

带激波的一维非定常两相流动的数值模拟*

吴清松 王柏懿

(中国科学技术大学) (中国科学院力学研究所)

(1991年7月17日收到)

摘 要

本文将处理带激波的单相气体非定常流动问题的两种高分辨数值方法(随机取样法和二阶 GRP 有限差分法)推广应用于气固悬浮体(亦称含灰气体)两相情况, 计算了含灰气体激波管中两相激波特性、波后流场结构及气固两相流动参数随时间的变化。数值结果表明: 这两种方法均能给出带有尖锐间断阵面的两相激波松弛结构。二阶 GRP 方法在计算精度和机时耗用等方面优于随机取样法。

关键词 两相流 激波 松弛结构 数值模拟

一、引 言

两相流动广泛存在于自然界和工程技术领域中, 因此一直受到众多研究者的关注。由于两相间的耦合, 特别是高速流动情况下可能出现的激波等复杂现象给两相流的数值模拟带来了一定的困难。对于携带着大量微细的悬浮固体粒子的气体(人们通常称之为含灰气体), 粒子与气体的相互作用会显著地改变气体的流动状态。当气相流动状态出现突跃变化时(例如间断的激波), 粒子本身的惯性将造成固相运动的滞后。换言之, 颗粒无法立即响应气流参数的变更。固相只能通过粒子和气体间的动量与能量传递而逐渐达到与气相的平衡。因此, 两相激波具有松弛结构。一般而言, 表征含灰气体激波松弛过程的特征长度要比纯气体激波大若干个数量级(后者是由于气体本身的粘性效应造成的)。

五十年代末期以来, 人们发展了各种分析和数值的方法来研究含灰气体激波及其诱导的流场结构^[1~6]。本文则采用改进的随机取样法和二阶 GRP 有限差分法这两种高分辨数值方法模拟含灰气体激波管中非定常流动。Miura 和 Glass^[7]首先利用一种修正的随机取样法研究了含灰气体激波管。我们在他们工作的基础上作了两点改进: (1) 用切线迭代替换了原来的 Godunov 迭代, 从而提高了收敛速度; (2) 用 Vander Corput 随机取样法替换了原来的 Chorin 取样法, 从而使随机数分布更加均匀。Ben-Artzi 和 Falcovitz^[8]曾提出了一种用于带激波的纯气体流动问题的二阶 GRP 格式, 它是建立在求解推广 Riemann 问题在间断处的分析解基础上的有限差分方法。我们则将这种方法推广应用于含灰气体情况。在本文中, 我们同时采用上述两种数值方法计算了冻结激波阵面强度、含灰气体激波结构及气固两相流动参数随时间变化历程, 并对它们用于模拟带激波两相流动的有效性进行了比较。

* 李家春推荐。

二、数学表述

现考虑一个等截面的含灰气体激波管，其驱动段充有高压空气，低压段含有气固混合物（参见图1）。

假定气相为完全气体，固相由尺寸均一的刚性球形粒子组成并可按连续介质处理。此外，还假定粒子间没有耦合，但气流绕过粒子时的粘性阻力和热量传递构成了相间作用的机制。对于这类稀相气固悬浮体，一维非定常可压缩流动的守恒型基本方程为：

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F(U)}{\partial x} = H(U) \quad (2.1)$$

其中

$$U = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho(C_p T + u^2/2) \\ \rho_p \\ \rho_p u_p \\ \rho_p(C_m T_p + u_p^2/2) \end{pmatrix}, \quad F(U) = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho u(C_p T + u^2/2) \\ \rho_p u_p \\ \rho_p u_p^2 \\ \rho_p u_p(C_m T_p + u_p^2/2) \end{pmatrix},$$

$$H(U) = \begin{pmatrix} 0 \\ -\rho_p D/m \\ -\rho_p(u_p D + Q)/m \\ 0 \\ \rho_p D/m \\ \rho_p(u_p D + Q)/m \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

上式中， p ， ρ ， T 和 u 分别为压力、密度、温度和速度（下标 p 表示固相粒子）； C_p 和 C_p 为气体的定容比热和定压比热； C_m 为粒子材料的比热（亦可采用参数 $\beta = C_m/C_p$ 表示气固两相的比热比）； m 为粒子质量； D 和 Q 为气体施于单个粒子的阻力和热流，它们由下式给定

$$D = \frac{\pi}{8} d^2 \rho (u - u_p) |u - u_p| C_D, \quad Q = \pi d^2 k (T - T_p) Nu \quad (2.3)$$

其中 d 为粒子直径； k 为气体的热传导系数； C_D 为阻力系数， Nu 为Nusselt数。这样，只要加上完全气体的状态方程

$$p = \rho RT \quad (2.4)$$

（其中 R 为气体常数），方程(2.1)便可封闭求解。对于本问题， $t=0$ 时的初始条件为：

$$p = p_1, \quad \rho = \rho_1, \quad \rho_p = \alpha \rho_1, \quad T = T_p = T_1, \quad u = u_p = 0 \quad (\text{对于 } x > 0) \quad (2.5)$$

$$p = p_4, \quad \rho = \rho_4, \quad \rho_p = 0, \quad T = T_4, \quad u = 0 \quad (\text{对于 } x < 0) \quad (2.6)$$

其中 $\alpha = \rho_{p1}/\rho_1$ 为粒子载荷比；下标1和4分别表示激波前方和稀疏波后方的未扰区。

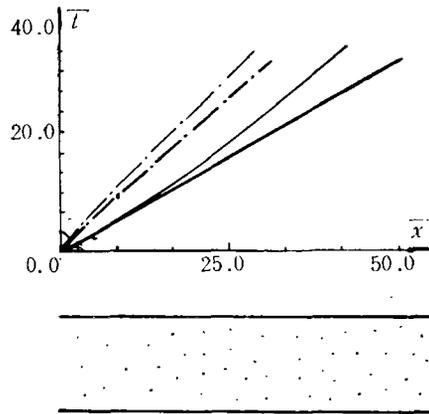


图1 含灰气体激波管及破膜后波系图 ($p_4/p_1 = 15, d = 10 \mu\text{m}$; 实线: 激波阵面; 虚线: 接触面. 粗线 $\alpha = 1.0$, 细线 $\alpha = 3.0$)

三、计算方法

方程(2.1)和初始条件(2.5)(2.6)构成一个具有间断面的非线性问题,而且气相和固相彼此耦合。求解时,我们采用算子分裂技术将相间耦合效应分离开来。这样,分别将方程(2.1)的右端非齐次项和左端空间导数项去掉而得到下述方程组:

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F(U)}{\partial x} = 0 & (3.1) \\ \frac{dU}{dt} = H(U) & (3.2) \end{cases}$$

此时,先解齐次方程(3.1),再以齐次解为初值求解常微分方程(3.2)。本研究同时采用两种高分辨率方法来数值求解气相齐次方程。第一种方法是随机取样法(RCM),其要点是:当前一个时刻的解已知时,通过在计算子区间 Δx 相邻节点间随机取样的方法来确定中点处的解。第二种是二阶GRP有限差分方法,其格式为

$$U_i^{n+1} = U_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} [F(U_{i+1/2}^n) - F(U_{i-1/2}^n)] \quad (3.3)$$

其中

$$F(U_{i\pm 1/2}^n) = F(U_{i\pm 1/2}^n) + \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\partial F}{\partial U} \right)_{i\pm 1/2}^n \left(\frac{\partial U}{\partial t} \right)_{i\pm 1/2}^n \quad (3.4)$$

这里, $U_{i\pm 1/2}^n$ 和 $(\partial U/\partial t)_{i\pm 1/2}^n$ 分别为推广Riemann问题在间断处的解及其对时间的导数。对于固相齐次方程,鉴于其流动参数的变化是连续的,因此将其方程转化为较简单的非守恒型式进行数值求解。此时,在计算子区间里将方程作线性化处理并假定流动参数为线性的初始分布。这样可以得到每个子域的解为

$$u_p = [u_{pr} - u_{pl}]x + \frac{\Delta x}{2}(u_{pr} + u_{pl}) / [\Delta x + (u_{pr} - u_{pl})t] \quad (3.5)$$

$$T_p = [(T_{pr} - T_{pl})x + \frac{\Delta x}{2}(T_{pr} + T_{pl}) + (T_{pl}u_{pr} - T_{pr}u_{pl})t] / [\Delta x + (u_{pr} - u_{pl})t] \quad (3.6)$$

$$\rho_p = \Delta x [(\rho_{pr} - \rho_{pl})x + \frac{\Delta x}{2}(\rho_{pr} + \rho_{pl}) + (\rho_{pl}u_{pr} - \rho_{pr}u_{pl})t] / [\Delta x + (u_{pr} - u_{pl})t]^2 \quad (3.7)$$

其中下标 r 和 l 分别表示右格点和左格点($x = \pm \Delta x/2$)。这里应当指出的是:求解齐次方程时的 x 值,在RCM方法中是随机择取的而在GRP方法中则取 $x=0$ 。此外,在RCM方法中,固相和气相的计算同步进行,每一时间步均分两个半步,但在GRP方法中,气相则是在每个时间步内一次完成,而固相的计算仍分两个时间半步进行(此时使每个格点的新值依赖于前一个时间步左右两格点上的旧值,以便与气相计算的中心差分格式的特点相匹配)。这里,时间步长均需足够小并满足所谓的Courant-Fridrichs-Lewy条件。至于接触面的确定,在两种方法中分别采取随机取样(对RCM)和粒子追踪法(对GRP)来判定。最后,在求解方程(3.2)进行非齐次修正时,对于随机取样法是采用一阶粒度的Euler折线法,而对于GRP方法则采用二阶精度的预估校正法。这样亦是与齐次方程求解精度相一致。

四、结果讨论

我们利用上述两种方法同时计算了含灰气体激波管中非定常流动的特性。这里的阻力系数, Nusselt数和气体粘性系数取下列形式

$$C_D = 0.48 + 28Re_s^{-0.85} \quad (4.1)$$

$$Nu = 2.0 + 0.6p_r^{1/3} Re_s^{1/2} \quad (4.2)$$

$$\mu = 1.71 \times 10^{-5} (T/273)^{0.77} \quad [\text{Nsm}^{-2}] \quad (4.3)$$

其中 $Re_s = \zeta |u - u_p| d / \mu$ 为粒子的滑移Reynolds数, $p_r = C_p \mu / k$ 为气体 Prandtl 数。计算结果以无量纲形式给出:

$$\bar{x} = x/l, \quad \bar{t} = t a_{f1} / l, \quad \bar{p} = p/p_1, \quad \bar{\rho} = \rho/\rho_1, \quad \bar{T} = T/T_1, \quad \bar{u} = u/a_{f1} \quad (4.4)$$

这里的参考长度 l 和波前未扰区冻结音速 a_{f1} 分别由下式给定:

$$l = 8m / \pi \rho_1 d^2, \quad a_{f1} = (\gamma p_1 / \rho_1)^{1/2} \quad (4.5)$$

其中 $\gamma = C_p / C_v$ 为气体比热比。计算中还假定激波前未扰区内两相是平衡的, 而且空气处于标准状况。此外, 我们假定 $p_4 / p_1 = 15.0$, $T_4 = T_1$, $p_r = 0.75$ 以及 $\beta = 1.0$ 。

图2给出破膜后短暂时刻 ($\bar{t} = 5$) 的流场结构, 其中粒径 $d = 10 \mu\text{m}$ 而 $\alpha = 1.0$ 。此结果表明气相参数在激波前沿处均有阶跃变化 (这便形成了所谓的冻结气相激波), 但是固相参数没有出现间断。在冻结激波阵面的后方, 两相的流动参数是逐渐趋于接近的, 但此时尚远离平衡。

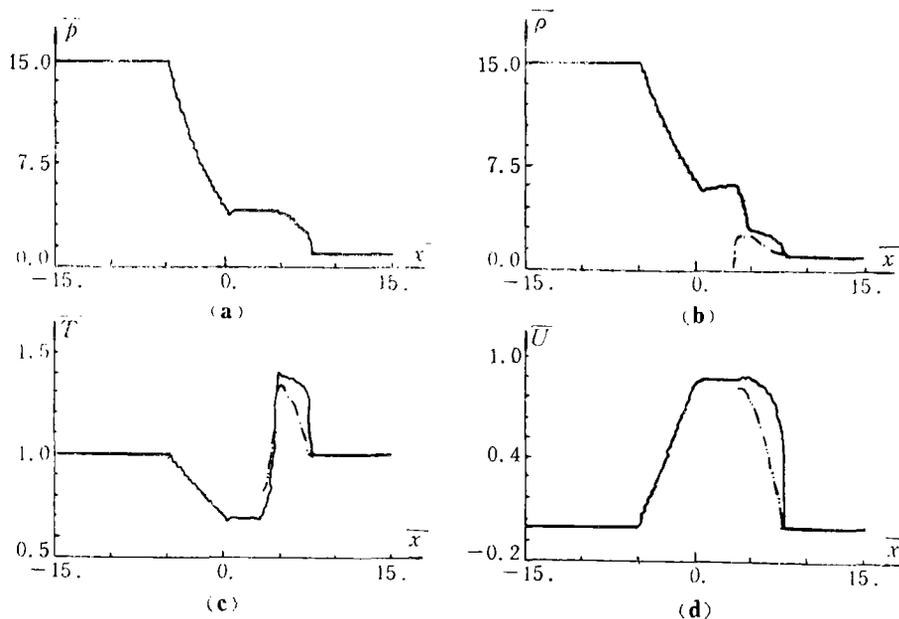


图2 $\bar{t} = 5$ 时的流场结构 (其中 $\alpha = 1.0$, $d = 10 \mu\text{m}$)

(a) 压力分布; (b) 密度分布; (c) 温度分布; (d) 速度分布 (实线: 气相; 虚线: 固相)

图3则示出 $\bar{t} = 30$ 时气固两相的温度与速度剖面, 这里保持粒径 d 和载荷比 α 不变。从图中可以看出: 只要时间足够长, 在冻结激波阵面后方一定距离处, 粒子和气体可以达到某个新的平衡状态。它相应于平衡两相波的极限。当然这是两相间相互作用的结果。对于带激波的流动来说, 在冻结激波阵面处, 粒子来不及调整自己的运动状态; 但在冻结阵面之后, 粒子便开始从气体中取得动量和能量。因此, 在两相流动中的气相冻结激波总是要比纯气体激

波弱一些。这种耗散作用是固相粒子引起的效应。所以松弛结构是带激波两相流动的重要特征。图1中的波系图(即破膜后激波阵面和接触面的位置随时间的变化)表明两相流动中气相冻结激波的传播速度低于纯气相激波速度而且随着松弛过程的发展逐渐降低直到新的平衡状态达到。这从另一个方面反映了粒子的耗散效应。比较图1中 $\alpha=1.0$ 和 $\alpha=3.0$ 的两个结果说明了随着粒子载荷比的增加,散耗作用是增强的。从物理机制来看,这个结果是不言而喻的。

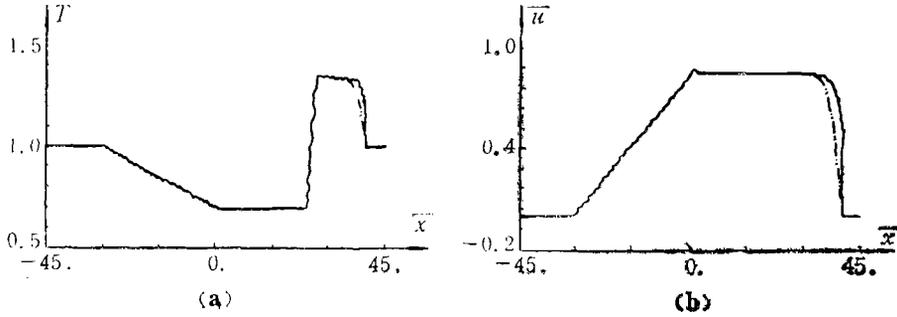


图3 $t=30$ 时的流动参数($\alpha=1.0, d=10\mu\text{m}$):
(a)温度剖面; (b)速度剖面(实线: 气相; 虚线: 固相)

图4分别给出了粒子直径 $d=1\mu\text{m}$ 和 $100\mu\text{m}$ 时的温度剖面 and 速度剖面。这样,我们可以讨论粒径变化对松弛过程的影响。为了与图3的结果进行比较,这里仍取 $\alpha=1.0$ 及 $t=30$ 。图3和图4中所给出的三个不同粒径条件下($d=1\mu\text{m}, 10\mu\text{m}$ 和 $100\mu\text{m}$)的结果说明了松弛长度随粒径的增大而增加。

图5则是 $t=30$ 时的气相压力和密度的剖面,它们也是 $\alpha=1.0, d=100\mu\text{m}$ 条件下的结果。在此图中同时示出了随机取样法和二阶 GRP 方法两种数值方法得到的结果,以便于比

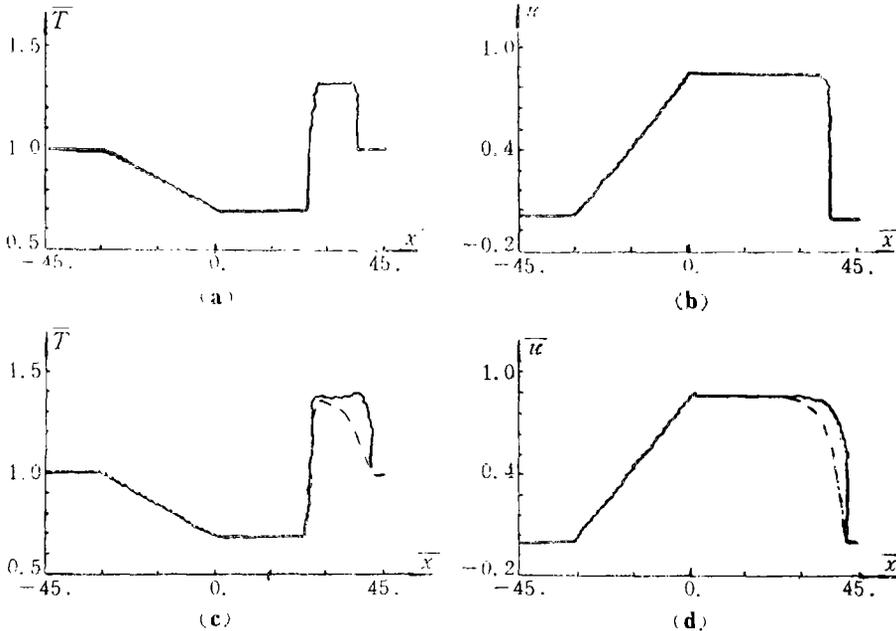


图4 粒径变化对激波松弛结构的影响($\alpha=1.0, t=30$): (a) $d=1\mu\text{m}$ 时的温度剖面; (b) $d=1\mu\text{m}$ 时的速度剖面; (c) $d=100\mu\text{m}$ 时的温度剖面; (d) $d=100\mu\text{m}$ 时的速度剖面(实线: 气相; 虚线: 固相)。

较。图5表明两种方法所得结果完全一致，它们都能给出带有尖锐间断阵面的两相激波松弛结构。由于没有引入人工粘性，它们对间断面都有很高的分辨率。但是相比之下，二阶GRP方法较RCM方法有三个优点：节省机时（对于本算例情况在45%以上），提高精度，而且没有数字噪音。不过GRP方法的不足之处是在激波阵面处需要有1~2个格点过渡；而RCM方法则可以保留突变性，但它的随机积累误差可能使阵面位置存数个格点的偏差。

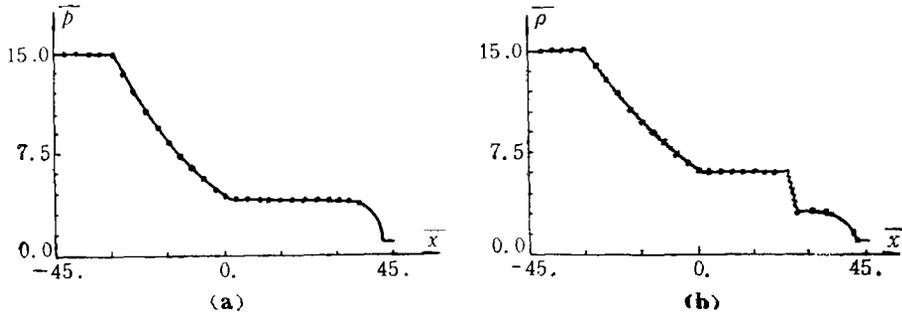


图5 $t=30$ 时气相压力和密度分布 ($a=1.0$, $d=100\mu$) (a)压力剖面; (b)密度剖面 (实线: GRP方法; 圆点: RCM方法)。

五、结 论

本文采用改进的随机取样法和二阶GRP有限差分法对带有激波的一维非定常两相流动进行了数值模拟。数值计算表明这两种方法所得的结果相符一致。它们均能预言两相激波的松弛结构，并具有高的分辨率。相比而言，GRP方法具有省机时、高精度和无噪音的优点，但在激波阵面处需要1~2个格点过渡。

参 考 文 献

- [1] Garrier, G. F., Shock wave in a dusty gas, *J. Fluid Mech.*, 4 (1958), 376.
- [2] Kriebel, A. R., Analysis of normal shock waves in particle laden gas, *Trans. Am. Soc. Mech. Engrs, J. Bas. Engng.*, 86 (1964), 655.
- [3] Rudinger, G., Some properties of shock relaxation in gas flows carrying small particles, *Physics Fluids*, 1 (1964), 658.
- [4] Otterman, B. and A. S. Levine, Analysis of gas-solid particle flows in shock tubes, *AIAA J.*, 12 (1974), 579.
- [5] Outa, E., K. Tajima and H. Morii, Experiments and analyses on shock waves propagating through a gas-particle mixture, *Bull. J. S. M. E.*, 19 (1976), 384.
- [6] Marconi, F., S. Rudman and V. Calia, Numerical study of one-dimensional unsteady particle-laden flows with shocks, *AIAA J.*, 19 (1981), 1294.
- [7] Miura, H. and I. I. Glass, On a dusty-gas shock tube, *Proc. R. Soc. Lond.*, A328 (1982), 373.
- [8] Sommerfeld, M., M. Selzer and H. Grönig, Shock wave reflections in dusty-gas, *Proc. 15th Int. Symp. on Shock Tubes and Shock Waves* (1985), 683.
- [9] Ben-Artzi, M. and J. Falcovitz, An upwind second-order scheme for compressible duct flows, *SIAM J., Sci. Stat. Comput.*, 7 (1986), 744.

Numerical Simulation of 1-D Unsteady Two-Phase Flows with Shocks

Wu Qing-song

(University of Science and Technology of China, Hefei)

Wang Bo-yi

(Institute of Mechanics, Academia Sinica, Beijing)

Abstract

In the present paper, random-choice method (RCM) and second order GRP difference method, which are high resolution methods used for pure gas flows with shocks are extended and employed to study the problem of one-dimensional unsteady two-phase flows. The two-phase shock wave and the flow field behind it in a dusty gas shock tube are calculated and the time-dependent change of the flow parameters for the gas and particle phase are obtained. The numerical results indicate that both the two methods can give the relaxation structure of the two-phase shocks with a sharp discontinuous front and that the GRP method has the advantages of less time-consuming and higher accuracy over the RCM method.

Key words two-phase flow, shock wave, relaxation structure, numerical simulation