

# 用线法分析中厚板的振动与稳定性问题\*

唐寿高 袁 驹

(上海 同济大学) (清华大学)

(徐次达推荐, 1991年4月1日收到)

## 摘 要

发展了基于胡海昌中厚板的振动与稳定性理论等特征值问题的线法。利用常微分方程(ODE)技巧给出求解固有频率及临界荷载的标准非线性ODE体系,并采用所谓初始特征函数法通过ODE求解器(Solver)直接解出指定的任一特征值,而不依赖于振型正交性等条件。算例表明,本文方法是有效和可靠的。

**关键词** 中厚板 振动 稳定 线法

## 一、前 言

关于中厚板的振动与稳定性分析已有多种数值解法如有限元、有限差分及半解析元等方法。本文采用一种更为简单有效的数值方法——线法(Method of Lines简称MOL)来分析基于胡海昌中厚板理论的振动与稳定性问题<sup>[1]</sup>。方法的基本思想是对通过差分或加权残值手段半离散化了的非线性ODEs,利用ODE技巧及归一化条件等使之标准化<sup>[2]</sup>;再利用ODE Solver求解非线性问题需赋初值,采用所谓初始特征函数法,即输入与欲求特征值相应的特征曲面相接近的初始特征函数(如三角函数或多项式等),引导ODE Solver迭代求解时向真正的特征函数逼近并收敛出相应的特征值。作者曾对薄板的类似问题作过成功的尝试<sup>[3]</sup>。本文表明,对中厚板这类较复杂的特征值问题,所述线法是十分有效并且比其它数值方法更为简单方便的工程数值方法。

关于线法的历史发展情况及其研究现状,请参阅文献[3]~[5]。

## 二、基本方程的回顾

当不考虑横向荷载时,胡海昌<sup>[1]</sup>中厚板振动与稳定问题的控制偏微分方程为

$$\nabla^2 \nabla^2 F + \lambda L(F - (D/C)\nabla^2 F) = 0 \quad (2.1a)$$

$$(1/2)(1-\nu)D\nabla^2 f - C \cdot f = 0 \quad (2.1b)$$

式中 $\nabla^2$ 为Laplace算子,特征值 $\lambda$ 为

\* 同济大学创业基金资助课题。

$$\lambda = \begin{cases} \omega^2 \rho / D & \text{对振动问题} \\ p_z / D & \text{对稳定问题 (设 } p_z \neq 0) \end{cases} \quad (2.2a, b)$$

其中 $\omega$ 为板的振动频率,  $D$ 为板的抗弯刚度, 而算子 $L$ 定义为

$$L = \begin{cases} -1 & \text{对振动问题} \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2\alpha_1 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + \alpha_2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} & \text{对稳定问题} \end{cases} \quad (2.2c, d)$$

其中 $\alpha_1 = p_{xy} / p_x$ ,  $\alpha_2 = p_y / p_x$ , 且 $p_x$ 为临界荷载;  $C$ 为板的横剪切系数。我们假定 $N_x$ 不为零, 并且各个内力是成同比例增加的。

板内的转角 $\phi_x$ ,  $\phi_y$ 和挠度 $w$ 通过函数 $F$ 和 $f$ 表示成

$$\phi_x = F_{,x} + f_{,y}, \quad \phi_y = F_{,y} - f_{,x}, \quad w = F - \nabla^2 F D / C \quad (2.3)$$

把从函数 $F$ 引出的量用下标0作为标记, 从 $f$ 引出的量用下标1作为标记, 则从 $F$ 引出的各量为

$$\left. \begin{aligned} w_0 &= F - \nabla^2 F D / C, \quad \phi_{x0} = F_{,x}, \quad \phi_{y0} = F_{,y} \\ M_{x0} &= -D(F_{,xx} + \nu F_{,yy}), \quad M_{y0} = -D(F_{,yy} + \nu F_{,xx}) \\ M_{xy0} &= -(1-\nu)DF_{,xy}, \quad Q_{x0} = -D(\nabla^2 F)_{,x}, \quad Q_{y0} = -D(\nabla^2 F)_{,y} \end{aligned} \right\} \quad (2.4)$$

从函数 $f$ 引出的量为

$$\left. \begin{aligned} w_1 &= 0, \quad \phi_{x1} = f_{,y}, \quad \phi_{y1} = -f_{,x} \\ M_{x1} &= M_{y1} = -(1-\nu)Df_{,xy}, \quad M_{xy1} = -(1/2)(1-\nu)D(f_{,yy} - f_{,xx}) \\ Q_{x1} &= -C \cdot f_{,y}, \quad Q_{y1} = C \cdot f_{,x} \end{aligned} \right\} \quad (2.5)$$

关于边界条件, 在三种典型的边界条件上<sup>[1]</sup>我们再增加对称条件:

$$\text{固支边: } w_0 = 0, \quad \phi_{n0} = 0; \quad f_{,n} = \phi_{s0} \quad (2.6a, b)$$

$$\text{简支边: } w_0 = 0, \quad M_{n0} - (1-\nu)D\phi_{s0,s} = 0; \quad f_{,n} = \phi_{s0} \quad (2.7a, b)$$

$$\text{自由边: } M_{n0} = 0, \quad M_{ns0,s} + Q_{n0} = 0; \quad f = -M_{ns0}/C \quad (2.8a, b)$$

$$\text{对称边: } \phi_{n0} = 0, \quad Q_{n0} + M_{ns0,s} = 0; \quad f = -M_{ns0}/C \quad (2.9a, b)$$

上述边界条件的特点是前两个都只与 $F$ 有关, 当剪切刚度 $C$ 无穷大时即为Kirchhoff理论的边界条件, 而(2.1)式即为薄板的振动与稳定问题的控制方程。

### 三、方法的基本原理及问题的提法

#### 1. 基本方程及边界条件的半离散

在本章的推导中为了简便, 我们引入平移算子 $T$ , 其定义为

$$T u_j = u_{j+1} \quad (a)$$

及其逆算子 $T^{-1}$ , 定义为

$$T^{-1} u_j = u_{j-1} \quad (b)$$

若将控制偏微分方程(2.1)的求解区域

$$\mathcal{D} = \{(x, y) | 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b\} \quad (c)$$

用 $N+1$ 条平行于某一轴(如 $y$ 轴)的直线族

$$x = x_i, \quad (i=1, 2, \dots, N+1) \quad (d)$$

以等区间 $h = a/N$ 沿另一轴向离散(见图1), 则定义在 $\mathcal{D}$ 内的方程(2.1)通过用差分法或加权

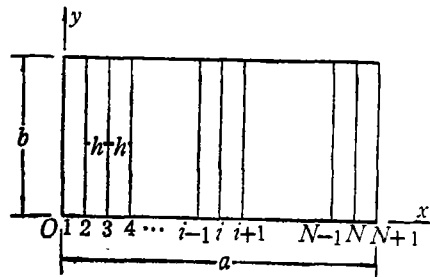


图1 矩形区域的半离散示意

残值技巧半离散, 当采用抛物线中央差分格式时可得如下定义在直线族 $x_i (i=1, 2, \dots, N)$ 上的 $2(N+1)$ 个自变量关于 $y$ 的ODE:

$$F_i^{(4)} = -2L_1 F_i'' - L_1 L_1 F_i + \lambda L_2 [F_i - (F_i'' + L_1 F_i) D/C] \quad (3.1a)$$

$$f_i'' = (-L_1 + 2C/D(1-\nu)) f_i \quad (3.1b)$$

其中差分算子 $L_1$ ,

$$L_1 = (T + T^{-1} - 2)/h^2 \quad (3.2)$$

关于算子 $L_2$ ,

$$L_2 = \begin{cases} -1 & \text{对于振动问题} \\ L_1 + 2\alpha_1 D_y (T + T^{-1}) + \alpha_2 D_y D_y & \text{对于稳定问题} \end{cases} \quad (3.3)$$

其中导数算子 $D_y$ ,

$$D_y = d/dy = (\quad)' \quad (3.5)$$

我们把与直线族平行的 $x=x_1$ 和 $x=x_{N+1}$ 边界线上的边界条件称为边界结线条件, 与直线族垂直的边界( $y=0, b$ )条件称为边界端点条件. 则方程(3.1)是在两端点边界条件下求解的, 但在两边界结线及靠近的内部几条结线上 $x_i (i=1, 2, 3, N-1, N, N+1)$ , 一般还要根据边界结线条件加以修正. 下面给出半离散后的边界条件, 这些条件不难通过对(2.6)~(2.9)的半离散并经简单运算化简后得到.

#### (1) 固支边

边界结线条件:

$$[1 - (D/C)(L_1 + D_y D_y)] F_i = 0, (T + T^{-1}) F_i = 0 \quad (3.6a)$$

$$(T + T^{-1}) f_i = 0 \quad (i=1, N+1) \quad (3.6b)$$

边界端点条件:

$$(1 - (D/C)L_1) F_i = 0, F_i' = 0 \quad (3.7a)$$

$$f_i' = (T + T^{-1}) f_i \quad (i=1, 2, \dots, N+1) \quad (3.7b)$$

#### (2) 简支边

边界结线条件:

$$F_i = 0, (T + T^{-1}) F_i = 0, (T - T^{-1}) f_i = 0 \quad (i=1, N+1) \quad (3.8a, b)$$

边界端点条件:

$$F_i = 0, F_i'' = 0, f_i' = 0 \quad (i=1, 2, \dots, N+1) \quad (3.9a, b)$$

#### (3) 自由边

边界结线条件:

$$(L_1 + \nu D_y D_y) F_i = 0, [L_1 + (2-\nu) D_y D_y] (T - T^{-1}) F_i = 0 \quad (3.10a)$$

$$f_i = \frac{D(1-\nu)}{2h \cdot C} (T - T^{-1}) F_i' \quad (i=1, N+1) \quad (3.10b)$$

边界端点条件:

$$(D_y D_y + \nu L_1) F_i = 0, [D_y D_y + (2-\nu) L_1] F_i' = 0 \quad (3.11a)$$

$$f_i = \frac{D(1-\nu)}{2h \cdot C} (T - T^{-1}) F_i' \quad (i=1, 2, \dots, N+1) \quad (3.11b)$$

#### (4) 对称边

边界结线条件:

$$(T - T^{-1}) F_i = 0, (TT - T^{-1}T^{-1}) F_i = 0 \quad (3.12a)$$

$$f_i = 0 \quad (i=1, N+1) \quad (3.12b)$$

边界端点条件:

$$F'_i=0, F''_i=0, f_i=0 \quad (i=1,2,\dots,N+1) \quad (3.13a,b)$$

## 2. ODE技巧及问题提法

我们知道,常微分方程组(3.1)中的特征值  $\lambda$  为(2.2a)或(2.2b)所示的待求常数,利用平凡ODE技巧为  $\lambda$  建立如下一阶ODE

$$\lambda' = 0 \quad (3.14)$$

另外,为了保证特征函数的有界性,还应当引入约束条件或归一化条件

$$\int_0^b F^2(x_k, y) dy = 1 \quad (3.15)$$

其中  $x_k$  为  $F$  较大的结线. 这个条件相当于如下的ODE提法:

$$V'(y) = F^2(x_k, y) \quad (3.16a)$$

$$V(0) = 0, V(b) = 1 \quad (3.16b)$$

于是可总结得到关于中厚板振动及稳定性分析的半离散非线性ODE边值问题的提法:

在给定的边界端点条件 (3.7)或(3.9)或(3.11)或(3.13) 和补充边界条件(3.16b)下求解如下标准非线性ODEs:

$$\left. \begin{aligned} \lambda' &= 0, V'_i = F_i^2 \\ F_i^{(4)} &= -2L_1 F_i'' - L_1 L_1 F_i + \lambda L_2 [F_i - (F_i'' + L_1 F_i) D/C] \\ f_i'' &= \left[ -L_1 + \frac{2C}{D(1-\nu)} \right] f_i \quad (i=1,2,\dots,N+1; 0 \leq y \leq b) \end{aligned} \right\} \quad (3.17)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{边界条件 } V(0) &= 0, V(b) = 1 \\ \text{边界端点条件 } &(3.7) \text{ 或 } (3.9) \text{ 或 } (3.11) \text{ 或 } (3.13), \quad y=0, b \end{aligned} \right\} \quad (3.18)$$

当定义在  $i=1$  和  $N+1$  两边界及其附近的结线上时, (3.17) 中第三第四两式还需根据相应的边界条件 (如(3.6)或(3.8)等等) 作修正.

(3.17) 式的求解可给出板内任意点的特征对, 即特征值和任意点的特征函数值. 但在工程中, 振动问题关心的主要是固有频率, 而稳定性分析感兴趣的是临界荷载. 因此一般情况下可不考虑关于  $f$  的ODE及相应的边界条件, 除非要计算特征对.

## 四、方法的实施及初始特征函数法

### 1. 方法的实施

图2所示板两相邻坐标边为对称边 ( $x=0; y=0$ ), 另一边为固支 ( $y=b$ ) 一边为简支 ( $x=a$ ) 并在固支边作用均布压力  $p_y$ . 我们就计算固有频率和临界荷载来说明本文方法的实施.

已说明这里  $f$  不必计算. (3.17) 中关于  $F$  的ODE当定义在  $i=1,2$  结线上时要涉及  $i=-1,0$  两虚结线  $x=x_{-1}, x=x_0$  上的值  $F_{-1}, F_0$ , 而这两虚结线上的  $F$  可由边界结线条件 (3.12a) 给出  $F_0 = F_2$  和  $F_{-1} = F_3$ . 对  $i=N+1$  的简支边  $x=x_{N+1}$ , 同样方法可由(3.8a)式给出  $F_{N+1} = 0$ , 和  $F_{N+2} = -F_N$ . 即, 在  $x=x_{N+1}$  边上

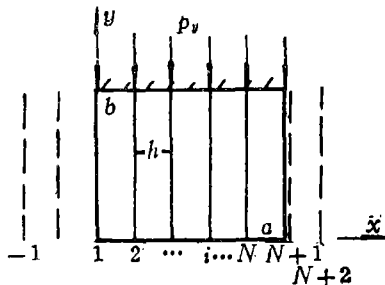


图2 两边对称一边固支一边简支板

$F_{N+1}=0$ 已知,不必再建立关于 $F$ 的求解方程.于是我们可得如下定义在 $N$ 条结线上的标准非线性ODEs:

$$\begin{aligned}
 \lambda' &= 0; \quad V'_k = F'_k \\
 F_1^{(4)} &= -4(F_2'' - F_1'')/h^2 - 2(F_3 - 4F_2 + 3F_1)/h^4 - \lambda L_3[F_1 - (D/C)(F_1'' \\
 &\quad + 2(F_2 - F_1)/h^2)] \\
 F_2^{(4)} &= -2(F_3'' - 2F_2'' + F_1'')/h^2 - (F_4 - 4F_3 + 7F_2 - 4F_1)/h^4 - \lambda L_3[F_2 \\
 &\quad - (D/C)(F_2'' + (F_3 - 2F_2 + F_1)/h^2)] \\
 &\dots\dots \\
 F_i^{(4)} &= -2L_1 F_i'' - L_1 L_1 F_i + \lambda L_3[F_i - (D/C)(F_i'' + L_1 F_i)] \\
 &\quad (i=3, 4, \dots, N-2) \\
 &\dots\dots \\
 F_{N-1}^{(4)} &= -2(F_N'' - 2F_{N-1}'' + F_{N-2}'')/h^2 - (-4F_N + 6F_{N-1} - 4F_{N-2} + F_{N-3})/h^4 \\
 &\quad - \lambda L_3[F_{N-1} - (D/C)(F_{N-1}'' + (F_N - 2F_{N-1} + F_{N-2})/h^2)] \\
 F_N^{(4)} &= -2(F_{N-1}'' - F_N'')/h^2 - (5F_N - 4F_{N-1} + F_{N-2})/h^4 - \lambda L_3[F_N \\
 &\quad - (D/C)(F_N'' + (F_{N-1} - 2F_N)/h^2)]
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

其中对于振动问题 $\lambda$ 为(2.2a)所示,算子 $L_3 = -1$ ;对于稳定性分析 $\lambda = p_y/D$ ,而算子 $L_3 = D_y D_y$ .于是,我们可将定义在 $N$ 条结线上的 $N+2$ 个ODE(4.1),连同 $y=0$ 的对称端点条件(3.13a)和 $y=b$ 的固支端点条件(3.7a),按规定格式编制输入程序输入ODE Solver,并按照如下的初始特征函数法赋初值,一般经过三五次迭代就可收敛出指定的频率值或临界荷载

## 2. 初始特征函数法

一般说来,当要求不同特征值时还需利用振型正交性等条件以便求出指定的特征值.本文采用所谓初始特征函数法可避免利用正交性等条件而能方便地求出第任意个特征值.作者在文献[3]中首次采用了这种方法并成功地用于薄板振动与稳定性分析.

所谓初始特征函数法,它的基本思想是利用ODE Solver求解非线性ODE时需赋初值,用与欲求的特征值相应的特征曲线或挠曲线(梁),或特征曲面挠曲面(板)相接近的函数(可取多项式或三角函数等)作为初值,来引导ODE Solver(本文选用COLSYS<sup>[9][7]</sup>)迭代求解后收敛出相应的特征值.由于已发展的几个ODE Solver非线性功能很强,我们在取初值时可不加区别固支还是简支,例如对于矩形中厚板,不论是四边固支还是简支,或是部分边界固支部分简支,均只须取如下初始特征函数

$$F_i^0 = \sin \frac{m\pi x_i}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (i=1, 2, \dots, N+1) \tag{4.2}$$

COLSYS一般经过不到5次迭代就逼近真正的特征函数并收敛出相应的 $\lambda_{mn}$ .

文献[3]给出了其它几种边界情况的初始特征函数.

## 五、计算实例与简单讨论

本文选用的ODE Solver——COLSYS<sup>[9,7]</sup>是目前国内线法研究人员使用得最多、也最为方便可靠的软件程序.作者还要感谢COLSYS的研制者Ascher教授提供了关于COLSYS的最新版本COLNEW<sup>[8]</sup>,并拟在以后的工作中加以开发和使用的.

在使用COLSYS时用户需给出几个参数:每个子区间的高斯配点数——NCOLP;初

始网格的子区间数——NSUBI；及每个解答分量的误差限——TOLER。

本文所有算例均取

$$NCOLP=5, NSUBI=1$$

$$TOLER=0.01$$

其中误差限只控制 $\lambda$ ,  $V$ 及 $F$ 而不控制 $F$ 的各阶导数的解答分量。另外, 关于 $\lambda$ 和 $V$ 的初值恒取 $\lambda^0=V_i^0=1$ 。计算采用单精度, 微机为IBM-PC型。

例1 四边简支矩形中厚板的固有频率及临界荷载 $p_x$

考虑对称性, 取1/4块板并织上 $N+1=5$ 条网线如图3示。令固有频率系数

$$k_\omega = \lambda \cdot \frac{b^4}{\pi^4} = \frac{\rho\omega^2}{D} \frac{b^4}{\pi^4}$$

临界荷载系数

$$k_N = \lambda \cdot \frac{b^2}{\pi^2} = \frac{p_x}{D} \frac{b^2}{\pi^2}$$

以及剪切系数  $\delta_b = \frac{D}{C} \cdot \pi^2 \cdot b^2$

如求关于坐标轴两两对称的特征曲面相应的特征值时, 可取初始特征函数

$$F_i^0 = \cos \frac{m\pi x_i/2}{a/2} \cos \frac{n\pi y/2}{b/2} \quad (m, n=1, 3, 5, \dots) \quad (5.1)$$

两两反对称时

$$F_i^0 = \sin \frac{m\pi x_i/2}{a/2} \sin \frac{n\pi y/2}{b/2} \quad (m, n=2, 4, 6, \dots) \quad (5.2)$$

当求仅在 $x$ 方向(或 $y$ 方向)为正对称时可取

$$\left. \begin{aligned} F_i^0 &= \cos \frac{m\pi x_i/2}{a/2} \sin \frac{n\pi y/2}{b/2} \quad (m=1, 3, 5, \dots; n=2, 4, 6, \dots) \\ \text{或} \quad F_i^0 &= \sin \frac{m\pi x_i/2}{a/2} \cos \frac{n\pi y/2}{b/2} \quad (m=2, 4, \dots, 6, \dots; n=1, 3, 5, \dots) \end{aligned} \right\} \quad (5.3)$$

当 $\delta_b=0.2$ 时, 就不同长宽比 $b/a$ 算得前三个固有频率系数 $k_\omega$ 与解析解<sup>[9]</sup>比较见表1。当 $b/a=1$ 的方板, 就不同厚跨比的剪切系数 $\delta_b$ 求得前三个频率系数与解析解比较在表2中。关于临界荷载的计算, 就 $a/b$ 不同比值及不同的剪切系数 $\delta_b$ , 求得临界荷载系数 $k_N$ 与解析解比

表1 四边简支中厚板 $\delta_b=0.2$ 时不同长宽比的前三个频率系数与解析解比较

$k_\omega$ \ $b/a$	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	2.0
MOL	0.895	1.089	1.445	2.008	2.826	12.309
( $N=4$ )	1.089	2.008	3.951	7.295	12.452	24.398
	1.445	3.951	9.582	11.137	24.398	46.709
解析解[9]	0.895	1.092	1.454	2.025	2.857	12.50
	1.092	2.025	4.001	7.403	12.50	24.62
	1.454	4.001	9.728	11.17	24.62	46.94

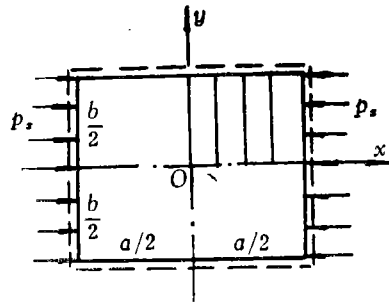


图3 四边简支板网线划分

表2 四边简支中厚方板不同剪切系数的前3个频率系数 $k_\omega$ 与解析解比较

$k_\omega \backslash \delta_b$	0.0	0.05	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
MOL ( $N=4$ )	3.949	3.592	3.294	2.200	1.801	1.525	1.322
	24.968	19.908	16.596	8.305	6.230	4.985	4.154
	63.184	45.214	35.202	15.118	10.952	8.586	7.061
解析解[9]	4.000	3.636	3.333	2.222	1.818	1.538	1.333
	25.00	20.00	16.67	8.333	6.250	5.000	4.167
	64.00	45.71	35.56	15.24	11.03	8.649	7.111

表3 四边简支矩形中厚板在均匀纵向压缩下的临界荷载系数 $k_N$ 的比较

$\delta_b$		$a/b$	0.4	0.8	1.0	1.4	1.8	2.0
本文方法		0.0	8.380	4.161	3.949	4.395	3.998	3.949
		0.05	6.154	3.690	3.592	3.902	3.599	3.592
		0.1	4.862	3.315	3.294	3.449	3.272	3.294
		0.2	3.424	2.756	2.826	2.798	2.768	2.827
		0.4	2.152	2.060	2.076	2.032	2.036	2.030
解析解[9]		0.0	8.410	4.203	4.000	4.470	4.045	4.000
		0.05	6.172	3.725	3.636	3.933	3.638	3.636
		0.1	4.875	3.345	3.333	3.474	3.306	3.333
		0.2	3.433	2.779	2.857	2.817	2.795	2.845
		0.4	2.156	2.075	2.083	2.044	2.046	2.041

较在表3。

从表1和表2的结果可见, 只取 $N=4$ , 本文方法经三五次迭代就收敛出具有足够精确度的前3个频率。表3关于临界荷载的计算结果也同样令人满意。值得注意的是当剪切系数 $\delta_b=0$ , 即剪切刚度 $C \rightarrow \infty$ 时, 无论是振动(表2)还是稳定性分析(表3), 本文的MOL均收敛出薄板相应的解。即本文方法是厚薄板通用的。

例2 对边固支另对边简支矩形板的固有频率及临界荷载 $p_y$

仍取 $1/4$ 板织上 $N+1$ 条网线见图4。当 $N=4$ 时就不同长宽比 $a/b$ 和剪切系数 $\delta_b$ 算得板的基频系数与解析解<sup>[9]</sup>比较见表4。当荷载作用在固支边上时求得临界荷载系数与解析解比较

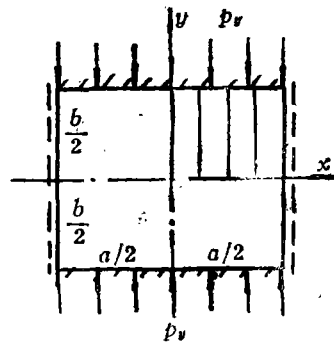


图4 对边固支另对边简支板网线划分

表4 对边固支另对边简支中厚板第一固有频率系数 $k_\omega$ 与解析解比较( $N=4$ )

$\delta_b \backslash b/a$	0.4		0.6		0.8		1.0		2.0	
	MOL	解析解[9]	MOL	解析解[9]	MOL	解析解[9]	MOL	解析解[9]	MOL	解析解[9]
0.0	5.557	5.562	6.131	6.162	7.102	7.132	8.548	8.604	30.238	30.76
0.01	5.281	5.287	5.829	5.846	6.720	6.753	8.069	8.131	28.098	28.62
0.05	4.402	4.415	4.830	4.861	5.534	5.593	6.611	6.710	22.136	22.70
0.2	2.705	2.773	2.945	3.007	3.364	3.466	4.023	4.172	12.815	13.21
0.4	1.786	1.819	1.949	2.013	2.243	2.341	2.710	2.839	8.358	8.585
0.8	1.066	1.096	1.175	1.228	1.375	1.446	1.684	1.767	4.967	5.075

表5 加载边固支另两边简支中厚板在均匀压缩下的临界荷载系数 $k_N$ 的比较

$a/b$	$\delta_b$	0.0		0.05		0.1		0.2	
		MOL	解析解[9]	MOL	解析解[9]	MOL	解析解[9]	MOL	解析解[9]
1.8		5.137	5.179	4.375	4.413	3.814	3.849	3.034	3.059
2.0		4.802	4.847	4.177	4.217	3.696	3.731	2.992	3.015
2.5		4.468	4.522	3.996	4.041	3.597	3.633	2.920	2.943

见表5。为了考察方法的收敛性，取线数 $N=4, 8$ 和 $16$ 三种疏密的网线划分算出三种不同长宽比的基频见表6。可见，收敛性也令人满意。

上面两例中当 $N=4$ 时，振动或稳定性分析每次计算一般约为10分钟，当 $N=16$ 时则约需1小时。另外，具体计算时应对几种可能的振动或失稳情况选择相应的初始特征函数分别计算后，取得小的特征值即给出临界荷载或第一固有频率，其次的为第二固有频率等依次类推，这与解析求解或其它数值方法相同。

表6  $\delta_b=0.1$ 时基频系数——解的收敛性

$b/a$	$N$	4	8	16	解析解
0.2		3.467	3.468	3.468	3.472
0.4		3.641	3.644	3.645	3.662
0.6		3.978	3.985	3.986	4.025

## 六、结 语

计算表明，本文方法求解中厚的固有频率和临界荷载相当有效。这种方法原理简单，厚薄板通用，只须编制简短的输入程序利用 ODE Solver 在一般微机上以较少的线条和计算时间就可算出具有足够精度的固有频率或临界荷载，而不需要其它方法所要求的振型正交性等条件，是一便于工程应用，计算稳定可靠，具有竞争力的工程数值计算方法。

## 参 考 文 献

- [1] 胡海昌, 《弹性力学的变分原理及其应用》, 科学出版社, 北京 (1981).
- [2] Ascher, U. and R. D. Russell, Reformulation of boundary value problems into "standard" form, *SIAM Rev.*, 23 (1981), 238—254.
- [3] 唐寿高, 薄板的振动问题的线法, 江西工业大学学报, 13(2) (1991), 273—279.
- [4] Liskovets, O. A., The method of lines (Review), *Differential Equations*, 1 (1965), 1308—1323. (English version)
- [5] Xanthis, L. S., The numerical method of lines and ODE solvers can provide a new powerful computational fracture mechanics tool, Int. Conference on Computational Mechanics, Tokyo, Japan (1986).
- [6] Ascher, U., J. Christiansen and R. D. Russell, Algorithm 569, COLSYS: collocation software for boundary-value ODEs D2, *ACM Trans. Math. Software*, 7(2) (1981), 223—229.
- [7] Ascher, U., J. Christiansen and R. D. Russell, Collocation software for boundary-value ODEs, *ACM Trans. Math. Software*, 7(2) (1981), 209—222.
- [8] Bader, G. and U. Ascher, A new basis implementation for a mixed order boundary value ODE solver, *SIAM J. Sci. Stat. Comput.*, 8 (1987), 483—500.
- [9] 中科院力学所, 《夹层板壳的弯曲、稳定和振动》, 科学出版社, 北京 (1977).



## The Vibration and Stability Analysis of Moderate Thick Plates by the Method of Lines

Tang Shou-gao

*(Tongji University, Shanghai)*

Yuan Si

*(Qinghua University, Beijing)*

### Abstract

The method of lines based on Hu Hai-chang's theory for the vibration and stability of moderate thick plates is developed. The standard nonlinear ordinary differential equation (ODE) system for natural frequencies and critical load is given by use of ODE techniques, and then any indicated eigenvalue could be obtained directly from ODE solver by employing the so-called initial eigenfunction technique instead of the mode orthogonality condition. Numerical examples show that the present method is very effective and reliable.

**Key words** moderate thick plate, vibration, stability, method of lines