应用数学和力学，第13卷第7期(1992年7月)
Applied Mathematics and Mechanics
应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

当绝热指数很大时气体的一种非定常平面平行运动的渐近解*

袁镒吾

(中南工业大学，1991年7月1日收到)

摘　要

文献[1]在气体的速度分量只与极角θ及时间t有关，而与极距r无关的条件下求解理想气体的非定常平面平行具势运动方程组(1.2)～(1.3)．文献[1]指出，在一般的情况下，不能得到解的显式表示式，只是对于二种特殊情况得到了显式解．

本文研究了文献[1]的同样问题．第一部分，对音速作了一些补充限制，从而得到了方程组的显式解．第二部分，假设气体的绝热指数$\gamma\gg1$，求得了方程组的一级近似解．

关键词　绝热指数　气体　非定常平面平行运动

一、问题的提法

设气体的速度分量只与极角θ及时间t有关，我们来求解理想气体的非定常平面平行具势运动方程组的解．

在极坐标系统中，理想气体的非定常平面平行具势流动的方程为[1]

$$\frac{\partial a}{\partial t}+N\frac{\partial a}{\partial r}+\frac{1}{r}\left[(\gamma-1)a\frac{\partial(Nr)}{\partial r}+T\frac{\partial a}{\partial\theta}+(\gamma-1)a\frac{\partial T}{\partial\theta}\right]=0 \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial N}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\frac{1}{2}(N^2+T^2)+\frac{a}{\gamma-1}\right]=0 \tag{1.2}$$

$$\frac{\partial N}{\partial\theta}-\frac{\partial}{\partial r}(rT)=0 \tag{1.3}$$

式中　N，T为相应的径向及切向速度分量，a为音速的平方，γ为气体的绝热指数，(r,θ)为极坐标．

设N及T均仅与θ及t有关，而与r无关．这样，好像对方程组(1.1)～(1.3)附加了微分约束．我们取

$$\begin{cases}N=f(\theta,t)\\ T=f'_\theta(\theta,t)\\ a=-(\gamma-1)[rf'_t-\psi(\theta,t)]\end{cases} \tag{1.4}$$

* 钱伟长推荐，1987年10月25日收到第一次来稿．

这里，$\psi(\theta,\ t)$及$f(\theta,\ t)$为任意函数．这时，式(1.2)及(1.3)自动满足．将式 (1.4) 代入式(1.1)得

$$-r(\gamma-1)(rf''_{tt}-\partial\psi/\partial t)-r\cdot f\cdot(\gamma-1)f'_t-(\gamma-1)^2(rf'_t-\psi)\cdot f$$
$$-(\gamma-1)f'_\theta(rf''_{t\theta}-\psi'_\theta)-(\gamma-1)^2(rf'_t-\psi)f''_{\theta\theta}=0 \tag{1.5}$$

由式(1.5)可得下列二个方程

$$-r(\gamma-1)(rf''_{tt}-\partial\psi/\partial t)-rf(\gamma-1)f'_t-(\gamma-1)^2\cdot rf'_tf$$
$$-(\gamma-1)f'_\theta rf''_{t\theta}-(\gamma-1)^2\cdot rf'_tf''_{\theta\theta}=0 \tag{1.6}$$

$$(\gamma-1)^2\cdot\psi ft(\gamma-1)f'_\theta\psi'_\theta+(\gamma-1)^2\psi f''_{\theta\theta}=0 \tag{1.7}$$

式(1.6)又可变为下列二个方程

$$\begin{cases} rf''_{tt}=0 \\ \partial\psi/\partial t-ff'_t-(\gamma-1)ff'_t-f'_\theta f''_{t\theta}-(\gamma-1)f'_tf''_{\theta\theta}=0 \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} f''_{tt}=0 & (1.8)\\ \dfrac{\partial\psi}{\partial t}-\gamma f\cdot f'_t-f'_\theta f''_{t\theta}-(\gamma-1)f'_tf''_{\theta\theta}=0 & (1.9)\end{cases}$$

由式(1.8)得

$$f=tf_1(\theta)+f_2(\theta) \tag{1.10}$$

式(1.7)及(1.9)便变为

$$[(\gamma-1)\psi tf_1t+tf'_{1\theta}\psi'_\theta+(\gamma-1)\psi tf''_{1\theta\theta}]$$
$$+[(\gamma-1)\psi f_2+f'_2\psi'_\theta+(\gamma-1)\psi f''_{2\theta\theta}]=0 \tag{1.11}$$

$$\left[\frac{\partial\psi}{\partial t}-\gamma tf_1^2-tf'^2_{1\theta}-(\gamma-1)f_1tf''_{1\theta\theta}\right]-\gamma f_2f_1-(\gamma-1)f_1f''_{2\theta\theta}-f'_{2\theta}f'_{1\theta}=0 \tag{1.12}$$

为了使计算简化，我们假设

$$\psi=\psi_1(\theta)t+\psi_2(\theta) \tag{1.13}$$

则式(1.12)变为

$$-t[\gamma f_1^2+f'^2_{1\theta}+(\gamma-1)f_1\cdot f''_{1\theta\theta}]+[\psi_1(\theta)-\gamma f_1f_2-(\gamma-1)f_1f''_{2\theta\theta}-f'_{2\theta}f'_{1\theta}]=0$$

由此式可得下列二个方程

$$\begin{cases} \gamma f_1^2+f'^2_{1\theta}+(\gamma-1)f_1f''_1=0 & (1.14)\\ \psi_1(\theta)-\gamma f_1\cdot f_2-(\gamma-1)f_1\cdot f''_2-f'_2f'_1=0 & (1.15)\end{cases}$$

将式(1.13)代入式(1.11)得

$$[(\gamma-1)tf_1(\psi_1t+\psi_2)+tf'_1(\psi'_1t+\psi'_2)+(\gamma-1)tf''_1(t\psi_1+\psi_2)]$$
$$+[(\gamma-1)(t\psi_1+\psi_2)f_2+f'_2(t\psi'_1+\psi'_2)+(\gamma-1)(t\psi_1+\psi_2)f''_2]=0$$

由此式可得下列二个方程

$$\begin{cases} (\gamma-1)tf_1(\psi_1t+\psi_2)+tf'_1(\psi'_1t+\psi'_2)+(\gamma-1)tf''_1(t\psi_1+\psi_2) & \\ \qquad +(\gamma-1)t\psi_1f_2+f'_2t\psi'_1+(\gamma-1)t\psi_1f''_2=0 & (1.16)\\ (\gamma-1)\psi_2f_2+f'_2\psi'_2+(\gamma-1)\psi_2f''_2=0 & (1.17)\end{cases}$$

由式(1.16)，又可得下列二个方程

$$(\gamma-1)f_1\psi_1+f'_1\psi'_1+(\gamma-1)f''_1\psi_1=0 \tag{1.18}$$

$$(\gamma-1)f_1\psi_2+f'_1\psi'_2+(\gamma-1)f''_1\psi_2+(\gamma-1)\psi_1f_2+f'_2\psi'_1+(\gamma-1)\psi_1f''_2=0 \tag{1.19}$$

于是，问题归结为求解方程(1.14)，(1.15)，(1.17)，(1.18)及(1.19)，未知函数是f_1，

f_2，ψ_1及ψ_2。

求这个问题的普遍解仍然有很大的困难．以下，我们对这个问题再加上一些限制，然后求其普遍解，或渐近解．这些限制是：

1． 设ψ只是θ的函数，即式（1.17）中，令$\psi_1=0$。这时，我们可求得所论问题的普遍解。

2． 设绝热指数$\gamma\gg 1$。这时，我们可求得所论问题的渐近解。

二、假设ψ只是θ的函数

设式(1.13)中

$$\psi_1=0 \tag{2.1}$$

此外，我们还假设式(1.10)中

$$f_2=0 \tag{2.2}$$

这样，我们便损失了二个任意函数，解的普遍性便有所降低。但求解过程却可大为简化。

由于有式(2.1)及(2.2)，这时式(1.15)，(1.17)及(1.18)均消失了，式(1.19)这时便变为

$$(\gamma-1)f_1\psi_2+f_1'\psi_2'+(\gamma-1)f_1''\psi_2=0 \tag{2.3}$$

于是，我们的出发方程便只剩下式(1.14)及(2.3)，未知函数为f_1及ψ_2。

将式(1.14)变为

$$f_1f_1''+f_1'^2/(\gamma-1)+f_1^2\gamma/(\gamma-1)=0 \tag{2.4}$$

令

$$f_1=u^{1/\left(\frac{1}{\gamma-1}+1\right)}=u^{(\gamma-1)/\gamma} \tag{2.5}$$

代入式(2.4)可得

$$u''+\left(\frac{\gamma}{\gamma-1}\right)^2\cdot u=0 \tag{2.6}$$

其解为

$$u=b\sin(\theta/\omega+\beta)$$

即

$$\begin{cases} f_1=b^\omega\sin^\omega\left(\dfrac{\theta}{\omega}+\beta\right) \\ \omega=\dfrac{\gamma-1}{\gamma} \end{cases} \tag{2.7}$$

式中 b及β均为积分常数。将式(2.7)代入式(2.3)得

$$\psi_2\left\{(\gamma-1)\sin^2\left(\frac{\theta}{\omega}+\beta\right)+(\gamma-1)\omega^{-2}\left[(\omega-1)\cos^2\left(\frac{\theta}{\omega}+\beta\right)-\sin^2\left(\frac{\theta}{\omega}+\beta\right)\right]\right\}$$

$$=-\frac{1}{\omega}\sin\left(\frac{\theta}{\omega}+\beta\right)\cos\left(\frac{\theta}{\omega}+\beta\right)\frac{d\psi_2}{d\theta}$$

积分得

$$\psi=\psi_2=c\cdot\sin^{(\gamma-1)(\omega-1)}\left(\frac{\theta}{\omega}+\beta\right)\cos^{(\gamma-1)(\omega-1)^2}\left(\frac{\theta}{\omega}+\beta\right) \tag{2.8}$$

将式(1.10)，(2.2)，(2.7)及(2.8)代入式(1.4)最后得

$$\begin{cases} N=tb^{\omega}\sin^{\omega}\left(\dfrac{\theta}{\omega}+\beta\right) \\ T=tb^{\omega}\sin^{\omega-1}\left(\dfrac{\theta}{\omega}+\beta\right)\cos\left(\dfrac{\theta}{\omega}+\beta\right) \\ a=-(\gamma-1)\left\{rb^{\omega}\sin^{\omega}\left(\dfrac{\theta}{\omega}+\beta\right)-c\cdot\sin^{(\gamma-1)(\omega-1)}\left(\dfrac{\theta}{\omega}+\beta\right)\right. \\ \qquad \left.\cdot\cos^{(\gamma-1)(\omega-1)^2}\left(\dfrac{\theta}{\omega}+\beta\right)\right\} \\ \omega=\dfrac{\gamma-1}{\gamma} \end{cases} \tag{2.9}$$

三、假设绝热指数γ≫1

现在假设

$$\gamma\gg1 \qquad 及 \qquad \gamma-1\approx\gamma$$

于是，

$$\frac{1}{\gamma-1}=O(\varepsilon)$$

式中 ε为微量，我们可用逐步逼近法求式(1.14)，(1.15)，(1.17)，(1.18)及(1.19)的各级近似解。

1. **零级近似解** 求零级近似解时，按照M.E.Швец法[2]，我们把式(1.14)，(1.15)，(1.17)，(1.18)及(1.19)分别变为

$$\begin{cases} f_1+d^2f_1/d\theta^2=0 \\ f_2+d^2f_2/d\theta^2=0 \\ f_2+d^2f_2/d\theta^2=0 \\ f_1+d^2f_1/d\theta^2=0 \\ f_1\psi_2+\dfrac{d^2f_1}{d\theta^2}\psi_2+\psi_1f_2+\psi_1\dfrac{d^2f_2}{d\theta^2}=0 \end{cases} \tag{3.1}$$

其中，前四个方程合并为二个，即

$$\begin{cases} f_1+\dfrac{d^2f_1}{d\theta^2}=0 \\ f_2+\dfrac{d^2f_2}{d\theta^2}=0 \end{cases} \tag{3.2}$$

式(3.1)的最后一个方程表明ψ_1及ψ_2均可为任意函数，为了求解方便，我们设

$$\begin{cases} \psi_1=b_1\sin(\theta+\beta_1) \\ \psi_2=c_1\theta+c_2 \end{cases} \tag{3.3}$$

由式(3.2)得

$$f_1=b_2\sin(\theta+\beta_1) \tag{3.4}$$

$$f_2=b_3\cos(\theta+\beta_1) \tag{3.5}$$

这里，为了以后计算的方便，式(3.3)～(3.5)中的初位相角取相同的β_1，即损失了两个积分常数。

于是，式(3.3)～(3.5)便构成了所论问题的零级近似解。

2. **一级近似解** 求一级近似解时，式(1.14)，(1.15)，(1.17)，(1.18)及(1.19)应改为

$$\gamma f_1^2+\left(\frac{df_1}{d\theta}\right)^2+(\gamma-1)f_1\frac{d^2f_1}{d\theta^2}=0 \tag{3.6}$$

$$\frac{d^2f_2}{d\theta^2}+f_2=\frac{1}{\gamma f_1}\left(\psi_1-\frac{df_1}{d\theta}\cdot\frac{df_2}{d\theta}\right) \tag{3.7}$$

$$\psi_2\frac{d^2f_2}{d\theta^2}+f_2\psi_2=-\frac{1}{\gamma}\frac{df_2}{d\theta}\cdot\frac{d\psi_2}{d\theta} \tag{3.8}$$

$$\psi_1\frac{d^2f_1}{d\theta^2}+\psi_1f_1=-\frac{1}{\gamma}\frac{df_1}{d\theta}\cdot\frac{d\psi_1}{d\theta} \tag{3.9}$$

$$\psi_2\left(f_1+\frac{d^2f_1}{d\theta^2}\right)+\psi_1\left(f_2+\frac{d^2f_2}{d\theta^2}\right)=-\frac{1}{\gamma}\left(\frac{df_1}{d\theta}\cdot\frac{d\psi_2}{d\theta}+\frac{df_2}{d\theta}\cdot\frac{d\psi_1}{d\theta}\right) \tag{3.10}$$

其中 式(3.6)保持为式(1.14)原来形式，这是由于式(1.14)易于求得精确解，而不必求其近似解。求式(3.7)～(3.10)的一级近似解时，诸方程的右端均用相应的零级近似解代入。

我们只需四个方程，最后一个方程(3.10)作校核用。

式(3.6)可变为式(2.4)，其解上段已求得为

$$f_1=b^{\omega}\sin^{\omega}(\theta/\omega+\beta) \tag{2.7}$$

现求解式(3.7)。将式(3.3)，(3.4)及(3.5)代入式(3.7)的右端，于是得

$$\frac{d^2f_2}{d\theta^2}+f_2=\frac{1}{b_2\sin(\theta+\beta_1)}\cdot\frac{1}{\gamma}[b_1\sin(\theta+\beta_1)+b_2\cdot b_3\cos(\theta+\beta_1)\sin(\theta+\beta_1)]$$

$$=\frac{1}{\gamma}\cdot\frac{b_1}{b_2}-\frac{b_3}{\gamma}\cos(\theta+\beta_1) \tag{3.11}$$

式(3.11)的特解为

$$f_2=\frac{1}{\gamma}\cdot\frac{b_1}{b_2}-\frac{b_3}{2\gamma}\theta\sin(\theta+\beta_1) \tag{3.12}$$

通解为

$$f_2=b\sin(\theta+\beta)+\frac{1}{\gamma}\cdot\frac{b_1}{b_2}-(b_3\theta/2\gamma)\sin(\theta+\beta_1) \tag{3.13}$$

现求解式(3.9)。为此，需将式(2.7)代入式(3.9)的左端，由式(2.7)得

$$f_1+f_1''=b^{\omega}\cdot\frac{\omega-1}{\omega}\cdot\sin^{\omega-2}\left(\frac{\theta}{\omega}+\beta\right)\cos^2\left(\frac{\theta}{\omega}+\beta\right)+b^{\omega}\left(1-\frac{1}{\omega}\right)\sin^{\omega}\left(\frac{\theta}{\omega}+\beta\right)$$

$$=b^{\omega}\left(\frac{\omega-1}{\omega}\right)\sin^{\omega-2}\left(\frac{\theta}{\omega}+\beta\right) \tag{3.14}$$

式(3.9)的右端则需按式(3.3)及(3.4)计算，即

$$-\frac{1}{\gamma}\cdot\frac{df_1}{d\theta}\cdot\frac{d\psi_1}{d\theta}=-\frac{1}{\gamma}\cdot b_1b_2\cos^2(\theta+\beta_1) \tag{3.15}$$

将式(3.14)代入式(3.9)的左端；式(3.15)代入式(3.9)的右端，最后得

$$\psi_1=\left[b^{\omega}\left(\frac{\omega-1}{\omega}\right)\sin^{\omega-2}\left(\frac{\theta}{\omega}+\beta\right)\right]^{-1}\cdot\frac{1}{\gamma}\cdot b_1\cdot b_2\cos^2(\theta+\beta_1) \tag{3.16}$$

由式(3.3)及(3.5)得

$$-\frac{1}{\gamma}\cdot\frac{df_2}{d\theta}\cdot\frac{d\psi_2}{d\theta}=\frac{1}{\gamma}\cdot b_3\cdot c_1\sin(\theta+\beta_1) \tag{3.17}$$

将式(3.17)代入式(3.8)的右端；式(3.11)代入式(3.8)的左端得

$$\psi_2=\frac{b_3c_1b_2\sin(\theta+\beta_1)}{b_1-b_2b_3\cos(\theta+\beta_1)} \tag{3.18}$$

将式(2.7)，(3.12)，(3.16)及(3.18)代入式(1.4)最后得

$$N=tf_1+f_2=t\cdot b^{\omega}\sin^{\omega}\left(\frac{\theta}{\omega}+\beta\right)+b\sin(\theta+\beta)+\frac{1}{\gamma}\cdot\frac{b_1}{b_2}-\frac{b_3}{2\gamma}\theta\sin(\theta+\beta_1) \tag{3.19}$$

$$T=\frac{df}{d\theta}=t\cdot b^{\omega}\sin^{\omega-1}\left(\frac{\theta}{\omega}+\beta\right)\cos\left(\frac{\theta}{\omega}+\beta\right)+b\cos(\theta+\beta)$$

$$-\frac{b_3}{2\gamma}\sin(\theta+\beta_1)-\frac{b^3}{2\gamma}\theta\cos(\theta+\beta) \tag{3.20}$$

$$a=-(\gamma-1)\left\{r\cdot b^{\omega}\sin^{\omega}\left(\frac{\theta}{\omega}+\beta\right)+\frac{b_1b_2\cos^2(\theta+\beta_1)t}{\gamma b^{\omega}\left(\frac{\omega-1}{\omega}\right)\sin^{\omega-2}\left(\frac{\theta}{\omega}+\beta\right)}\right.$$

$$\left.-\frac{c_1b_2b_3\sin(\theta+\beta_1)}{b_1-b_2b_3\cos(\theta+\beta_1)}\right\} \tag{3.21}$$

$$\omega=\frac{\gamma-1}{\gamma} \tag{3.22}$$

现将式(3.19)～(3.21)和文献[1]中的$c_b=0$时的相应公式作一比较：

式(3.19)中令$b_1=b_3=0$则得

$$N=tb^{(\gamma-1)/\gamma}\sin^{(\gamma-1)/\gamma}\left(\frac{\gamma}{\gamma-1}\theta+\beta\right)+b\sin(\theta+\beta) \tag{3.23}$$

如果令文献[1]中的$c_1=0$，则文献[1]中的相应公式为

$$N=t\cdot c_7\sin^{(\gamma-1)/\gamma}\left(\frac{\gamma}{\gamma-1}\theta+c''\right)+c_2'\cdot c_7\sin^{(\gamma-1)/\gamma}\left(\frac{\gamma}{\gamma-1}\theta+c''\right) \tag{3.24}$$

这里，为了避免和本文的符号相混淆，我们把文献[1]中的c改为c''；c_2改为c_2'。注意到$\gamma\gg1$，$(\gamma-1)/\gamma\approx1$，可见，式(3.23)和(3.24)是一致的。

至于T的公式，只须在式(3.20)中令$b_3=0$，文献[1]中，令其中的$c_1=0$，并取$(\gamma-1)/\gamma\approx1$，则本文的式(3.20)和文献[1]的相应公式是一致的。

注 1 文献[1]中关于T的公式有笔误.

在式(3.21)中，令$b_2=0$，则式(3.21)变为

$$a=(1-\gamma)\left[rb^{(\gamma-1)/\gamma}\times\sin^{(\gamma-1)/\gamma}\left(\frac{\gamma}{\gamma-1}\theta+\beta\right)\right] \tag{3.25}$$

在文献[1]中，令其中的$c_3=c_4=c_5=0$，得到计算a的相应公式和式(3.25)一致。

注2 文献[1]中计算a的公式有笔误。

注意到式(3.23)和(3.20)中所含的积分常数的个数稍多，故本文求得的一级近似解，比文献[1]的显式解更加普遍。

按照本文的方法，原则上可以求得任一级近似解。求任一级近似解的方法和求一级近似解的方法基本相同，即由式(3.6)已经求得了f_1的精确解。只需由式(3.7)～(3.9)求f_2，ψ_2及ψ_1的第n段近似解。求解式(3.7)～(3.9)时，其右端均用其前一级（即$n-1$级）近似解代入。所以求解式(3.8)及(3.9)不会遇到任何困难，只是求解式(3.7)时，可能会遇到一些困难。

参 考 文 献

[1] Дворников В. А., *Изв. АН. СССР, Механика Жидкости и Газа*, (6) (1979), 156—157.

[2] 袁镒吾，平行平板间径向气汽的 Navier-Stokes 方程新的近似解，上海力学，(2) (1985), 1—9.

The Asymptotic Solution of the Unsteady Planar Parallel Gas Flow for the Case that the Adiabatic Index Number γ is Big

Yuan Yi-wu

(Central-South University of Technology, Changsha)

Abstract

In ref. [1], under the condition that the components of velocity are only the functions of time and polar angle, Dvornikov solved eqs. (1.1)～(1.3) of the ideal gas unsteady planar parallel potential flow. It was pointed out in ref. [1] that in general case, the evident solutions could not be obtained. Only for two especial cases, the evident solutions were obtained.

In this paper, the author studies the same problem as that in ref. [1]. In the first section we obtain the evident solution of equations (1.1)～(1.3) under the condition that the sonic velocity is restricted by some complemental conditions. In the second section, we obtain the first-order approximate solutions of the fundamental equation for the case that $\gamma\gg1$.

Key words adiabatic index number, gas, unsteady planar parallel flow