应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

厚球壳与实心球轴对称问题的一般解*

卜小明　　严宗达

（天津大学，1991年4月29日收到）

摘　要

本文试图从更一般的三维问题基本方程出发研究任意厚球壳与实心球的轴对称问题。对于受任意轴对称载荷的厚球壳和实心球体，文中运用加权残值法给出了以 Legendre 级数表示的一般解。

关键词　厚球壳　实心球　轴对称问题　加权残值法

一、引　言

当壳体厚度比较厚时，基于Kirchhoff假设的薄壳理论就不再适用.因此，对于任意厚度的壳体有必要建立其他适用的方法。文献[1]借鉴有限元的思想建立了有限球层法，取得了比较好的效果。不过，有时应力在其边界附近不够精确。本文试图从基本微分方程出发，建立一种求解轴对称厚球壳问题的一般方法，用这种方法同时也可以求解薄壳问题和实心球体问题。

二、基本方程和边界条件

在球坐标系(r,θ,φ)中，以位移变量u_r和u_θ表示的轴对称问题的平衡方程为

$$(\lambda+G)\frac{\partial e}{\partial r}+G\left[\nabla^2u_r+\frac{2}{r^2}\left(u_r+\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta}+u_\theta\mathrm{ctg}\theta\right)\right]+X_0=0 \tag{2.1}$$

$$(\lambda+G)\frac{1}{r}\frac{\partial e}{\partial\theta}+G\left[\nabla^2u_\theta-\frac{1}{r^2}\left(\frac{u_\theta}{\sin^2\theta}-2\frac{\partial u_r}{\partial\theta}\right)\right]+Y_0=0 \tag{2.2}$$

式中λ，G为Lame常数，$X_0=X_0(r)$，$Y_0=Y_0(r)$分别为r，θ方向的体积力，e为体积应变

$$e=\varepsilon_r+\varepsilon_\theta+\varepsilon_\varphi=\frac{\partial u_r}{\partial r}+\frac{2u_r}{r}+\frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta}+\frac{1}{r}u_\theta\mathrm{ctg}\theta \tag{2.3}$$

Laplace算子为

$$\nabla^2=\frac{\partial}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}+\frac{1}{r^2}\mathrm{ctg}\theta\frac{\partial}{\partial\theta} \tag{2.4}$$

若球壳的内外半径分别为R_1和R_2，则应力边界条件为

* 龙驭球推荐.

$$\sigma_r|_{r=R_1}=X_1,\quad \tau_{r\theta}|_{r=R_1}=Y_1 \tag{2.5}$$

$$\sigma_r|_{r=R_2}=X_2,\quad \tau_{r\theta}|_{r=R_2}=Y_2 \tag{2.6}$$

式中，等式右边项X_1，Y_1，X_2，Y_2为相应边界$r=R_1$和$r=R_2$上给定的正应力和剪应力。

三、问 题 的 一 般 解

深入研究方程(2.1)、(2.2)，并考虑边界条件(2.5)、(2.6)后，我们将位移变量u_r和u_θ假设成如下Legendre级数和连带Legendre级数的形式

$$u_r=\sum_{n=0}^{N}\sum_{m=0}^{M}a_{mn}r^mP_n(\cos\theta) \tag{3.1}$$

$$u_\theta=\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=0}^{M}b_{mn}r^mP_n^1(\cos\theta) \tag{3.2}$$

其中 $P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$ 为Legendre多项式

$P_n^1(x)=(1-x^2)^{\frac{1}{2}}\frac{d}{dx}P_n(x)$ 为一阶连带Legendre多项式

由此得到的应力将是

$$\sigma_r=\sum_{n=0}^{N}\sum_{m=0}^{M}\{[(\lambda+2G)m+2\lambda]a_{mn}+\lambda n(n+1)b_{mn}\}r^{m-1}P_n(\cos\theta) \tag{3.3}$$

$$\tau_{r\theta}=G\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=0}^{M}[-a_{mn}+(m-1)b_{mn}]r^{m-1}P_n^1(\cos\theta) \tag{3.4}$$

$$\sigma_\theta=\sum_{n=0}^{N}\sum_{m=0}^{M}\{[\lambda m+2(\lambda+G)]a_{mn}+(\lambda+G)n(n+1)b_{mn}\}r^{m-1}P_n(\cos\theta)$$

$$-G\sum_{n=0}^{N}\sum_{m=0}^{M}b_{mn}r^{m-1}P_n^2(\cos\theta) \tag{3.5}$$

$$\sigma_\varphi=\sum_{n=0}^{N}\sum_{m=0}^{M}\{[\lambda m+2(\lambda+G)]a_{mn}+(\lambda+G)n(n+1)b_{mn}\}r^{m-1}P_n(\cos\theta)$$

$$+G\sum_{n=0}^{N}\sum_{m=0}^{M}b_{mn}r^{m-1}P_n^2(\cos\theta) \tag{3.6}$$

式中出现的$P_n^2(\cos\theta)$为二阶连带Legendre多项式函数。

为了适应任何形式的载荷，同时为了使方程统一，将体积力和已知边界力X_i和$Y_i(i=0, 1, 2)$展成

$$X_i=\sum_{n=0}^{N}a_{in}P_n(\cos\theta) \qquad (i=0,1,2) \tag{3.7}$$

$$Y_i=\sum_{n=1}^{N}\beta_{in}P_n^1(\cos\theta)\qquad(i=0,1,2)\tag{3.8}$$

式中

$$\alpha_{in}=\frac{2n+1}{2}\int_0^\pi X_iP_n(\cos\theta)\sin\theta d\theta\qquad(i=0,1,2)\tag{3.9}$$

$$\beta_{in}=\frac{2n+1}{2}\frac{1}{n(n+1)}\int_0^\pi Y_iP_n^1(\cos\theta)\sin\theta d\theta\qquad(i=0,1,2)\tag{3.10}$$

值得注意的是，关于体积力的系数α_{0n}和β_{0n}应为r的函数，即$\alpha_{0n}=\alpha_{0n}(r)$，$\beta_{0n}=\beta_{0n}(r)$。而其余的$\alpha_{in}$和$\beta_{in}(i=1,2)$将为常数。

将(3.1)、(3.2)、(3.7)、(3.8)式分别代入（2.1)、(2.2）式，以及将(3.3)，(3.4)、(3.7)、(3.8)式分别代入(2.5)、(2.6)式，可以得到

$$\sum_{m=0}^{M}[(\lambda+2G)(m-1)(m+2)-n(n+1)G]a_{mn}r^{m-2}+n(n+1)\sum_{m=0}^{M}[(\lambda+G)m$$
$$-(\lambda+3G)]b_{mn}r^{m-2}+\alpha_{0n}(r)=0\qquad(n=0,1,\cdots,N)\tag{3.11}$$

$$-\sum_{m=0}^{M}[(G+\lambda)(m+2)+2G]a_{mn}r^{m-2}+\sum_{m=0}^{M}[Gm(m+1)$$
$$-(\lambda+2G)n(n+1)]b_{mn}r^{m-2}+\beta_{0n}(r)=0\qquad(n=1,2,\cdots,N)\tag{3.12}$$

$$\sum_{m=0}^{M}\{[(\lambda+2G)m+2\lambda]a_{mn}+\lambda n(n+1)b_{mn}\}R_i^{m-1}=\alpha_{in}$$
$$(i=1,2;\ n=0,1,\cdots,N)\tag{3.13}$$

$$\sum_{m=0}^{M}G[-a_{mn}+(m-1)b_{mn}]R_i^{m-1}=\beta_{in}\qquad(i=1,2;\ n=1,2,\cdots,N)\tag{3.14}$$

采用加权残值法，可以将(3.11)、(3.12)式改写成

$$\sum_{m=0}^{M}[(\lambda+2G)(m-1)(m+2)-n(n+1)G]\varphi(m,k)a_{mn}+n(n+1)\sum_{m=0}^{M}[(\lambda+G)m$$
$$-(\lambda+3G)]\varphi(m,k)b_{mn}+\tilde{\alpha}_{0n}(k)=0\qquad(n=0,1,\cdots,N;\ k=0,1,\cdots,M-2)\tag{3.15}$$

$$-\sum_{m=0}^{M}[(\lambda+G)(m+2)+2G]\varphi(m,k)a_{mn}+\sum_{m=0}^{M}[Gm(m+1)$$
$$-(\lambda+2G)n(n+1)]\varphi(m,k)b_{mn}+\tilde{\beta}_{0n}(k)=0\qquad(n=1,2,\cdots,N;\ k=0,1,\cdots,M-2)\tag{3.16}$$

式中，如果采用配面法，则

$$\varphi(m,k)=r_k^{m-2},\ \tilde{\alpha}_{0n}(k)=\alpha_{0n}(r_k),\ \tilde{\beta}_{0n}(k)=\beta_{0n}(r_k)$$

其中的r_k可以是

$$r_k=R_1+k(R_2-R_1)/(M-2)\qquad(k=0,1,\cdots,M-2)$$

如果采用矩法

$$\varphi(m,k)=\begin{cases}\ln(R_2/R_1) & k=0,m=1；或k=1,\ m=0时\\ (R_2^{k+m-1}-R_1^{k+m-1})/(k+m-1) & k,\ m为其他整数\end{cases}$$

$$\tilde{\alpha}_{0n}(k)=\int_{R_1}^{R_2}\alpha_{0n}(r)r^k dr,\quad \tilde{\beta}_{0n}(k)=\int_{R_1}^{R_2}\beta_{0n}(r)r^k dr$$

这样，由(3.13)～(3.16)的$(M+1)(2N+1)$个方程可以确定相应的a_{mn}和b_{mn}。因此，就可以求得壳体内的位移和内力。

对于实心球体，由球壳的轴对称性可知，球心处的u_r和u_θ为零，于是应有

$$\left.\begin{aligned}&a_{0n}=0\qquad (n=0,1,\cdots,N)\\&b_{0n}=0\qquad (n=1,2,\cdots,N)\end{aligned}\right\}\tag{3.17}$$

用(3.17)式取代(2.5)式就可以求解实心球体的轴对称问题。

四、算　　例

1．球壳外半径为R，内半径为γR，受径向外压$p_r=-p_0\sin\theta$作用，泊松比$\mu=0.3$，计算$\gamma=0.6$的厚球壳和$\gamma=0$的实心球的位移和内力。

取$M=N=8$，并且无量纲化为

表1　　厚球壳的位移和应力

θ	r/R	$\bar{u}_r$	$\bar{u}_\theta$	$\bar{\sigma}_r$	$\bar{\sigma}_\theta$	$\bar{\sigma}_\varphi$	$\bar{\tau}_{r\theta}$
0°	0.6	0.206 0.205 (0.205)	0 0 (0)	0 0 (−0.353)	−2.258 −2.260 (−2.402)	−2.258 −2.260 (−2.402)	0 0 (0)
	0.8	0.248 0.248 (0.247)	0 0 (0)	−0.297 −0.286 (−0.286)	−0.728 −0.727 (−0.728)	−0.728 −0.727 (−0.728)	0 0 (0)
	1.0	0.243 0.243 (0.244)	0 0 (0)	−0.106 −0.106 (−0.026)	0.261 0.261 (0.301)	0.261 0.261 (0.301)	0 0 (0)
45°	0.6	−0.144 −0.144 (−0.143)	−0.262 −0.262 (−0.261)	0 0 (−0.192)	−1.096 −1.096 (−1.178)	−2.089 −2.088 (−2.167)	0 0 (−0.073)
	0.8	−0.110 −0.110 (−0.110)	−0.174 −0.174 (−0.173)	−0.558 −0.555 (−0.554)	−0.867 −0.864 (−0.865)	−1.349 −1.348 (−1.346)	−0.212 −0.212 (−0.211)
	1.0	−0.114 −0.114 (−0.114)	−0.084 −0.084 (−0.084)	−0.706 −0.706 (−0.680)	−0.807 −0.808 (−0.794)	−0.970 −0.971 (−0.958)	0 0 (−0.024)
90°	0.6	−0.449 −0.449 (−0.449)	0 0 (0)	0 0 (−0.095)	−0.431 −0.432 (−0.471)	−2.077 −2.076 (−2.114)	0 0 (0)
	0.8	−0.415 −0.415 (−0.414)	0 0 (0)	−0.652 −0.657 (−0.652)	−1.022 −1.023 (−1.020)	−1.850 −1.851 (−1.847)	0 0 (0)
	1.0	−0.409 −0.409 (−0.409)	0 0 (0)	−0.997 −0.997 (−0.984)	−1.458 −1.458 (−1.454)	−1.800 −1.799 (−1.794)	0 0 (0)

$$\bar{u}_r=\frac{u_r G}{p_0 R},\quad \bar{u}_\theta=\frac{u_\theta G}{p_0 R},\qquad \bar{\sigma}_r=\frac{\sigma_r}{p_0},\ \bar{\sigma}_\theta=\frac{\sigma_\theta}{p_0},\qquad \bar{\sigma}_\varphi=\frac{\bar{\sigma}_\varphi}{p_0},\quad \bar{\tau}_{r\theta}=\frac{\tau_{r\theta}}{p_0}$$

计算结果列于表1和表2。

表1中括号内的数值是由文[1]得到的，它上面的两个数分别由本文的配面法和矩法得到的。结果与文[1]符合得很好。

表2　　实心球体的位移和应力

θ	r/R	$\bar{u}_r$	$\bar{u}_\theta$	$\bar{\sigma}_r$	$\bar{\sigma}_\theta$	$\bar{\sigma}_\varphi$	$\bar{\tau}_{r\theta}$
	0	0	0	−0.3465	−1.0049	−1.0049	0
0°	0.5	0.0473	0	−0.2760	−0.8313	−0.8313	0
	1.0	0.0726	0	−0.1057	−0.0572	−0.0572	0
	0	0	0	−0.6757	−0.6757	−1.0048	−0.3292
45°	0.5	−0.0363	−0.0670	−0.6927	−0.6376	−0.9361	−0.2504
	1.0	−0.0864	−0.0392	−0.7064	−0.6536	−0.7346	0
	0	0	0	−1.0048	−0.3465	−1.0048	0
90°	0.5	−0.1106	0	−0.9954	−0.5206	−1.0301	0
	1.0	−0.1989	0	−0.9972	−0.9456	−1.0999	0

2． 球壳外半径为R，内半径为$0.98R$，以角速度ω自转，壳体密度为ρ，波松比$\mu=0.3$，计算壳体的位移和内力。

此时，体积力X_0，Y_0为

$$X_0=\rho r\omega^2\sin^2\theta,\ Y_0=\rho r\omega^2\sin\theta\cos\theta$$

仍取$M=N=8$，并且进行无量纲化

$$\bar{u}_r=\frac{u_r G}{\rho\omega^2 R^3},\ \bar{u}_\theta=\frac{u_\theta G}{\rho\omega^2 R^3},\quad \bar{\sigma}_r=\frac{\sigma_r}{\rho\omega^2 R^2},\quad \bar{\sigma}_\varphi=\frac{\sigma_\varphi}{\rho\omega^2 R^2},\quad \bar{\tau}_{r\theta}=\frac{\tau_{r\theta}}{\rho\omega^2 R^2},\ \bar{\sigma}_\theta=\frac{\sigma_\theta}{\rho\omega^2 R^2}$$

计算结果列于表3。

表3　　薄球壳的位移和应力

θ	r/R	$\bar{u}_r$	$\bar{u}_\theta$	$\bar{\sigma}_\theta$	$\bar{\sigma}_\varphi$
0°	0.98	−0.485 −0.485 (−0.485)	0 0 (0)	0.048 0.048 (0.056)	0.048 0.048 (0.056)
	0.99	−0.485 −0.485 (−0.485)	0 0 (0)	0.001 0.001 (0)	0.001 0.001 (0)
	1.00	−0.485 −0.485 (−0.485)	0 0 (0)	−0.045 −0.045 (−0.053)	−0.045 −0.045 (−0.053)
	无矩解	−0.485	0	0	0
45°	0.98	−0.055 −0.055 (−0.055)	0.249 0.249 (0.249)	0.008 0.008 (0.011)	0.515 0.515 (0.518)
	0.99	−0.056 −0.056 (−0.056)	0.242 0.242 (0.242)	0 0 (0)	0.490 0.490 (0.490)

（续表3）

θ	r/R	$\bar{u}_r$	$\bar{u}_\theta$	$\bar{\sigma}_\theta$	$\bar{\sigma}_\varphi$
45°	1.00	−0.056 −0.056 (−0.056)	0.236 0.236 (0.236)	−0.007 −0.007 (−0.010)	0.465 0.465 (0.463)
	无矩解	−0.055	0.243	0	0.490
90°	0.98	0.374 0.374 (0.374)	0 0 (0)	−0.032 −0.032 (−0.035)	0.983 0.983 (0.981)
	0.99	0.373 0.373 (0.373)	0 0 (0)	0 0 (0)	0.980 0.980 (0.980)
	1.00	0.372 0.372 (0.372)	0 0 (0)	0.031 0.031 (0.034)	0.976 0.976 (0.979)
	无矩解	0.373	0	0	0.980

从表中可以看出，本文的结果与文献[1]及无矩解十分符合。还有许多算例都充分表明本文方法的有效性。

五、结　语

大量的计算结果表明，本文的结果要好于文献[1]，尤其是在边界附近。这是因为本文提供的是一种半解析方法，能比较正确地反映任何形式的边界载荷。此外，作者还对级数的收敛性进行了研究，结果表明，级数的收敛速度很快，一般只需要取10项以内就可得到很高的精度。

参 考 文 献

[1] Yan Zong-da and Fu Yi-bin, Solution of axisymmetric thick spherical shell by finite spherical layer method, *Computer & Structure*, **30**(4) (1988), 923—927.

[2] 严宗达，《结构力学中的富里叶级数解法》，天津大学出版社 (1989).

[3] Finlayson, B. A., *The Method of Weighted Residuals and Variational Principles*, Academic Press, New York and London (1972).

[4] Courant, R. and D. Hilbert, *Methods of Mathematical Physics*, Vol.1, 1st English Ed., Interscience Publishers, New York (1953), 82—87, 325—327.

A General Solution of Axisymmetric Problem of Arbitrary Thick Spherical Shell and Solid Sphere

Bu Xiao-ming Yan Zong-da

(Dept. of Mechanics, Tianjin University, Tianjin)

Abstract

In this paper, the axisymmetric problems of arbitrary thick spherical shell and solid sphere are studied directly from equilibrium equations of three-dimensional problem, and the general solutions in forms of Legendre series for thick spherical shell and solid sphere are given by using the method of weighted residuals.

Key words thick spherical shell, solid sphere, axisymmetric problems, method of wieghted residuals