

双参数地基上板弯曲问题的边界积分方程*

李正良 邓安福

(重庆建筑工程学院, 1991年6月27日收到)

摘 要

本文应用广义函数的Fourier积分变换导出了双参数地基上板弯曲问题的基本解, 并将基本解展成一致收敛的级数形式。在此基础上, 应用广义Rayleigh-Green公式建立了适用于任意形状、任意边界条件情形的两个边界积分方程, 为边界元法在这一问题中的应用提供了理论基础。

关键词 双参数地基 基本解 Hankle函数 边界积分方程

一、引 言

对弹性地基板的分析研究可追溯到上个世纪, 一百多年来, 经Timosheko, Woinshy-Kriger, Reissner, Vlasov等著名学者的努力, 在解析方法的研究中取得了卓越的成果, 但由于解析方法的局限性, 这些成果只能解决工程中的少数问题。近二十年来发展起来的边界元法在各个领域中得到了广泛应用。对于Winkle地基上的板弯曲问题, 文献[2,3]采用Hertz或Wyman导出的基本解^[1], 将边界元法应用于弹性地基板分析, 而对于更复杂的一类地基——双参数地基, 由Vlasov导出的基本解^[6]未用初等函数表达出来, 这就使得边界元法的应用十分困难。文献[5]对Fourier-Bessel积分形式的基本解作了数值积分处理, 但是, 其准确度是难以得到保证的, 同时, 其边界积分方程建立过程的理论也是不充分的。

本文应用广义函数的Fourier积分变换, 得到了该问题的用复变量Hankle函数表示的基本解, 并将基本解用实变量的幂级数展开, 证明了该级数的一致收敛性。在此基础上, 应用广义Rayleigh-Green公式建立了双参数地基上板弯曲问题的适用于任意形状, 任意边界条件情形的两个边界积分方程。为边界元法在这一方面的应用提供了理论基础。

二、控制微分方程

双参数地基上薄板的控制微分方程可表为:

* 薛大为推荐。

$$D\nabla^2\nabla^2w - G_p\nabla^2w + kw = q$$

$$\text{或 } Lw = q \quad (2.1)$$

$$L(\dots) = D\nabla^2\nabla^2(\dots) - G_p\nabla^2(\dots) + K(\dots)$$

其中 ∇^2 为 Laplace 算子, D 为板的弯曲刚度, q 为荷载, G_p, K 为表征土模型的两个弹性常数, 对于不同的模型, G_p, K 的取值亦不同, 工程中一般采用的有 Filonenko-Borodich 模型、Pasternak 模型、Vlazov 模型及 Reissner 模型.

边界条件可表为:

$$\text{固支边: } w(s) - w_*(s) = 0, \theta(s) - \theta_*(s) = 0$$

$$\text{简支边: } w(s) - w_*(s) = 0,$$

$$M(s) - M_*(s) = 0$$

$$\text{自由边: } V(s) - V_*(s) = 0,$$

$$M(s) - M_*(s) = 0$$

其中 w, θ, M, V 分别是挠度、转角、弯矩和折算剪力, s 为边界曲线的弧坐标 (图 1), w_*, θ_*, M_*, V_* 为边界给定值, 如果以 n 代表边界曲线的法向, t 为切向, 而 R 为边界线的曲率半径 (以凸边界为正) 则在边界上诸物理量可表示为:

$$\theta(w) = \frac{\partial w}{\partial n}$$

$$M(w) = -D \left[\nabla^2 - (1-\nu) \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] w$$

$$T(w) = -D(1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial n \partial t}$$

$$V(w) = Q + \frac{\partial}{\partial s} T = -D \left[\frac{\partial}{\partial n} \nabla^2 + (1-\nu) \frac{\partial}{\partial s} \frac{\partial^2}{\partial n \partial t} \right] w$$

$$(2.2)$$

而边界算子

$$\frac{\partial}{\partial s} = -\sin\beta \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos\beta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} - \left(\frac{\cos\beta}{r} - \frac{1}{R} \right) \frac{\partial}{\partial \beta} \quad (2.3)$$

其中, $\beta = \langle n, r \rangle, \theta = \langle r, x' \rangle$ (见图 1)

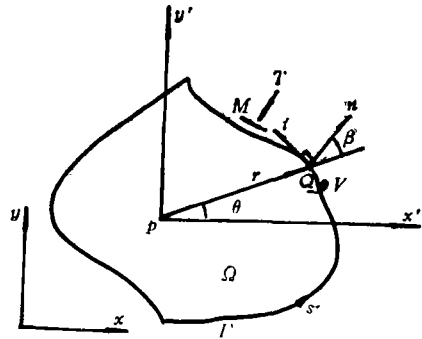


图1 板的区域 Ω 及其边界 Γ , x 轴平行于 x' 轴

三、基本解

1. 基本解的导出

考虑在一无限大板的点 $P(\xi, \eta)$ 处作用一单位集中力, 则基本解 w^* 应满足方程:

$$Lw^* = \delta(x - \xi, y - \eta) \quad (3.1)$$

其中 $\delta(x - \xi, y - \eta)$ 为 Dirac 函数.

对方程 (3.1) 施行广义函数的 Fourier 积分变换, 可得

$$w^* = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\lambda_0} \exp(i[\omega_1(x - \xi) + \omega_2(y - \eta)]) d\omega_1 d\omega_2$$

$$(3.2)$$

其中 $\lambda_\omega = D(\omega_1^2 + \omega_2^2)^2 + G_p(\omega_1^2 + \omega_2^2) + K$ (3.3)

$$\text{令: } \left. \begin{aligned} x - \xi &= r \cos \phi \\ y - \eta &= r \sin \phi \end{aligned} \right\} \left. \begin{aligned} \omega_1 &= \omega \cos \alpha \\ \omega_2 &= \omega \sin \alpha \end{aligned} \right\}$$

则: $r^2 = (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2, \omega^2 = \omega_1^2 + \omega_2^2$
 $d\omega_1 d\omega_2 = \omega d\omega d\alpha, i[\omega_1(x - \xi) + \omega_2(y - \eta)] = i\omega \cdot r$

则式(3.2)可表为:

$$\begin{aligned} w^* &= \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{+\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\lambda_\omega} \exp[i\omega \cdot r] d\omega d\alpha \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{+\infty} \frac{1}{\lambda_\omega} \omega d\omega \cdot \int_{-\pi}^{\pi} \exp[i\omega \cdot r] d\alpha \end{aligned}$$

引进Bessel函数的表达式

$$J_0(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \exp[ix \cos \beta] d\beta$$

并注意旋转极轴, 即取 r 为新的极轴(由于 w^* 仅是 r 的函数, 旋转极轴不会影响 w^* 的值), 这样可得到:

$$\begin{aligned} w^* &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} \frac{J_0(\omega r)}{\lambda_\omega} \omega d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi D} \int_0^{+\infty} \frac{J_0(\omega r)}{\omega^4 + G_p \omega^2 / D + K} \omega d\omega \end{aligned} \quad (3.4)$$

若设 a_1^2, a_2^2 为多项式 $\omega^4 + G_p \omega^2 / D + K / D = 0$ 的两个根, 对于一般的软土地基, 有 $\Delta = (\frac{G_p}{D})^2 - 4\frac{K}{D} < 0$, 此时, a_1^2, a_2^2 必为复数, 即:

$$\left. \begin{aligned} a_1^2 \\ a_2^2 \end{aligned} \right\} = -\frac{G_p}{2D} \pm \frac{1}{2} \sqrt{4\left(\frac{K}{D}\right) - \left(\frac{G_p}{D}\right)^2} i$$

这样, 式(3.4)又可写为:

$$w^* = \frac{1}{2\pi D} \frac{1}{a_1^2 - a_2^2} \left[\int_0^{+\infty} \frac{J_0(\omega r)}{\omega^2 - a_1^2} \omega d\omega - \int_0^{+\infty} \frac{J_0(\omega r)}{\omega^2 - a_2^2} \omega d\omega \right]$$

即

$$w^* = \frac{1}{4D \sqrt{4(K/D) - (G_p/D)^2}} [H_0^{(1)}(a_1 r) - H_0^{(2)}(a_2 r)] \quad (3.5)$$

上式即为复变量Hankle函数表示的基本解, 在上式的推导中应用了一个积分公式:

$$\int_0^{+\infty} \frac{J_0(bx)}{x^2 - a^2} x dx = -\frac{\pi i}{2} H_0^{(1)}(ab)$$

其中, $H_0^{(1)}$ 表示第一种零阶Hankle函数.

2. Hankle函数的级数表达式

由特殊函数论^[8]可知:

$$H_0^{(1)}(z) = J_0(z) + iY_0(z) \quad (3.6)$$

其中, $Y_0(z)$ 为零阶Neumann函数, 而 $J_0(z), Y_0(z)$ 可用无穷级数表示如下:

$$J_0(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k!)^2} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k} \quad (3.7)$$

$$Y_0(z) = \frac{2}{\pi} J_0(z) \ln \frac{z}{2} - \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k!)^2} \psi(k+1) \left(\frac{z}{2}\right)^{2k} \quad (3.8)$$

式中 $\psi(k+1) = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{k} - C_E$, 而 $C_E = 0.57721\dots$, 为 Euler 常数.

因此,

$$\begin{aligned} H_0^{(1)}(z) &= \left(1 + \frac{2i}{\pi} \ln z\right) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k!)^2} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k} \\ &\quad - \frac{2i}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k!)^2} \psi(k+1) \cdot \left(\frac{z}{2}\right)^{2k} \end{aligned} \quad (3.9)$$

对于任一复数 z , 令 $z = \rho \exp[i\beta]$, ρ 为 z 的模, β 为 z 之幅角, 由于

$$\begin{aligned} \ln \frac{z}{2} &= \ln \frac{\rho}{2} + i\beta \\ \left(\frac{z}{2}\right)^{2k} &= \left(\frac{\rho}{2}\right)^{2k} \exp[2kc\beta i] = \left(\frac{\rho}{2}\right)^{2k} [\cos 2k\beta + i \sin 2k\beta] \end{aligned}$$

将以上两式代入式 (3.9), 即得:

$$H_0^{(1)}(z) = \operatorname{Re} H_0^{(1)}(z) + i \operatorname{Im} H_0^{(1)}(z) \quad (3.10)$$

其中 $\operatorname{Re} H_0^{(1)}(z) = \left(1 - \frac{2}{\pi} \beta\right) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k!)^2} \left(\frac{\rho}{2}\right)^{2k} \cos 2k\beta$

$$\begin{aligned} &- \frac{2}{\pi} \ln \frac{\rho}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k!)^2} \left(\frac{\rho}{2}\right)^{2k} \sin 2k\beta + \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k!)^2} \psi(k+1) \left(\frac{\rho}{2}\right)^{2k} \sin 2k\beta \end{aligned} \quad (3.11)$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} H_0^{(1)}(z) &= \left(1 - \frac{2}{\pi} \beta\right) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k!)^2} \left(\frac{\rho}{2}\right)^{2k} \sin 2k\beta \\ &\quad + \frac{2}{\pi} \ln \frac{\rho}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k!)^2} \left(\frac{\rho}{2}\right)^{2k} \cos 2k\beta - \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k!)^2} \psi(k+1) \left(\frac{\rho}{2}\right)^{2k} \cos 2k\beta \end{aligned} \quad (3.12)$$

Re, Im 分别表示 $H_0^{(1)}$ 的实部和虚部.

3. 基本解的级数表达式

$$\text{设 } a_1^2 = -\frac{G_p}{2D} + \frac{1}{2} \sqrt{4\left(\frac{k}{D}\right) - \left(\frac{G_p}{D}\right)^2} i = (\rho_1 \exp[i\beta_1])^2 \quad (3.13)$$

$$a_2^2 = -\frac{G_p}{2D} - \frac{1}{2} \sqrt{4\left(\frac{K}{D}\right) - \left(\frac{G_p}{D}\right)^2} i = (\rho_2 \exp[i\beta_2])^2 \quad (3.14)$$

由以上两式进行比较可得下列结果:

$$\rho_1 = \rho_2 = \sqrt{K/D}, \quad \beta_1 + \beta_2 = \pi$$

$$\sin 2\beta_1 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{D}{K}} \cdot \sqrt{4\left(\frac{K}{D}\right) - \left(\frac{G_p}{D}\right)^2}, \quad \cos 2\beta_1 = -\sqrt{\frac{G_p}{4DK}} \quad (3.15)$$

以上的表达式中, ρ_1, ρ_2 分别表示 a_1, a_2 的模, β_1, β_2 表示 a_1, a_2 的幅角. 将 $H_0^{(1)}(z)$ 的幂级数表达式(3.10), 代入基本解 w^* 的表达式(3.5), 并注意关系式(3.15), 可以将基本解 w^* 中的虚部消去, 并由此而得到:

$$w^* = \frac{1}{4D\sqrt{4(K/D) - (G_p/D)^2}} \left[\frac{2}{\pi} (\beta_2 - \beta_1) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k_1)^2} \left(\frac{p_1 r}{2}\right)^{2k} \cos 2k\beta_1 - \frac{1}{\pi} \ln \frac{p_1 r}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k_1)^2} \left(\frac{p_1 r}{2}\right)^{2k} \sin 2k\beta_1 + \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k_1)^2} \psi(k+1) \left(\frac{p_1 r}{2}\right)^{2k} \sin 2k\beta_1 \right] \quad (3.16)$$

上式即为双参数地基上板弯曲问题的基本解的级数表达式. 可以验证, 在上式中, 若取 $G_p = 0$, 则:

$$\beta_1 = \frac{\pi}{4}, \quad \beta_2 = \frac{3}{4}\pi, \quad \text{从而}$$

$$w^* = -\text{Kei}(p_1 r) / (2\pi D \rho_1^2) \quad (3.17)$$

上式即为 Winkle 地基上板弯曲问题的基本解, 它与 Wyman 导出的基本解^[1] 完全一致, 其中, $\text{Kei}(p_1 r)$ 为 Kelvin 函数. 同时表明了基本解表达式(3.16)的可靠性.

应用幂级数的柯西-阿达玛判别准则^[9] 可知, 式(3.16)中的每一项对任意的 $0 \leq r < +\infty$ 均是一致收敛的.

需要说明的是, 保留级数表达式中的 $\ln(p_1 r/2)$ 项是必要的, 而不再将它展成 r 的幂级数, 因为由它可判断出 $r=0$ 为 w^* 的一个奇异点, 在边界元法中的应用是常见的.

四、积分方程解答

方程(2.1)可以化为等价的积分方程形式, 考虑积分项:

$$\begin{aligned} & \iint_{\Omega} (w^* Lw - w Lw^*) d\Omega \\ &= \iint_{\Omega} (Dw^* \nabla^2 \nabla^2 w - G_p w^* \nabla^2 w + Kw^* w \\ & \quad - Dw \nabla^2 \nabla^2 w^* + G_p w \nabla^2 w^* - Kw \cdot w^*) d\Omega \end{aligned}$$

即
$$\iint_{\Omega} (w^* Lw - w Lw^*) d\Omega$$

$$= D \iint_{\Omega} (w^* \nabla^2 \nabla^2 w - w \nabla^2 \nabla^2 w^*) d\Omega - G_p \iint_{\Omega} (w^* \nabla^2 w - w \nabla^2 w^*) d\Omega \quad (4.1)$$

对于任意的两个具有四阶连续导数的函数 w, v , 广义 Rayleigh-Green 公式是:

$$\begin{aligned} & \iint_{\Omega} (v \nabla^2 \nabla^2 w - w \nabla^2 \nabla^2 v) d\Omega \\ &= \int_{\Gamma} \left(v \frac{\partial}{\partial n} \nabla^2 w - w \frac{\partial}{\partial n} \nabla^2 v - \frac{\partial v}{\partial n} \nabla^2 w + \frac{\partial w}{\partial n} \nabla^2 v \right) d\Gamma \end{aligned}$$

而Green公式是:

$$\iint_{\Omega} (v \nabla^2 w - w \nabla^2 v) d\Omega = \int_{\Gamma} \left(v \frac{\partial w}{\partial n} - w \frac{\partial v}{\partial n} \right) d\Gamma$$

其中, Γ 是区域 Ω 的边界.

将以上公式应用于方程(4.1), 再考虑到式(2.1)和式(3.1), 即得到双参数地基上板弯曲问题的积分方程解答:

$$\begin{aligned} w(p) = & \iint_{\Omega} w^* \cdot q d\Omega - D \int_{\Gamma} \left(w^* \frac{\partial}{\partial n} \nabla^2 w - w \frac{\partial}{\partial n} \nabla^2 w^* - \frac{\partial w^*}{\partial n} \nabla^2 w \right. \\ & \left. + \frac{\partial w}{\partial n} \nabla^2 w^* \right) d\Gamma + G, \int_{\Gamma} \left(w^* \frac{\partial w}{\partial n} - w \frac{\partial w^*}{\partial n} \right) d\Gamma \end{aligned} \quad (4.2)$$

这里, $p \in \Omega$.

应用公式(2.2), 可以证明:

$$\begin{aligned} & D \int_{\Gamma} \left(w^* \frac{\partial}{\partial n} \nabla^2 w - w \frac{\partial}{\partial n} \nabla^2 w^* - \frac{\partial w^*}{\partial n} \nabla^2 w + \frac{\partial w}{\partial n} \nabla^2 w^* \right) d\Gamma \\ &= \int_{\Gamma} w^* V(w) d\Gamma - \int_{\Gamma} w V(w^*) d\Gamma - \int_{\Gamma} \frac{\partial w^*}{\partial n} M(w) d\Gamma + \int_{\Gamma} \frac{\partial w}{\partial n} M(w^*) d\Gamma \end{aligned} \quad (4.3)$$

从而, 双参数地基上板弯曲问题的积分方程解答可表为:

$$\begin{aligned} w(p) = & \iint_{\Omega} q \cdot w^* d\Omega + \int_{\Gamma} w^* V(w) d\Gamma - \int_{\Gamma} w \left[V(w^*) + G, \frac{\partial w^*}{\partial n} \right] d\Gamma \\ & - \int_{\Gamma} \frac{\partial w^*}{\partial n} M(w) d\Gamma + \int_{\Gamma} \frac{\partial w}{\partial n} [M(w^*) + G, w^*] d\Gamma \end{aligned} \quad (4.4)$$

上式中, $\iint_{\Omega} q w^* d\Omega$ 为积积分项, 其余各项的核函数见附录.

五、边界积分方程

在导出边界积分方程以前, 需要对基本解的特性($r_1 \rightarrow 0$ 时)作进一步考察. 记:

$$\begin{aligned} u_0(r) = & \frac{2}{\pi} (\beta_2 - \beta_1) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k_1)^2} \left(\frac{\rho_1 r}{2} \right)^{2k} \cos 2k\beta_1 \\ & - \frac{4}{\pi} \ln \frac{\rho_1 r}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k_1)^2} \left(\frac{\rho_1 r}{2} \right)^{2k} \sin 2k\beta_1 \\ & + \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k_1)^2} \psi(k+1) \left(\frac{\rho_1 r}{2} \right)^{2k} \sin 2k\beta_1 \end{aligned} \quad (5.1)$$

$$A=1/(4D\sqrt{4(K/D)-(G_r/D)^2}) \tag{5.2}$$

则 $w^*=A \cdot u_0(r)$ (5.3)

显然, 当 $r \rightarrow 0$ 时, $u_0(r)$ 有如下的渐近性质:

$$\lim_{r \rightarrow 0} u_0(r) = \frac{2}{\pi} (\beta_2 - \beta_1)$$

$$u_0'(r) \sim \frac{4}{-\pi} (\beta_2 - \beta_1) \left(\frac{\rho_1}{2}\right)^2 \cdot r \cos 2\beta_1 + \frac{4}{\pi} \left(\frac{\rho_1}{2}\right)^2 r \left(2 \ln \frac{\rho_1 r}{2} + 1\right) \sin 2\beta_1 - \frac{8}{\pi} \psi(2) \left(\frac{\rho_1}{2}\right)^2 r \sin 2\beta_1$$

$$u_0''(r) \sim \frac{4}{-\pi} (\beta_2 - \beta_1) \left(\frac{\rho_1}{2}\right)^2 \cos 2\beta_1 + \frac{4}{\pi} \left(\frac{\rho_1}{2}\right)^2 \left(2 \ln \frac{\rho_1 r}{2} + 3\right) \sin 2\beta_1 - \frac{8}{\pi} \psi(2) \left(\frac{\rho_1}{2}\right)^2 \sin 2\beta_1$$

$$u_0'''(r) \sim \frac{8}{\pi} \sin 2\beta_1 \left(\frac{\rho_1}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{r}$$

$$u_0^{(4)}(r) \sim -\frac{8}{\pi} \sin 2\beta_1 \left(\frac{\rho_1}{2}\right)^2 \frac{1}{r^2}$$

.....

对于积分方程 (4.4), 令 $p \rightarrow P \in \Gamma$, 即可得到边界积分方程. 但是当 $p \rightarrow P$ 时, 式 (4.4) 中除域积分外的各项均出现奇异性, 需对它们的存在性和连续性一一加以论证. 即考察下列积分:

$$I_1 = \int_{\Gamma} w^* V(w) d\Gamma = A \int_{\Gamma} u_0(r) V(w) d\Gamma$$

$$I_2 = \int_{\Gamma} \frac{\partial w^*}{\partial n} M(w) d\Gamma = A \int_{\Gamma} u_0'(r) M(w) \cos \beta d\Gamma$$

$$I_3 = \int_{\Gamma} \frac{\partial w}{\partial n} [M(w^*) + G_r w^*] d\Gamma = A \int_{\Gamma} \frac{\partial w}{\partial n} \left\{ -D[(\cos^2 \beta + \nu \sin^2 \beta) u_0'' + (\sin^2 \beta + \nu \cos^2 \beta) \frac{u_0}{r}] + G_r u_0 \right\} d\Gamma$$

$$I_4 = A \int_{\Gamma} w \left[V(w^*) + G_r \frac{\partial w^*}{\partial n} \right] d\Gamma = A \int_{\Gamma} w \left\{ -D \cos \beta \left(u_0'' + \frac{1}{r} u_0' - \frac{1}{r^2} u_0 \right) - \frac{D(1-\nu)}{2} \left[\sin \beta \sin 2\beta \times \left(u_0'' - \frac{1}{r} u_0' + \frac{1}{r^2} u_0 \right) + 2 \cos 2\beta \left(\frac{\cos \beta}{r} - \frac{1}{R} \right) \left(u_0'' - \frac{1}{r} u_0' \right) \right] + G_r u_0' \right\} d\Gamma$$

在点 $P \in \Gamma$ 处, 作一半径为 ε 的小圆弧 Γ_ε , 则在 Γ_ε 上, $\cos \beta = 1$, $\sin \beta = 0$ (r, n 同方向) 以及 $r = \varepsilon$, 对上述任一积分, 由于积分等式

$$\int_{\Gamma} (\dots) d\Gamma = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \Gamma_{\varepsilon}} (\dots) d\Gamma + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_{\varepsilon}} (\dots) d\Gamma$$

中的右边第一项已经不包含奇异性, 因此, 只需对右边第二项加以考察

利用 $u_0(r)$ 函数的渐近性质可以证明: $(V(w), M(w), \partial w / \partial n, w$ 均为有限值)

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_{\varepsilon}} u_0(r) V(w) d\Gamma = 0$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_{\varepsilon}} u_0'(r) M(w) \cos \beta d\Gamma = 0$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_{\varepsilon}} \left\{ \frac{\partial w}{\partial n} \left[-D \left[(\cos^2 \beta + \nu \sin^2 \beta) u_0''(r) + (\sin^2 \beta + \nu \cos^2 \beta) \frac{u_0}{r} \right] + G_0 u_0(r) \right] \right\} d\Gamma = 0$$

因此, 积分 I_1, I_2, I_3 是存在且连续的, 可在正常意义下进行积分.

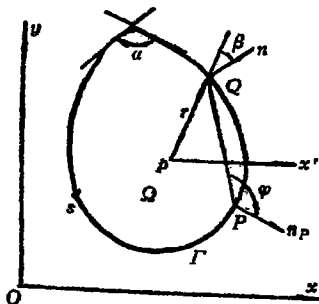


图2 点 P 到 Q 的移动

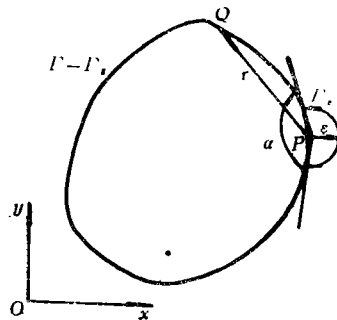


图3 在边界上的 P 点作一小圆弧, 以消除积分奇异性

而对于积分项

$$I_4^* = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} A \cdot \int_{\Gamma_{\varepsilon}} w \left\{ -D \cos \beta \left(u_0''' + \frac{1}{r} u_0'' - \frac{1}{r^2} u_0' \right) - \frac{D(1-\nu)}{2} \cdot \left[\sin \beta \sin 2\beta \right. \right. \\ \left. \left. \times \left(u_0''' - \frac{1}{r} u_0'' + \frac{1}{r^2} u_0' \right) + 2 \cos 2\beta \left(\frac{\cos \beta}{r} - \frac{1}{R} \right) \left(u_0'' - \frac{1}{r} u_0' \right) \right] + G_p u_0' \cos \beta \right\} d\Gamma$$

考虑到 $\cos \beta = 1, \sin \beta = 0, R = r = \varepsilon$, 并将 u_0', u_0'', u_0''' 的渐近表达式代入上式, 得

$$I_4^* = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} A \cdot \int_{\Gamma_{\varepsilon}} w \left\{ -D \left(u_0''' + \frac{1}{r} u_0'' - \frac{1}{r^2} u_0' \right) + G_p u_0' \right\} d\Gamma \\ = -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} A \cdot \int_{\Gamma_{\varepsilon}} D w \left[\frac{8}{\pi} \sin 2\beta_1 \cdot \left(\frac{\rho_1}{2} \right)^2 \cdot \frac{1}{r} + \frac{4}{\pi} \sin 2\beta_1 \left(\frac{\rho_1}{2} \right)^2 \frac{2}{r} \right] d\Gamma \\ + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} A \cdot \int_{\Gamma_{\varepsilon}} G_p u_0' d\Gamma$$

由于 $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} A \int_{\Gamma_{\varepsilon}} G_p \cdot u_0' d\Gamma = 0$, 故,

$$I_4^* = -AD \frac{16}{\pi} \sin 2\beta_1 \left(\frac{\rho_1}{2} \right)^2 \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_{\varepsilon}} \frac{1}{r} w d\Gamma$$

$$= -AD_{\pi}^{16} \sin 2\beta_1 \left(\frac{\rho_1}{2}\right)^2 \cdot w(P) \cdot (2\pi - \alpha)$$

将 $A, \rho_1^2, \sin 2\beta_1$ 的值代入上式即得

$$I_4^* = -\frac{2\pi - \alpha}{2\pi} w(P) \tag{5.4}$$

α 为边界点 P 处的边界切线之间的内夹角, 如图3所示. 对于光滑边界, $\alpha = \pi$.

所以, 积分 I_4 是存在的, 但不连续, 在 P 点有一跳跃值.

根据上述分析, 当 $p \rightarrow P \in \Gamma$ 时, 即可导出如下的边界积分方程:

$$\begin{aligned} C(P) \cdot w(P) = & \iint_{\Omega} qw^* d\Omega + \int_{\Gamma} w^* V(w) d\Gamma - \int_{\Gamma} w \left[V(w^*) + G_p \frac{\partial w^*}{\partial n} \right] d\Gamma \\ & - \int_{\Gamma} \frac{\partial w^*}{\partial n} M(w) d\Gamma + \int_{\Gamma} \frac{\partial w}{\partial n} [M(w^*) + G_p w^*] d\Gamma \end{aligned} \tag{5.5}$$

其中, $C(P) = \alpha/2\pi$, 对于光滑边界, $C(P) = 1/2$.

此外, 在积分方程(4.4)中, 通过对 P 点求法向导数 ($P \in \Gamma$), 然后再令 $p \rightarrow P \in \Gamma$, 即可得到第二个边界积分方程:

$$\begin{aligned} C(P) \frac{\partial w(P)}{\partial n_p} = & \iint_{\Omega} qw_2^* d\Omega + \int_{\Gamma} w_2^* V(w) - \int_{\Gamma} w \left[V(w_2^*) + G_p \frac{\partial w_2^*}{\partial n} \right] d\Gamma \\ & - \int_{\Gamma} \frac{\partial w_2^*}{\partial n} M(w) d\Gamma + \int_{\Gamma} \frac{\partial w}{\partial n} [M(w_2^*) + G_p w_2^*] d\Gamma \end{aligned} \tag{5.6}$$

式(5.5)、(5.6)中各积分项中的核函数见附录.

需要说明的是, 在上述边界积分方程中, 没有考虑不光滑边界处由于矩不连续产生的项. 不过, 只要在边界积分方程(5.5), (5.6)中直接加上这一项即可.

六、结 束 语

本文通过广义函数的Fourier积分变换及特殊函数的某些性质, 导出了双参数地基上板弯曲问题的基本解, 给出了建立双参数地基上板弯曲问题边界积分方程的完整过程. 它的意义还在于, 本文导出的基本解及边界积分方程同样适用于Winkle地基上的板弯曲问题 (设 $G_p = 0$). 一旦定解问题确定, 便可将两个边界积分方程进行适当的离散, 进行数值计算, 即用边界元法求解实际工程问题的数值结果.

本文在撰写过程中, 得到了陈山林教授的热情帮助和支持, 并提出了宝贵的意见, 谨此致谢.

附 录 I

第一基本解:

$$w^* = Au_0(r)$$

$$\frac{\partial w^*}{\partial n} = Au_0'(r) \cos \beta$$

$$M(w^*) = -DA \left[(\cos^2 \beta + \nu \sin^2 \beta) u_0''(r) + (\sin^2 \beta + \nu \cos^2 \beta) \frac{u_0'(r)}{r} \right]$$

$$\begin{aligned}
 V(w^*) = & -DA\cos\beta\left[u_0''(r) + \frac{1}{r}u_0'(r) - \frac{1}{r^2}u_0(r)\right] \\
 & -\frac{D(1-\nu)}{2}A\left[\sin\beta\sin^2\beta\left(u_0'''(r) - \frac{1}{r}u_0''(r) + \frac{1}{r^2}u_0'(r)\right)\right. \\
 & \left.+ 2\cos 2\beta\left(\frac{\cos 2\beta}{r} - \frac{1}{R}\right)\left(u_0''(r) - \frac{1}{r}u_0'(r)\right)\right]
 \end{aligned}$$

第二基本解:

$$\begin{aligned}
 w_2^* & = Au_0'(r)\cos\varphi \\
 \frac{\partial w_2^*}{\partial n} & = A\left(\cos\beta\cos\varphi u_0''(r) - \frac{u_0'(r)}{r}\sin\beta\sin\varphi\right) \\
 M(w_2^*) & = -\frac{D(1-\nu)}{2}A\left\{u_0''(r)\cos\varphi\left(\cos 2\beta + \frac{1+\nu}{1-\nu}\right)\right. \\
 & \quad \left.- \frac{1}{r}\left(u_0''(r) - \frac{1}{r}u_0'(r)\right)\left[\cos(2\beta-\varphi) - \cos\varphi\frac{1+\nu}{1-\nu} + \sin\varphi\sin 2\beta\right]\right\} \\
 V(w_2^*) & = -AD\left[\cos\beta\cos\varphi u_0^{(4)}(r) + \frac{1}{r}u'''(r)\cos(\beta+\varphi)\right. \\
 & \quad \left.- \frac{1}{r^2}\left(u_0''(r) - \frac{1}{r}u_0'(r)\right)(2\cos\beta\cos\varphi + \sin\beta\sin\varphi)\right] \\
 & \quad -\frac{D(1-\nu)}{2}A\left\{\sin\beta\sin 2\beta\cos\varphi u_0^{(4)}(r) - \sin\beta[\sin(2\beta-\varphi) - \cos 2\beta\sin\varphi]\right. \\
 & \quad \times\left(\frac{1}{r}u''(r) - \frac{2}{r^2}u_0''(r) + \frac{2}{r^3}u_0'(r)\right) + \frac{\cos\beta}{r}u'''(r)\sin 2\beta\sin\varphi \\
 & \quad \left.- \frac{\cos\beta}{r}\left(\frac{1}{r}u_0''(r) - \frac{1}{r^2}u_0'(r)\right)[\cos(2\beta-\varphi) + \cos 2\beta\cos\varphi]\right. \\
 & \quad \left.+ 2\left(\frac{\cos\beta}{r} - \frac{1}{R}\right)\left[u_0''(r)\cos 2\beta\cos\varphi - (\cos(2\beta-\varphi) + \sin 2\beta\sin\varphi)\right.\right. \\
 & \quad \left.\left.\times\left(\frac{1}{r}u_0''(r) - \frac{1}{r^2}u_0'(r)\right)\right]\right\}
 \end{aligned}$$

其中, $\beta = \langle n, r \rangle$, $\varphi = \langle n_p, r \rangle$, R 为边界曲线的曲率半径.

参 考 文 献

- [1] Selvadurai, A.P.S., 《土与基础相互作用的弹性分析》, 中国铁道出版社 (1984).
- [2] Katsikadelis, J. T. and A. E. Armenakas, *J. Appl. Mech.*, **54** (1984), 544—584.
- [3] Katsikadelis, J. T. and A. E. Armenakas, *J. Engng. Mech.*, **110** (7) (1984), 1086—1105.
- [4] Bezzine, G., *Int. J. Solids Structures*, **24**, (6) (1988), 557—565.
- [5] Puttonen, Jari and Pentti Varpasuo, *Int. J. Numer. Mech. Engng.*, **23** (1986), 287—303.
- [6] Vlazov, V. Z. and U. N. Leontiev, *Israel Program for Scientific Translations*, Jerusalem (translated from Russtan) (1966).
- [7] 杜庆华等合著, 《边界积分方程方法——边界元法》, 高等教育出版社 (1989).
- [8] 王竹溪、郭敦仁, 《特殊函数概论》, 科学出版社 (1979).
- [9] 吉林大学数学系编, 《数学分析》(中册), 人民教育出版社 (1978).

Boundary Integral Equations for the Bending Problem of Plates on Two-Parameter Foundation

Li Zheng-liang Deng An-fu

(Chongqing Institute of Architecture and Engineering, Chongqing)

Abstract

By means of Fourier integral transformation of generalized function, the fundamental solution for the bending problem of plates on two-parameter foundation is derived in this paper, and the fundamental solution is expanded into a uniformly convergent series. On the basis of the above work, two boundary integral equations which are suitable to arbitrary shapes and arbitrary boundary conditions are established by means of the Rayleigh-Green identity. The content of the paper provides the powerful theories for the application of BEM in this problem.

Key words two-parameter foundation, fundamental solution, special functions, boundary integral equation