应用数学和力学，第13卷第6期（1992年6月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

复杂系统的泛系聚类方法*

昝廷全　　吴学谋

（兰州大学西北开发研究所）（武汉数字工程研究所）

（1991年5月3日收到）

摘　要

本文利用半等价算子ε_i和相等化算子δ_i研究了复杂系统的聚类问题；阐述了分析运筹复杂系统的$\delta(1, 3)$解耦原理、对偶转化原理和大系统分解原理；详细讨论了复杂系统的连通性与解耦性并提供了有关定理。最后，利用泛系聚类方法讨论了复杂系统的层次分析。

关键词　半等价算子　等价化算子　泛系聚类　连通性　解耦性

泛系聚类方法是分析运筹复杂系统的一种新方法，其主要内容是利用泛系算子把各种各样的二元关系族转化成各种半等价关系(相容关系)，然后按半等价关系进行聚类划分[1]．在泛系聚类方法的基础上，本文介绍了与系统科学、哲学、自然辩证法、经济学有关的一些泛系理法。

一、泛系算子与泛系聚类

相容化算子ε_i和相等化算子δ_i合称为泛系算子，记为θ．所谓泛系聚类，就是利用泛系算子θ将广义系统或泛结构[2,3]转化为某种相容关系类或相等化关系．也就是说，θ即为如下映射关系；

θ：广义系统⟶相容关系类或相等化关系类．

设G为给定的集合，定义幺关系

$$I=I(G)=\{(x,\ x)\mid x\in G\}$$

包含幺关系的二元关系称为具有自返性，这样的二元关系总体记为

$$R[G)=\{f\mid I\subset f\},\quad f\subset A^2$$

如果$f=f^{-1}$，则称为具有对称性，其总体记为

$$S[G)=\{f\mid f^{-1}=f\}$$

并用

$$S_a[G)=\{f\mid f\cap f^{-1}\subset I\}$$

和

$$T[G)=\{f\mid f^{(2)}\subset f\}$$

分别表示具有反对称性和传递性的二元关系集合．这里$f^{(2)}$表示复合$f\circ f$．

令$E_s[G)$，$E[G)$，$L[G)$分别表示半等价关系，等价关系与半序关系形成的二元关系集合，

* 本文得到兰州大学重大基金课题“复杂系统的建模原理与方法”资助．

则：

$$E_s[G]=R[G]\cap S[G]$$
$$E(G)=R[G]\cap S[G]\cap T[G]=E_s[G]\cap T[G]$$
$$L[G]=R[G]\cap S_a[G]\cap T[G]$$

记ε_i为相容化算子，G为给定的集合，$g\subset G^2$，则$\varepsilon_i(g)\in E_s[G]$，按$\varepsilon_i$相容的聚类是$G$的一些子集$G_j$，记为

$$G=\bigcup G_j(d\varepsilon_i(g))$$

这就是按相容关系对G的聚类。G_j实际上是G中相对于ε_i的最大相容子集，它满足

$$G_j=\max\{D|D\subset A,\ D^2\subset\varepsilon_i\}$$

它们之间可能相交，也可不相交，子集的个数可能是无穷大($|\{j\}|\to\infty$)。以G_j为元素形成的集合叫做G对ε_i的商集或商系统：

$$\{G_j\}=G/\varepsilon_i$$

由G到G_j的自然转化或二元关系

$$f_{\varepsilon_i}=\{(x,\ G_j)|x\in G_j\}\subset G\times(G/\varepsilon_i)$$

叫做商化，其逆转化 $f_{\varepsilon_i}^{-1}$ 叫做积化。下面我们给出ε_i的具体定义。

定义1（相容化算子） 设$I=\{(x,x)|x\in G\}$，$g\subset G^2$，我们定义：

$$\varepsilon_1(g)=g\cup g^{-1}\cup I,\ \varepsilon_2(g)=\varepsilon_1(g\cap g^{-1})$$
$$\varepsilon_3(g)=\varepsilon_1(g^t\cap g^{-t}),\ \varepsilon_4(g)=\varepsilon_1(g\circ g^{-1}),\ \varepsilon_5(g)=\varepsilon_1(g^{-1}\circ g)$$
$$\varepsilon_{i+5}(g)=\varepsilon_i(\bar{g})=\varepsilon_i(G^2-g)\qquad(i=1,2,\cdots,5)$$

其中g^t为传递包。

根据上述定义，算子ε_1具有基本的意义。现在，我们具体讨论如何利用算子ε_1把一般二元关系转化为半等化关系。

设$g\subset G^2$为一般的二元关系，要把g改造为相容关系，就是使g满足自返性和对称性：

（1） 使g自返化，即$g\mapsto g\cup I$，$I\subset g\cup I$。

（2） 使$g\cup I$对称化，即$g\cup I\mapsto(g\cup I)\cup(g\cup I)^{-1}=g\cup g^{-1}\cup I$。

令$\varepsilon_1(g)=g\cup g^{-1}\cup I$，则$\varepsilon_1$即为相容化算子，即$\varepsilon_1: P(G^2)\to E_s[G]$，这里$P(G^2)$为$G^2$的幂集。

例1 设$G=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$，$g=\{(1,\ 2),\ (2,\ 3),\ (4,\ 5)\}$，求$\varepsilon_1(g)$，并按$\varepsilon_1(g)$聚类。

解 根据定义$\varepsilon_1(g)=g\cup g^{-1}\cup I$。所以

$$\varepsilon_1(g)=\{(1,\ 2),\ (2,\ 1),\ (2,\ 3),\ (3,\ 2),\ (4,\ 5),\ (5,\ 4),\ (1,\ 1),\ (2,\ 2),\ (3,\ 3),\ (4,\ 4),\ (5,\ 5)\}$$

按$\varepsilon_1(g)\in E_s[G]$对$G$进行聚类，有

$$G=\bigcup G_j(d\varepsilon_1(g))=\{1,\ 2\}\cup\{2,\ 3\}\cup\{4,\ 5\}$$

由此可见，这是一个不分明聚类。

定义2（等价化算子） 设G为给定的集合，$g\subset G^2$，我们定义

$$\delta_i(g)=[\varepsilon_i(g)]^t\qquad(i=1,2,\cdots,10)$$
$$\delta_0(g)=\max\{\delta|\delta\in E(G),\ \delta\leqslant g\}$$
$$\delta_{11}(g)=\delta_0[\varepsilon_2(g)],\ \delta_{12}(g)=\delta_{11}(\bar{g})=\delta_{11}(G^2-g)$$

这里的改造方案是容易理解的，由于等价关系就是在相容关系的基础上再加一个传递关系。

因此，把$\varepsilon_i(g)\in E_s[G]$传递化，就变成了等价关系。

δ_i算子把广义系统或泛结构转化为某种等价关系。若$g\subset G^2$，则$\delta_i(g)\in E(G)$，从而有

$$G=\bigcup G_j(d\delta_i(g))$$

这就是按等价关系对G的聚类。与相容聚类不同的是，等价聚类是一种分明聚类，即$G_l\cap G_m=\phi(l\neq m)$。

例2 设$G=\{1, 2, 3, 4, 5\}$，$g=\{(1, 2), (2, 3), (2, 2), (4, 5)\}$，求$\delta_1(g)$，并按$\delta_1(g)$对$G$进行聚类。

解 根据定义$\delta_1(g)=[\varepsilon_1(g)]^t=[g\cup g^{-1}\cup I]^t$则有

$$\begin{aligned}\delta_1(g)&=I\cup g\cup g^{-1}\cup g\circ g^{-1}\cup g^{-1}\circ g\cup g^{(2)}\circ g^{-1}\cup g\circ g^{-(2)}\cup g\circ g^{-1}\circ g\cup g^{-1}\circ g\circ g^{-1}\cup\cdots\\&=\{(1, 2), (2, 3), (4, 5), (2, 1), (3, 2), (2, 2),\\&\quad (5, 4), (1, 1), (4, 4), (3, 3), (5, 5), (1, 3), (3, 1)\}\end{aligned}$$

按$\delta_1(g)$对G进行聚类，我们得到

$$G=\bigcup G_j(d\delta_1(g))=\{1, 2, 3\}\cup\{4, 5\}=G_1\cup G_2$$

这里$G_1=\{1, 2, 3\}$，$G_2=\{4, 5\}$。由此可以看出，在G_1与G_2之间没有g的联系，即G_1与G_2对于δ_1是解耦的。

二、δ(1，3)解耦与对偶转化原理

上面定义的泛系算子对于处理复杂系统提供了方法论性的和数学化的原理。下面主要介绍由算子δ_1和δ_3引出的$\delta(1, 3)$解耦原理和由ε_6算子引出的对偶转化原理。

$\delta(1, 3)$解耦原理 对于给定的$g\in P(G^2)$，$G=\bigcup G_j(d\delta(g))$，设$\delta=\delta_1(g)$，则$G_j$之间没有$g$通道相连，从而$G$能分解为相对于$g$的绝缘子系统的充要条件是$\delta_1(g)\neq G^2$；设$\delta=\delta_3(g)$，则$G_j$之间或者相对于$g$为不相连通，或者只有单向串联通道，因而$G$能分解为相对于$g$绝缘或单向串联的子系统的充要条件是$\delta_3(g)\neq G^2$。

根据上述原理，δ_1算子使复杂系统分解为没有g联系的子系统$G/\delta_1(g)=\bigcup G_j$，其充要条件是等价关系$\delta_1(g)$不等于$G^2$。$\delta_1$对于系统解耦的这种作用实际上是一种对关系$g$的黑箱化作用。据此，可以对于控制论中的黑箱方法研究提供新的思路和启迪。

设$S=(A, B)$为一个要黑箱化的系统[4]，其中A为某一给定的集合，B为A上的关系集合。利用δ_1进行黑箱化的基本思路是先形成一个扩展系统$Q=(C, D)$，$S\subset Q$，$A\subset C$。然后再作投影$f: C\to E$，E为引入的C的影系统，目的是使$f(A)\in E$，即在投影f作用下把系统S的硬部A变为E中的一个元素，因之，A的内部被屏蔽了。其具体步骤如下：

（1） 构造一个扩形系统$Q=(C, D)$，$S\subset Q$，$A\subset C$。

（2） 求出$\delta_1(A^2)$。

（3） 用δ_1对C进行商化。

由此得到

$$C/\delta_1(A^2)=\{\{x_1\}, \{x_2\}, \cdots, A\mid x_i\in A\}$$

这时，A成为$C/\delta_1(A^2)$中的一个元素，相当于把A的内部屏蔽了。如果A中有两点，则黑箱化后变为一点，相应的点间连线变为自返的。若A内的点与A外的点有联系，将不受此影响。这相当于$f: C\to C/\delta_1(A^2)$，$f(A)=A\in C/\delta_1(A^2)$。

算子δ_3使系统分解为没有g联系，或者只有单向g联系的子系统，因此$G/\delta_3(g)=\bigcup G_j$是

对于g中非单向性联系的“黑箱化”屏蔽．

利用$\delta(1, 3)$解耦原理，可以推得下面的大系统分解原理：

大系统分解原理 对于泛权网络g: $G^2\to W$，$D\subset W$，则$G=\bigcup G_j(d\delta_1(g\circ D))$表示$G_j$为$D$水平上的不可约基砖．在图论上表示$G_j$内是按$\delta_1(g\circ D)$连通的，而$G_j$之间是相对绝缘的，也即$G_j$之间没有权重属于$D$的路相联．当把$\delta_1$推广为$\delta_3$时，则对应一种广义可约性，$G_j$内有$D$水平的强连通(参见下节)，而$G_j$之间或者$D$水平绝缘，或者只有单向的联系．

算子ε_6能够使远与近、连接与间断等关系相互转化．更一般地，我们有如下对偶转化原理：

对偶转化原理 设$\theta=\varepsilon_6(\delta)$，则$\delta=\varepsilon_6(\theta)$．对$\delta=\varepsilon_1(g)$，$\varepsilon_2(g)$，$\varepsilon_3(g)$，有$\theta=\varepsilon_7(g)$，$\varepsilon_6(g)$，$\varepsilon_6(g^t)$．

证明 先证当$\delta=\varepsilon_1(g)$时，$\theta=\varepsilon_7(g)$．

实际上，当$\delta=\varepsilon_1(g)$时，

$$\begin{aligned}\theta&=\varepsilon_6(\varepsilon_1(g))=\varepsilon_1(\overline{\varepsilon_1(g)})=\overline{\varepsilon_1(g)}\cup[\overline{\varepsilon_1(g)}]^{-1}\cup I\\&=\overline{g\cup g^{-1}}\cup(\overline{g\cup g^{-1}})^{-1}\cup I\\&=(\bar g\cap\bar g^{-1})\cup(\bar g^{-1}\cap\bar g)\cup I=(\bar g\cap\bar g^{-1})\cup I\end{aligned}$$

而

$$\varepsilon_7(g)=\varepsilon_2(\bar g)=\varepsilon_1(\bar g\cap\bar g^{-1})=(\bar g\cap\bar g^{-1})\cup(\bar g\cap\bar g^{-1})^{-1}\cup I=(\bar g\cap\bar g^{-1})\cup I$$

所以，当$\delta=\varepsilon_1(g)$时，$\theta=\varepsilon_7(g)$． #

类似地，可以证明其它各式．

对偶转化原理可以有多种语义解释．这里我们从事物的联系与解除联系的角度给出其解释：

（1） 当$(x, y)\in\delta=\varepsilon_1$时，由于$\varepsilon_1(g)=g\cup g^{-1}\cup I$，表示$x$与$y$之间或者正向联接一次或者反向联接一次，称为一次连通；这时$\theta=\varepsilon_6(\delta)=\varepsilon_7(g)=(\bar g\cap\bar g^{-1})\cup I$，表示$x$与$y$之间既没有用$g$正向连接一次也没有用$g$反向连接一次，称为一次解耦．因此，$\delta$与$\theta$在$\varepsilon_6$的作用下恰为连通与解耦的相互转化．

（2） 当$(x, y)\in\delta=\varepsilon_2$时，由于$\varepsilon_2(g)=\varepsilon_1(g\cap g^{-1})=(g\cap g^{-1})\cup I$，表示$x$与$y$之间即要用$g$正向连接一次，又要用$g$反向连接一次，称为一步强连通．这时，$\theta=\varepsilon_2(\delta)=\varepsilon_6(g)=\varepsilon_1(\bar g)=\bar g\cup\bar g^{-1}\cup I$，表示$x$与$y$之间或者没有一次正向连接，或者没有一次反向连接，称为一步弱解耦．因此，δ与θ表示一步强连通与一步弱解耦的相互转化．

（3） 当$(x, y)\in\delta=\varepsilon_3$时，$\theta=\varepsilon_6(g^t)$．这时表示的是强连通与弱解耦之间的相互转化．

三、连通与解耦关系

所谓连通性，是指x与y之间存在着某种通路，使x与y之间可用联系连接起来．连通有多种方式，下面是一些具体定义：

定义3（连通性） 当$(x, y)\in\varepsilon_1(g^t)$时，称$x$与$y$之间具有$g$连通性，或可用$g$连接．

根据上述定义，$\varepsilon_1(g^t)=g^t\cup g^{-t}\cup I$，若$(x, y)\in g^t=g\cup g^{(2)}\cup g^{(3)}\cup\cdots$，表示从$x$到$y$或者连接一次、或者连接两次、或者连接三次，…；若$(x, y)\in g^{-t}=g^{-1}\cup g^{-(2)}\cup g^{-(3)}\cup\cdots$，表示从$y$到$x$或者连接一次、或者连接两次、或者连接三次，…．

定义4（强连通） 当$(x, y)\in\varepsilon_3(g)$时，称$x$与$y$之间具有强连通，或可用$g$强连通．

根据算子ε_3的定义，$\varepsilon_3(g)=\varepsilon_1(g^t\cap g^{-t})=(g^t\cap g^{-t})\cup I$。若$(x,y)\in(g^t\cap g^{-t})$，表示从$x$到$y$既要正向连接一次、两次、…，同时又要反向连接一次、二次、…。

定义5（n步连通） 当$(x,y)\in\varepsilon_1(g^{(n)})$时，称$x$与$y$之间为$n$步连通，或可用$g$连接$n$次。

根据$\varepsilon_1(g^{(n)})$的定义，$\varepsilon_1(g^{(n)})=g^{(n)}\cup g^{-(n)}\cup I$，因此，$(x,y)\in\varepsilon_1(g^{(n)})$意味着$x$与$y$之间或者正向连接$n$次，或者反向连接$n$次。

定义6（n步强连通） 当$(x,y)\in\varepsilon_2(g^{(n)})$时，称$x$与$y$之间为$n$步强连通。

实际上，

$$\begin{aligned}\varepsilon_2(g^{(n)})&=\varepsilon_1(g^{(n)}\cap g^{-(n)})=(g^{(n)}\cap g^{-(n)})\cup(g^{(n)}\cap g^{-(n)})^{-1}\cup I\\&=(g^{(n)}\cap g^{-(n)})\cup I\end{aligned}$$

所以，$(x,y)\in\varepsilon_2(g^{(n)})$表示$x$与$y$之间既要正向连接$n$次，同时又要反向连接$n$次。

连通性的反面是解耦性，它是指x与y之间解除了某种联系，因而x与y之间不存在某种通路。与连通性相对应，解耦亦有多种形式，下面给出几种典型解耦的具体定义：

定义7（强解耦） 当$(x,y)\in\varepsilon_7(g^t)$时，称$x$与$y$为强解耦。

根据定义，

$$\varepsilon_7(g^t)=\varepsilon_2(\bar g^t)=\varepsilon_1(\bar g^t\cap\bar g^{-t})=(\bar g^t\cap\bar g^{-t})\cup I$$

当$(x,y)\in\varepsilon_7(g^t)$时意味着$x$与$y$之间既没有正向连接也没有反向连接，因而是完全解除了联系。

定义8（n步强解耦） 当$(x,y)\in\varepsilon_7(g^{(n)})$时，称$x$与$y$之间为$n$步强解耦。

实际上，

$$\varepsilon_7(g^{(n)})=\varepsilon_2(\bar g^{(n)})=\varepsilon_1(\bar g^{(n)}\cap\bar g^{-(n)})=(\bar g^{(n)}\cap\bar g^{-(n)})\cup I$$

当$(x,y)\in\varepsilon_7(g^{(n)})$时，意味着$x$与$y$之间既无$n$次正向连接亦无$n$次反向连接。

定义9（弱解耦） 当$(x,y)\in\varepsilon_6(g^t)$时，称$x$与$y$之间为弱解耦。

根据定义，$\varepsilon_6(g^t)=\varepsilon_1(\bar g^t)=\bar g^t\cup\bar g^{-t}\cup I$。$(x,y)\in\varepsilon_6(g^t)$表示$x$与$y$之间或者没有正向连接或者没有反向连接。

定义10（n步弱解耦） 当$(x,y)\in\varepsilon_6(g^{(n)})$时，称$x$与$y$之间为$n$步弱解耦。

实际上，$\varepsilon_6(g^{(n)})=\varepsilon_1(\bar g^{(n)})=\bar g^{(n)}\cup\bar g^{-(n)}\cup I$。当$(x,y)\in\varepsilon_6(g^{(n)})$时意味着$x$与$y$之间或者没有正向$n$次连接或者没有反向$n$次连接。

根据以上讨论，我们不难得到如下定理：

定理1 若$G=\bigcup G_i(d\varepsilon_3(g))=\bigcup G_j(d\varepsilon_6(\varepsilon_3(g)))$，则$G_i$是强连通，$G_j$是弱解耦。

证明 根据定义

$$\varepsilon_3(g)=\varepsilon_1(g^t\cap g^{-t})=(g^t\cap g^{-t})\cup I$$

当$(x,y)\in\varepsilon_3(g)$时意味着x与y为强连通。设x，$y\in G_i$且$(x,y)\in\varepsilon_3(g)$，则G_i为强连通。

ε_6为对偶转化算子，ε_3为强连通算子，所以，$\varepsilon_6(\varepsilon_3(g))$为非强连通算子，即弱解耦算子。若$x$，$y\in G_j$，且$(x,y)\in\varepsilon_6(\varepsilon_3(g))$，则$G_j$为弱解耦。 #

定理2 若$G=\bigcup G_i(d\varepsilon_1(g^{(n)}))=\bigcup G_j(d\varepsilon_7(g^{(n)}))$，则$G_i$是$n$步弱连通，$G_j$是$n$步强解耦。

证明 根据定义，若$(x,y)\in\varepsilon_1(g^{(n)})$，意味着$x$与$y$之间可用$g$或者正向连接$n$次，或者反向连接$n$次，故$x$，$y\in G_i$为$n$步弱连通。

当$(x,y)\in\varepsilon_7(g^{(n)})$时，表示$x$与$y$之间既没有正向$n$次连接，也没有反向$n$次连接，故$x$，$y\in G_j$为$n$步强解耦。 #

定理3 若$G=\bigcup G_i(d\varepsilon_1(g^t))=\bigcup G_j(d\varepsilon_7(g^t))$，则$G_i$为连通，$G_j$为强解耦。

证明 当$(x, y)\in\varepsilon_1(g^t)=g^t\cup g^{-t}\cup I=g\cup g^{(2)}\cup g^{(3)}\cup\cdots\cup g^{-(1)}\cup g^{-(2)}\cup\cdots\cup I$，表示$x$与$y$之间是连通的。故$x, y\in G_i$是连通的。

当$(x, y)\in\varepsilon_7(g^t)=\varepsilon_2(\bar{g}^t)=\varepsilon_1(\bar{g}^t\cap\bar{g}^{-t})=(\bar{g}^t\cap\bar{g}^{-t})\cup I$时，表示$x$与$y$之间既无正向连接，又无反向连接。故$x, y\in G_j$为强解耦。

四、复杂系统的层次分析

层次性是一种客观存在的事物属性。从泛系观来看[2]，层次是事物之间的一种特殊的泛序结构。可以按照不同的方法或方案引出事物的层次结构。泛系聚类为复杂系统的分层提供了一种新的思路和方法。

设有广义系统$S=(A, f)$，$f\subset A^a\times W$为泛权关系，$a\in\{n, [n], *\}$，其满足

$$A^{[n]}=A\cup A^2\cup A^3\cup\cdots\cup A^n,\quad A^*=A\cup A^2\cup A^3\cup\cdots$$

并设

$$\theta: P(A^a)\to E_s[A)$$

为泛系算子，则对于泛权水平$D\subset W$，$\theta(f\circ D)\in E_s[A)$，这时有泛系聚类：

$$A=\cup A_i(d\theta(f\circ D))$$

或

$$S=\cup S_i(d\theta(f\circ D))$$

A_i或S_i就是相应于(f, D, θ)的S的下层子系统。

由此可以看出，系统分层具有相对性，其相对性准则由泛权关系f，泛权水平D和泛系算子θ联合组成。泛权水平D可作多种解释，例如可表示在泛权关系f与泛系算子θ体制下元素连通或解耦的程序等。当$f\subset A^2\times W$为泛权网络时，取$\theta=\delta_1$或δ_3，则子系统S_i内外反映一种对$f\circ D$水平的连通性反差，其也有(f, D, θ)相对性，这深化了我们对系统层次概念的理解：由一种准则不能进一步分层不等于按另一准则也不可能；按一种属性泛权为低层的广义系统，按另一种属性泛权可以为低层，也可以为高层广义系统。根据相对性准则(f, D, θ)的不同情况，可以展开复杂系统的层次分析的更加内容丰富的讨论。

参 考 文 献

[1] 昝廷全、汪懋康、李百炼，泛系生态聚类生克分析，科学探索，6(3)(1986)，47—48。

[2] 吴学谋，《从泛系观看世界》，中国人民大学出版社（1990）。

[3] 吴学谋，《逼近转化论与数学中的泛系概念》，湖南科技出版社（1985）。

[4] 昝廷全，泛系方法论概述，系统工程，6(1988)，19—20。

Pansystems Clustering Analysis of Complex Systems

Zan Ting-quan

(Northwest Development Institute, Lanzhou University, Langzhou)

Wu Xue-mou

(Wuhan Digital Engineering Institute, Wuhan)

Abstract

In this paper, by use of equivalence operators δ_i and semi-equivalence operators ε_i we study the clustering problems of complex systems, present $\delta(1, 3)$ disconnection principle, dual transformation principle and large-scale systems decomposition principle for analizing and operating complex systems, discuss interconnectivity and disconnectivity of complex systems in detail and present some related theorems. Finally, we discuss the levels of systems according to pansystems clustering approach proposed in this paper.

Key words semi-equivalence operator, equivalence operator, pansystems clustering, interconnectivity, disconnectivity