应用数学和力学，第13卷第7期(1992年7月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

环形夹层板的屈曲状态*

何录武　　程昌钧

（兰州大学力学系，1991年10月5日收到）

摘　　要

本文根据 Reissner 假设讨论了内外边界固支并在外边界上受面内径向均匀压力作用的环形夹层板的轴对称屈曲状态．首先给出了屈曲问题的基本方程；其次，用打靶法对一些参数值给出了最小的临界载荷；最后讨论了在临界载荷附近屈曲状态的存在性及其渐近形式．

关键词　夹层板　打靶法　临界载荷　屈曲状态

一、引　　言

对于夹层板的屈曲问题已有一些工作[1,2]，但对环形夹层板的屈曲问题还没有见到．当夹层板开孔时，除了所需的方程外，还应添加一些位移单值性条件[2,3]，这时屈曲问题将变得更为复杂．本文主要讨论了内外边界固支并在外边界上受面内径向均匀压力作用的环形夹层板的轴对称屈曲问题，证明了在临界载荷附近屈曲状态的存在性并给出屈曲状态的渐近展式．

二、屈曲问题的基本方程

考虑一个内、外半径分别为a，b的环形夹层板，设环形夹层板的内外边界固支并在外边界上受面内径向均匀压力p的作用．由[2,3]的讨论知，这时有单值的应力函数Ψ存在．我们仅考虑轴对称问题，于是挠度w应力函数Ψ以及径向和环向剪切角ψ_r，ψ_θ仅是r的函数，即

$$w=w(r),\quad \Psi=\Psi(r),\quad \psi_r=\psi_r(r),\quad \psi_\theta\equiv 0.$$

这时在极坐标下环形夹层板的控制方程可写成：

$$D\left(\Delta\psi_r-\frac{1}{r^2}\psi_r\right)+C\left(\frac{dw}{dr}-\psi_r\right)=0 \tag{2.1a}$$

$$C\left[\Delta w-\left(\frac{d\psi_r}{dr}+\psi_r\right)\right]+2t\frac{1}{r}\left(\frac{d^2w}{dr^2}\frac{d\Psi}{dr}+\frac{dw}{dr}\frac{d^2\Psi}{dr^2}\right)=0 \tag{2.1b}$$

---

* 钱伟长推荐．国家自然科学基金资助项目．

$$\Delta^2\Psi=-\frac{E}{r}\left(\frac{d^2w}{dr^2}\frac{dw}{dr}\right) \tag{2.1c}$$

其中，算子 $\Delta(\cdot)=\frac{1}{r}\frac{d}{dr}r\frac{d(\cdot)}{dr}$，$D=Eth^2/2(1-\mu^2)$和$C=G_ch^2/(h-t)$分别为抗弯刚度和剪切刚度，$h$为夹层板的厚度，$G_c$为夹心材料的剪切模量，$E$和$\mu$以及$t$分别为夹层板的表层材料的弹性模量和泊松比以及厚度。

中面的径向和环向薄膜力T_r，T_θ和$T_{r\theta}$与Ψ之间有如下关系

$$T_r=2t\frac{1}{r}\frac{d\Psi}{dr},\ T_\theta=2t\frac{d^2\Psi}{dr^2}=r\frac{dT_r}{dr}+T_r,\ T_{r\theta}\equiv 0.$$

把上述表达式代入(2.1)消去Ψ，并积分(2.1c)得到

$$D\left(\Delta\psi_r-\frac{1}{r^2}\psi_r\right)+C\left(\frac{dw}{dr}-\psi_r\right)=0 \tag{2.2a}$$

$$C\left[\Delta w-\left(\frac{d\psi_r}{dr}+\psi_r\right)\right]+\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(rT_r\frac{dw}{dr}\right)=0 \tag{2.2b}$$

$$r\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r}\frac{d}{dr}r^2T_r\right)+Et\left(\frac{dw}{dr}\right)^2=c_1 \tag{2.2c}$$

其中　c_1为积分常数．由位移单值性条件[2,3]可以证明$c_1=0$[4]、若内，外边界固支且在外边界上受均匀压力p的作用，则边界条件为：

$$r=a,\ w=0,\ \psi_r=0,\ T_r=0 \tag{2.3a}$$

$$r=b,\ w=0,\ \psi_r=0,\ T_r=-2tp \tag{2.3b}$$

引入新的变量$^*w$和无量纲量．令 $\psi_r=d\,{}^*w/dr$，$w={}^*w-D\Delta\,{}^*w/C$，$x=r/b$，${}^*W={}^*w/h$，$S=b^2T_r/D$，$\alpha=D/(Cb^2)$，$\beta=2(1-\mu^2)$，$l=a/b<1$，$\lambda=b^22tp/D$，${}^*W_1(x)=d\,{}^*W/dx={}^*W'(x)$(或${}^*W(x)=\int_l^x {}^*W_1(x)dx$)，则(2.2)和(2.3)可化简成

$$x\frac{d}{dx}\frac{1}{x}\frac{d}{dx}x\,{}^*W_1-xS\left({}^*W_1-\alpha\frac{d}{dx}\frac{1}{x}\frac{d}{dx}x\,{}^*W_1\right)=K \tag{2.4a}$$

$$x\frac{d}{dx}\frac{1}{x}\frac{d}{dx}x^2S+\beta\left({}^*W_1-\alpha\frac{d}{dx}\frac{1}{x}\frac{d}{dx}x\,{}^*W_1\right)^2=0 \tag{2.4b}$$

$$S(l)=0,\ S(1)=-\lambda \tag{2.4c}$$

$${}^*W_1(l)={}^*W_1(1)=0,\ \int_l^1{}^*W_1dx+\alpha({}^*W_1'(l)-{}^*W_1'(1))=0 \tag{2.4d}$$

对于(2.4)，基本未知量为${}^*W_1$，S和待定积分常数K，λ是与压力p成比例的特征参数．

对于任意的λ，${}^*W_1\equiv 0$，$K=0$，$S=-\lambda(1-l^2/x^2)/(1-l^2)$ 总是(2.4)的一组解，它相应于夹层板的未屈曲状态($w\equiv 0$，$\psi_r\equiv 0$)．为了方便起见，令

$$S_1(x)=S(x)+\lambda S_0(x),\ S_0(x)=(1-l^2/x^2)/(1-l^2) \tag{2.5}$$

代入(2.4)，得到：

$$x\frac{d}{dx}\frac{1}{x}\frac{d}{dx}x\,{}^*W_1+\lambda xS_0\left({}^*W_1-\alpha\frac{d}{dx}\frac{1}{x}\frac{d}{dx}x\,{}^*W_1\right)$$

$$-xS_1\left({}^*W_1-\alpha\frac{d}{dx}\frac{1}{x}\frac{d}{dx}x\,{}^*W_1\right)=K \tag{2.6a}$$

$$x\frac{d}{dx}\frac{1}{x}\frac{d}{dx}x^2S_1+\beta\left(*W_1-\alpha\frac{d}{dx}\frac{1}{x}\frac{d}{dx}x\ *W_1\right)^2=0 \tag{2.6b}$$

$$S_1(l)=S_1(1)=0,\ *W_1(l)=*W_1(1)=0 \tag{2.6c}$$

$$\int_l^1 *W_1dx+\alpha(*W_1'(l)-*W_1'(1))=0 \tag{2.6d}$$

这样，原问题转化为求满足(2.6)的$*W_1$，S_1和K。我们称(2.6)为屈曲问题的基本方程。

三、线性化问题和临界载荷

对于任意的λ，(2.6)有平凡解（$*W_1$，S_1，K）$\equiv$(0,0,0)，它相应于夹层板的未屈曲状态。为了求得(2.6)从平凡解上分叉出去的分支解（非平凡解），首先必须求分支点。按一般分支理论[5]知，即求下面线性化问题

$$L_\lambda u\equiv x\frac{d}{dx}\frac{1}{x}\frac{d}{dx}xu+\lambda xS_0\left(u-\alpha\frac{d}{dx}\frac{1}{x}\frac{d}{dx}xu\right)=k \tag{3.1a}$$

$$x\frac{d}{dx}\frac{1}{x}\frac{d}{dx}x^2v=0 \tag{3.1b}$$

$$v(l)=v(1)=0,\ u(l)=u(1)=0 \tag{3.1c}$$

$$\int_l^1 udx+\alpha(u'(l)-u'(1))=0 \tag{3.1d}$$

的特征值λ，即临界载荷。利用打靶法[6]，我们可以得到λ为临界载荷当且仅当λ是下面方程

$$U(1,\lambda,\alpha)\left[\int_l^1 V(x,\lambda,\alpha)dx+\alpha(1-V'(1,\lambda,\alpha))\right]$$

$$-V(1,\lambda,\alpha)\left[\int_l^1 U(x,\lambda,\alpha)dx-\alpha U'(1,\lambda,\alpha)\right]=0 \tag{3.2}$$

的根。其中$U(x,\lambda,\alpha)$和$V(x,\lambda,\alpha)$分别为下面初值问题的解

$$L_\lambda U=1,\ U(l)=U'(l)=0 \tag{3.3a}$$

$$L_\lambda V=0,\ V(l)=0,\ V'(l)=1. \tag{3.3b}$$

(3.2)习惯上称为“特征方程”。

当$\mu=0.3$时，对不同的一些l、α值，我们把通过数值求解“特征方程”所得到的在外边界上受面内均匀压力p作用的环形夹层板的前两个临界载荷λ_1^*，λ_2^*的值，列在表1～3中。

表 1　对于$\mu=0.3$，内边自由，外边固支时的前两个临界载荷

l / α	0.1		0.3		0.5	
	λ_1^*	λ_2^*	λ_1^*	λ_2^*	λ_1^*	λ_2^*
0.00	13.947	47.980	14.968	74.122	25.759	162.212
0.01	12.306	33.212	13.398	46.354	22.010	72.439
0.03	9.958	20.449	11.047	25.849	16.874	32.119
0.05	8.359	14.727	9.370	17.681	13.550	20.368
0.07	7.201	11.489	8.118	13.349	11.241	14.505

表 2 对于$\mu=0.3$，内边固支，外边固支时的第一个临界载荷

α \ λ_1^* \ l	0.1	0.3	0.5
0.01	34.114	51.883	76.965
0.03	19.858	26.270	33.699
0.05	14.022	17.541	22.414
0.07	10.867	13.171	14.767

表 3 对于$\mu=0.3$，内边简支，外边固支时的第一个临界载荷

α \ λ_1^* \ l	0.1	0.3	0.5
0.01	30.344	44.452	70.303
0.03	18.855	25.060	33.567
0.05	13.678	17.346	21.928
0.07	10.729	13.263	14.663

现设$\lambda^*=\lambda^*(\alpha)$是(3.2)的一个根，并令

$$m(\alpha)=2-\operatorname{rank}\begin{pmatrix} U(1,\lambda^*,\alpha), & V(1,\lambda^*,\alpha) \\ \int_l^1 U(x,\lambda^*,\alpha)dx-\alpha U'(1,\lambda^*,\alpha), & \int_l^1 V(x,\lambda^*,\alpha)dx-\alpha(1-V'(1,\lambda^*,\alpha)) \end{pmatrix},$$

$$\lambda_0^*=\lambda^*(0),\quad m_0=m(0).$$

显然$m(\alpha)(m_0)$只能取1或2．从(3.3)很容易可以看到，当$\lambda=\lambda^*(\lambda=\lambda_0^*)$时，(3.1)仅有$m(\alpha)(m_0)$个线性无关的非零解．特别，当$m(\alpha)=m_0=1$时，我们记(3.1)在$\lambda=\lambda^*$和$\lambda=\lambda_0^*$ $(\alpha=0)$处的非零解$(u,0,k)$分别为$(u^*,0,k^*)$和$(u_0^*,\ 0,\ k_0^*)$并要求它们满足下面法化条件：

$$\int_l^1 (u^*)^2dx+(k^*)^2=1,\quad \int_l^1(u_0^*)^2dx+(k_0^*)^2=1 \tag{3.4}$$

则有如下结论：

定理1 假定$m(\alpha)=m_0=1$ $(\alpha>0)$.则存在一个$\alpha_0>0$，当$0\leqslant\alpha\leqslant\alpha_0$时，$u^*$，$k^*$和$\lambda^*$具有如下形式：

$$u^*=u_0^*+\varepsilon_1 u_0^{(1)}(x,\varepsilon_1) \tag{3.5a}$$

$$k^*=k_0^*+\varepsilon_1 k_0^{(1)}(\varepsilon_1),\qquad \lambda^*=\lambda_0^*+\varepsilon_1\lambda_0^{(1)}(\varepsilon_1) \tag{3.5b,c}$$

其中 $\varepsilon_1^2=\alpha$，而$u_0^{(1)}(x,\varepsilon_1)$，$k_0^{(1)}(\varepsilon_1)$，$\lambda_0^{(1)}(\varepsilon_1)$由下面线性边值问题唯一确定

$$x\frac{d}{dx}\frac{1}{x}\frac{d}{dx}xu_0^{(1)}+\lambda_0^*S_0x\left(u_0^{(1)}-\varepsilon_1\frac{d}{dx}\frac{1}{x}\frac{d}{dx}x(u_0^*+\varepsilon_1u_0^{(1)})\right)$$
$$+\lambda_0^{(1)}S_0x\left(u_0^*+\varepsilon_1u_0^{(1)}-\varepsilon_1^2\frac{d}{dx}\frac{1}{x}\frac{d}{dx}x(u_0^*+\varepsilon_1u_0^{(1)})\right)=k_0^{(1)} \tag{3.6a}$$

$$u_0^{(1)}(l)=u_0^{(1)}(1)=0,\quad \int_l^1 u_0^{(1)}dx+\varepsilon_1(u_0^{(1)\prime}(l)-u_0^{(1)\prime}(1))=0 \tag{3.6b}$$

$$\int_l^1(2u_0^*u_0^{(1)}+\varepsilon_1(u_0^{(1)})^2)dx+2k_0^*k_0^{(1)}+\varepsilon_1(k_0^{(1)})^2=0 \tag{3.6c}$$

对于(3.6)，当$\varepsilon_1=0$时有平凡解$(u_0^{(1)},\ k_0^{(1)},\ \lambda_0^{(1)})=(0,0,0)$．要证明(3.6)有唯一的解$(u_0^{(1)},\ k_0^{(1)},\ \lambda_0^{(1)})$，只要证明$\varepsilon_1=0$不是(3.6)在平凡解处的线性化问题的特征值即可，但这是不难验证的[4]．

四、临界载荷附近的屈曲状态

在这节里我们将讨论(2.6)在临界载荷附近的非平凡解(即屈曲状态)的存在性及其渐近展式。

假设$m(\alpha)=m_0=1(\alpha>0)$。由定理1和[4],不难得到如下定理。

定理2 存在一个$\alpha_1>0$,使对任何α,$0\leqslant\alpha\leqslant\alpha_1$,(2.6)的平凡解在$\lambda=\lambda^*$处必发生分叉,而且分支解具有如下形式:

$$^*W_1(x,\alpha)=\varepsilon u^*(x,\alpha)+\varepsilon\ {}^*W_2(x,\alpha,\varepsilon) \tag{4.1a}$$

$$S_1(x,\alpha)=\varepsilon S_2(x,\alpha,\varepsilon) \tag{4.1b}$$

$$K=\varepsilon k^*+\varepsilon K_1(\alpha,\varepsilon),\quad \lambda=\lambda^*+\lambda_1(\alpha,\varepsilon) \tag{4.1c,d}$$

其中ε为小参数,

$$\varepsilon=\int_l^1 {}^*W_1u^*\ dx+Kk^*,$$

$^*W_2(x,\alpha,\varepsilon)$,$S_2(x,\alpha,\varepsilon)$,$K_1(\alpha,\varepsilon)$,$\lambda_1(\alpha,\varepsilon)$由下面边值问题

$$L_{\lambda^*}\ {}^*W_2+\lambda_1S_0\ x\Big(u^*+{}^*W_2-\alpha\frac{d}{dx}\ \frac{1}{x}\ \frac{d}{dx}x(u^*+{}^*W_2)\Big)$$

$$-xS_2\varepsilon\Big(u^*+{}^*W_2-\alpha\frac{d}{dx}\ \frac{1}{x}\ \frac{d}{dx}\ x(u^*+{}^*W_2)\Big)=K_1 \tag{4.2a}$$

$$x\frac{d}{dx}\ \frac{1}{x}\ \frac{d}{dx}\ x^2S_2+\beta\varepsilon\Big(u^*+{}^*W_2-\alpha\frac{d}{dx}\ \frac{1}{x}\ \frac{d}{dx}\ x(u^*+{}^*W_2)\Big)^2=0 \tag{4.2b}$$

$$S_2(l)=S_2(1)=0,\quad {}^*W_2(l)={}^*W_2(1)=0 \tag{4.2c}$$

$$\int_l^1 {}^*W_2dx+\alpha({}^*W_2'(l)-{}^*W_2'(1))=0,\quad \int_l^1 u^*\ {}^*W_2dx+K_1k^*=0 \tag{4.2d}$$

唯一确定,并且有

$$\left.\begin{array}{ll}\lim\limits_{\varepsilon\to0}{}^*W_2(x,\alpha,\varepsilon)=0, & \lim\limits_{\varepsilon\to0}S_2(x,\alpha,\varepsilon)=0\\ \lim\limits_{\varepsilon\to0}K_1(\alpha,\varepsilon)=0, & \lim\limits_{\varepsilon\to0}\lambda_1(\alpha,\varepsilon)=0\end{array}\right\} \tag{4.3}$$

为了确定$^*W_2(x,\alpha,\varepsilon)$,$S_2(x,\alpha,\varepsilon)$,$K_1(\alpha,\varepsilon)$,$\lambda_1(\alpha,\varepsilon)$的渐近展式,将它们按$\varepsilon$展开:

$$\left.\begin{array}{l}{}^*W_2(x,\alpha,\varepsilon)=\varepsilon\ {}^*W_{21}(x,\alpha)+\varepsilon^2\ {}^*W_{22}(x,\alpha)+O(\varepsilon^3)\\ S_2(x,\alpha,\varepsilon)=\varepsilon S_{21}(x,\alpha)+\varepsilon^2S_{22}(x,\alpha)+O(\varepsilon^3)\\ K_1(\alpha,\varepsilon)=\varepsilon K_{11}(\alpha)+\varepsilon^2K_{12}(\alpha)+O(\varepsilon^3)\\ \lambda_1(\alpha,\varepsilon)=\varepsilon\lambda_{11}(\alpha)+\varepsilon^2\lambda_{12}(\alpha)+O(\varepsilon^3)\end{array}\right\} \tag{4.4}$$

代入(4.2)式比较系数求得

$$^*W_{21}\equiv0,\quad K_{11}=0,\quad \lambda_{11}=0,\quad S_{22}\equiv0 \tag{4.5}$$

而$^*W_{22}$,S_{21},K_{12},λ_{12}由下面线性边值问题唯一确定:

$$x\frac{d}{dx}\ \frac{1}{x}\ \frac{d}{dx}\ x^2S_{21}+\beta\Big(u^*-\alpha\frac{d}{dx}\ \frac{1}{x}\ \frac{d}{dx}xu^*\Big)^2=0 \tag{4.6a}$$

$$S_{21}(l)=0,\qquad S_{21}(1)=0 \tag{4.6b}$$

$$L_{\lambda^*}\ {}^*W_{22}+\lambda_{12}\,S_0\,x\Big(u^*-\alpha\frac{d}{dx}\ \frac{1}{x}\ \frac{d}{dx}\,xu^*\Big)$$

$$-S_{21}x\left(u^*-\alpha\frac{d}{dx}\frac{1}{x}\frac{d}{dx}xu^*\right)=K_{12} \tag{4.7a}$$

$$^*W_{22}(l)={}^*W_{22}(1)=0,\ \int_l^1 u^*\,{}^*W_{22}dx+K_{12}k^*=0 \tag{4.7b}$$

$$\int_l^1 {}^*W_{22}dx+\alpha({}^*W'_{22}(l)-{}^*W'_{22}(1))=0 \tag{4.7c}$$

这样，我们得到了(2.6)在临界载荷λ^*附近从平凡解分叉出去的非平凡解有如下渐近展式：

$$\begin{cases} {}^*W_1(x,\alpha,\varepsilon)=\varepsilon u^*(x,\alpha)+\varepsilon^3\ {}^*W_{22}(x,\alpha)+O(\varepsilon^4) \\ S_1(x,\alpha,\varepsilon)=\varepsilon^2 S_{21}(x,\alpha)+O(\varepsilon^4) \\ K(\alpha,\varepsilon)=\varepsilon k^*+\varepsilon^2 K_{12}(\alpha)+O(\varepsilon^4) \\ \lambda(\alpha,\varepsilon)=\lambda^*+\varepsilon^2\lambda_{12}(\alpha)+O(\varepsilon^3) \end{cases} \tag{4.8}$$

将$^*W_{22}$，S_{21}，K_{12}，λ_{12}按ε_1展开代入(4.6)和(4.7)并利用定理1可以证明对较小的α，有$\lambda_{12}>0$。于是，由(4.8)所确定的解支是在λ^*的右侧（即$\lambda>\lambda^*$的一侧）从平凡解分叉出去的。

对于ω和ψ_r的其它类型边界条件的情况，也可作类似的讨论。

参 考 文 献

[1] Leissa, A.W., A review of laminated composite plate buckling, *Appl. Mech. Rev.*, **40**(5) (1987).

[2] 何录武，夹层板的屈曲和分支，兰州大学博士学位论文 (1990).

[3] 程昌钧、朱正佑，《结构的屈曲与分叉》，兰州大学出版社 (1991).

[4] 程昌钧、朱正佑，环形板的屈曲状态，中国科学 (A)，(3) (1986).

[5] 朱正佑、程昌钧，《分支问题的数值计算方法》，兰州大学出版社 (1989).

[6] Roberts, S. M. and J. S. Shipman, *Two-Point Boundary Value Problems: Shooting Methods*, Aemerican Elsevier Publishing Company, Inc.(1972).

The Buckled States of Annular Sandwich Plates

He Lu-wu Cheng Chang-jun

(Department of Mechanics, Lanzhou University, Lanzhou)

Abstract

In this paper, the axisymmetric buckled states of an annular sandwich plate (Reissner-type sandwich plate) with the clamped inner edge which is subjected to a uniform radial compressive thrust at the clamped outer edge are studied. Firstly, the basic equation of the buckled problem is derived. Secondly, the critical loads for some parameters are obtained by using the shooting method. Finally, We discuss the existence of the buckled states and obtain the asymptotic expansions of the buckled states in the vicinity of the critical loads.

Key words sandwich plate, shooting method, critical load, buckled state