+(R)\in\partial A_R$，而且$ht_R^2(LW_1^+(R),W_1^+(R))_X/2\geqslant\bar{M}_1(R)$。这与$\bar{M}_1(R)$的定义矛盾。因此，我们有$\sup\limits_{W\in\partial A_R}h(LW,W)_X/2=\max\limits_{W\in\partial A_R}h(LW,W)_X/2=\bar{M}_1(R)$。证毕。

令$W_1^\pm(R)$和$\lambda_1^\pm(R)$是相应于某个正数R问题RI和NI的解，则有如下引理。

引理4.2 $\lim\limits_{R\to0^+}\|W_1^+(R)\|_X=\lim\limits_{R\to0^+}\|W_1^-(R)\|_X=0$

并且 $\lim\limits_{R\to0^+}|\lambda_1^+(R)-\lambda_1^+|=\lim\limits_{R\to0^+}|\lambda_1^-(R)-\lambda_1^-|=0$。

证明 因为$W_1^+(R)\in\partial A_R$，所以

$$\|W_1^+(R)\|_X^2\leqslant\|W_1^+(R)\|_X^2+\frac{Eh}{2D}(C(W_1^+(R)),\ W_1^+(R))_X=\frac{2R}{D}$$

因此，当$R\to0^+$时，$\|W_1^+(R)\|_X\to0$。

令 $$\Sigma_R=\left\{u\in X\,\middle|\,\frac{D}{2}\|u\|_X^2=R\right\}$$

并设在Σ_R中，u_1^+是相应于λ_1^+的特征向量，于是有$1/\lambda_1^+=h(Lu_1^+,\ u_1^+)_X/2R$。注意到

$$\frac{1}{\lambda_1^+(R)}=\frac{h(LW_1^+(R),W_1^+(R))_X}{D(W_1^+(R),W_1^+(R))_X+Eh(C(W_1^+(R)),W_1^+(R))_X}$$

有

$$\frac{1}{\lambda_1^+}-\frac{1}{\lambda_1^+(R)}=\frac{h}{2R}(Lu_1^+,u_1^+)_X-\frac{h(LW_1^+(R),W_1^+(R))_X/2}{R+Eh(C(W_1^+(R)),W_1^+(R))_X/4}$$

$$\leqslant\frac{h}{2R}\left[(Lu_1^+,u_1^+)_X-(LW_1^+(R),W_1^+(R))_X\left(1-\frac{Eh}{4R}(C(W_1^+(R)),W_1^+(R))_X\right)\right]$$

$$=\frac{h}{2R}[(Lu_1^+,u_1^+)_X-(LW_1^+(R),W_1^+(R))_X]$$

$$-\frac{Eh^2}{8R^2}(C(W_1^+(R)),W_1^+(R))_X(LW_1^+(R),W_1^+(R))_X$$

因为∂A_R与Σ_R同胚，所以如果令$u_R^+\in\partial A_R$是与$u_1^+\in\Sigma_R$对应的点，则有

$$u_R^+=t_Ru_1^*,\quad t_R^2=\frac{2}{1+\sqrt{1+Eh(C(u_1^+),u_1^+)_X/R}}>0$$

$$(LW_1^+(R),W_1^+(R))_X\geqslant(Lu_R^+,u_R^+)_X=t_R^2(Lu_1^+,u_1^+)_X$$

现在，令 $R\to0^+$，则 $(Lu_1^+,u_1^+)_X=O(R)$，由定理2.5，有 $(C(u_1^+),\ u_1^+)_X=O(R^2)$。因此，$(C(W_1^+(R)),W_1^+(R))_X=O(R^2)$。此外，因为$t_R^2\to1$，于是得$1/\lambda_1^+-1/\lambda_1^+(R)\leqslant0$，当 $R\to0^+$时。同时$\lambda_1^+(R)\geqslant\lambda_1^+$，所以有$\lim\limits_{R\to0^+}|1/\lambda_1^+-1/\lambda_1^+(R)|=0$。证毕

由上述结论，我们已证明了下面的分支定理。

分支解的存在性定理 如果$\lambda_1^\pm$都存在，则(2.9)的平凡解$(0,\lambda)$在$\lambda=\lambda_1^+$和$\lambda=\lambda_1^-$处必

发生分叉，并且分支解$(W_1^+(R),\lambda_1^+(R))$和$(W_1^-(R),\lambda_1^-(R))$分别对应于使泛函$h(LW,W)_X/2$在曲面$\partial A_R$上达到最大值和最小值的点。

这个定理对任意给定的数$R>0$都是成立的，这与定理4.1不同。但这个定理没有给出分支解的存在性。实际上，当λ_1^+，λ_1^-是多特征值时，存在几个分支解[3]。

参 考 文 献

[1] 朱正佑、程昌钧，关于开孔薄板大挠度问题的一般数学理论，力学学报，18(2) (1986)，123—135。

[2] 程昌钧、吕小安，关于开孔薄板大挠度问题的一般数学理论（续），力学学报，21(2) (1989)，193—203。

[3] Berger, M., On von Kármán equation and the buckling of a thin elastic plate I: The clamped plate, *Comm. Pure Appl. Math.*, 20(4) (1967), 687—719.

[4] Berger, M. and P. File, On von Kármán equation and the buckling of a thin elastic plate II, *Comm. Pure Appl. Math.*, 21(3) (1968), 227—241.

[5] Adams, R.A., *Sobolev Spaces*, Academic Press, New York (1975).

[6] Rektorys, Karel, *Variational Methods in Mathematics, Science and Engineering*, D. Reidel Publishing Company (1975).

[7] 钱伟长，《广义变分原理》，科学出版社 (1985)。

[8] Berger, M., An eigenvalue problem for non-linear elliptic partial differential equation, *Trans. A.M.S.*, 120 (1965), 154—184.

[9] Agnon, S., The L_p approach to the Dirichlet problem, *Ann. Scuola di Pisa*, 13 (1959), 405—448.

[10] Dunford, Nelson and Jacob T. Schwartz, *Linear Operators*, Part I: General Theory, INC., New York (1958).

[11] 朱正佑、程昌钧，《分支问题的数值计算方法》，兰州大学出版社 (1989)。

[12] Chow, Shui-nee and Jack K. Hale, *Methods of Bifurcation Theory*, Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg (1982).

The Existence of Buckled States on a Perforated Thin Plate

Cheng Chang-jun Yang Xiao

(Department of Mechanics, Lanzhou University, Lanzhou)

Abstract

On the basis of the generalized Kármán theory for perforated thin plates established in [1, 2], the existence of buckled states for perforated plates subjected to self-equilibrating inplane forces along each edge systematically is investigated. This work completely generalizes the results in [3, 4].

Key words perforated plate, multi-connected region, modified Kármán theory, buckled state, bifurcation theorem