

考虑剪切变形的双曲扁壳 理论基本解的计算*

吕品 黄茂光

(合肥 中国科学技术大学, 1990年12月25日收到)

摘 要

在文[1]的基础上, 本文详细地给出了考虑剪切变形的双曲面扁壳基本解的数值计算所需要的公式和算法, 这是文[1]的结果得以推广应用的基础. 我们还编制了相应的计算程序, 作为算例, 分别给出了具有正、负和零高斯曲率的双曲面扁壳受法向集中载荷下的位移和内力的数值结果.

关键词 基本解 考虑剪切变形扁壳 数值计算

一、引 言

分析受集中载荷的扁壳在受力附近的位移和内力的变化, 在工程实际中具有很重要的应用价值. 在经典薄壳理论中, 已有许多研究结果. 对于计入剪切变形的扁壳理论, 利用作者导出的基本解^[1], 也可以进行该类扁壳在集中荷载附近的位移和应力场的分析.

由于文[1]中导出的基本解形式较繁, 在数值计算中需要进行一些交换和处理. 文中详细地讨论了在不同情况下数值求解的方案, 给出了相应的公式. 这些工作较好地解决了文[1]的结果在进行数值计算中所遇到的困难, 是文[1]中导出的基本解推广应用中所不可缺少的重要环节. 我们还编制了相应的计算程序, 并给出若干数值计算结果.

二、基本方程

引入五个位移函数 $\Phi_j(x, y)$ ($j=1, 2, \dots, 5$), 计入剪应变的任意二次型双曲面扁壳的五个平衡方程可表示成^[1]

$$\mathcal{L}\{\Phi^*\} = \{P\} \quad (2.1)$$

其中 $\{\Phi^*\} = [\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \Phi_4, \Phi_5]^T$, $\{P\} = [p_x, p_y, p_z, m_x, m_y]^T / D$

微分算子

$$\mathcal{L} = \left[\nabla^2 - (1-\nu)^2 \frac{B}{C} \nabla^2 \left(\nabla^2 - \frac{C}{D} \right) \right] \left(\nabla^2 - \frac{2}{1-\nu} \frac{C}{D} \right) \quad (2.2)$$

* 何福保推荐.
国家自然科学基金资助课题.

$$\text{式中 } \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad \nabla_i^2 = k_2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + k_1 \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

B, C, D 分别是拉压、剪切和弯曲刚度, k_1, k_2 分别是扁壳在 x, y 方向的主曲率, ν 是泊松比, p_x, p_y, p_z, m_x, m_y 分别为作用在扁壳上的分布荷载和力矩分量。当 $\Phi_j(x, y)$ 求出后, 位移可由下式给出

$$\{U\} = [F]\{\Phi^*\} \quad (2.3)$$

$$\text{其中 } \{U\} = [u, v, w, \psi_x, \psi_y]^T$$

而 5×5 阶的微分算子矩阵 $[F]$ 的元素在附录中给出。内力分量可由下式给出

$$\{T\} = [R]\{\Phi^*\} \quad (2.4)$$

其中

$$\{T\} = [N_x, N_y, N_{xy}, Q_x, Q_y, M_x, M_y, M_{xy}]^T$$

微分算子矩阵 $[R]$ 的元素在附录中给出。

设 $\Phi(x, y)$ 是微分算子 \mathcal{L} 的基本解, 即 $\Phi(x, y)$ 满足下面的微分方程

$$\mathcal{L}[\Phi(x, y)] = \delta(x, y) \quad (2.5)$$

式中 $\delta(x, y)$ 是 Dirac δ -函数, 则(2.1)为

$$\{\Phi^*\} = \iint \Phi(x-\xi, y-\eta) \{P(\xi, \eta)\} d\xi d\eta \quad (2.6)$$

求得 $\{\Phi^*\}$ 后, 位移和内力分量可分别由(2.3)、(2.4)求出。因此, 问题归结为求解满足方程(2.5)的基本解 $\Phi(x, y)$ 。该基本解已为作者得到^[1], 为

$$\Phi(x, y) = \int_0^{2\pi} \varphi(\rho) d\theta \quad (2.7)$$

$$\varphi(\rho) = \sum_{j=1}^3 A_j \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(r_j \rho)^{2m+2}}{(2m+2)!} [\gamma + \ln |r_j \rho| + i\beta_j - \psi(2m+3)] \quad (2.8)$$

式中

$$\left. \begin{aligned} \rho &= x \cos \theta + y \sin \theta \\ r_1 &= a_1, \quad r_2 = \eta_1 + i\eta_2, \quad r_3 = \eta_1 - i\eta_2 \\ A_1 &= [4\pi^2 r_1^4 (r_1^2 - r_2^2)(r_1^2 - r_3^2)]^{-1} \\ A_2 &= [4\pi^2 r_2^4 (r_2^2 - r_1^2)(r_2^2 - r_3^2)]^{-1} \\ A_3 &= [4\pi^2 r_3^4 (r_3^2 - r_1^2)(r_3^2 - r_2^2)]^{-1} \\ \beta_1 &= 0, \quad \beta_2 = \arctg |\eta_2/\eta_1|, \quad \beta_3 = -\beta_2 \\ \psi(m+1) &= \sum_{s=1}^m \frac{1}{s}, \quad \psi(1) = 0, \quad \gamma = 0.51721 \quad (\text{欧拉常数}) \\ a_1 &= \left(\frac{2}{1-\nu} \frac{C}{D} \right)^{1/2}, \quad a_2 = (k_1 \sin^2 \theta + k_2 \cos^2 \theta) (1-\nu^2) \frac{B}{C}, \quad a_3 = a_2 \frac{C}{D} \\ \eta_1 &= (\sqrt{a_3^2/4 + a_2/4})^{1/2}, \quad \eta_2 = (\sqrt{a_3^2/4 - a_2/4})^{1/2} \end{aligned} \right\} \quad (2.9)$$

联立(2.7)、(2.8)就得到了满足(2.5)的解 $\Phi(x, y)$ 。为了求出位移和内力分量, 还要求 $\Phi(x, y)$ 的有关导数

$$\frac{\partial^{k+l}\Phi(x,y)}{\partial x^k \partial y^l} = \int_0^{2\pi} \cos^k \theta \sin^l \theta \frac{d^{k+l}}{d\rho^{k+l}} \varphi(\rho) d\theta \quad (k, l=1, 2, \dots) \quad (2.10)$$

三、求基本解的数值方法

1. 基本解各阶导数的表示

在算子矩阵 $[F]$, $[R]$ 中, 有对变量 x, y 的 9 阶导数. 通过 (2.10) 式, 这些导数值可转化成对 $\varphi(\rho)$ 导数的数值积分. 为便于数值计算, 可把 (2.8) 式化成另一种形式^[1]

$$\varphi(\rho) = -\frac{1}{2} \left\{ \rho^2 \ln |\rho| \sum_{j=1}^3 r_j^2 A_j + (2 \ln |\rho| + 3) \sum_{j=1}^3 A_j + \sum_{j=1}^3 A_j \chi_j \right\} \quad (3.1)$$

其中

$$\chi_j(r_j \rho) = \exp[r_j \rho] E_1(r_j \rho) + \exp[-r_j \rho] E_1(-r_j \rho) - i\pi [\operatorname{ch}(r_j \rho) - \operatorname{sh}(r_j \rho) \cdot \operatorname{sgn}(\rho)] \operatorname{sgn}(r_j) \quad (j=1, 2, 3) \quad (3.2)$$

式中 $E_1(z)$ 称为指数积分, $\operatorname{sgn}(r_j)$ 定义为

$$\operatorname{sgn}(r_j) = \begin{cases} 1 & j=1, 2 \\ -1 & j=3 \end{cases} \quad (3.3)$$

由文[2]有

$$\frac{d^n}{dz^n} [e^z E_1(z)] = \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} [e^z E_1(z)] + \frac{(-1)^n (n-1)!}{z^n} \quad (n=1, 2, \dots) \quad (3.4)$$

所以, 通过 (3.2) 式可得

$$d\chi_j/d\rho = r_j \lambda_j(r_j \rho) - 2/\rho \quad (j=1, 2, 3) \quad (3.5)$$

其中

$$\lambda_j(r_j \rho) = \exp[r_j \rho] E_1(r_j \rho) - \exp[-r_j \rho] E_1(-r_j \rho) - i\pi [\operatorname{sh}(r_j \rho) - \operatorname{ch}(r_j \rho) \operatorname{sgn}(\rho)] \operatorname{sgn}(r_j) \quad (j=1, 2, 3) \quad (3.6)$$

按 χ_j 的同样推导, 也有

$$d\lambda_j(r_j \rho)/d\rho = r_j \chi_j(r_j \rho) \quad (j=1, 2, 3) \quad (3.7)$$

另外成立如下的关系式

$$\left. \begin{aligned} \sum_{j=1}^3 r_j^2 A_j &= \frac{1}{4\pi^2} - \frac{1}{r_1^2 r_2^2 r_3^2} \\ \sum_{j=1}^3 r_j^4 A_j &= \sum_{j=1}^3 r_j^6 A_j = 0, \quad \sum_{j=1}^3 r_j^8 A_j = \frac{1}{4\pi^2} \end{aligned} \right\} \quad (3.8)$$

由 (3.1) ~ (3.8) 式, 可以得到 $\varphi(\rho)$ 的各阶导数:

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{d\varphi}{d\rho} &= -\frac{1}{2} \left\{ \rho(2\ln|\rho|+1) \sum_{j=1}^3 r_j^2 A_j + \sum_{j=1}^3 A_j r_j \lambda_j \right\} \\
 \frac{d^2\varphi}{d\rho^2} &= -\frac{1}{2} \left\{ (2\ln|\rho|+3) \sum_{j=1}^3 r_j^2 A_j + \sum_{j=1}^3 A_j r_j^2 \chi_j \right\} \\
 \frac{d^{2k+1}\varphi}{d\rho^{2k+1}} &= -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^3 A_j r_j^{2k+1} \lambda_j \\
 \frac{d^{2(k+1)}\varphi}{d\rho^{2(k+1)}} &= -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^3 A_j r_j^{2(k+1)} \chi_j \\
 \frac{d^0\varphi}{d\rho^0} &= -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^3 A_j r_j^0 \lambda_j + \frac{1}{4\pi^2} \frac{1}{\rho}
 \end{aligned} \right\} \quad (k=1, 2, 3) \quad (3.9)$$

因此, 计算基本解及其各阶导数值的问题, 可以转化为计算函数 $\chi_j, \lambda_j (j=1, 2, 3)$, 使问题得到进一步的简化和明确。

2. 函数 χ_j, λ_j 的计算

由于 r_2, r_3, A_2, A_3 互为共轭复数, 所以由(3.2)和(3.6)式可知, $\chi_2, \chi_3; \lambda_2, \lambda_3$ 也互为共轭复函数。因此, 在数值计算中只要求出 χ_1, λ_1 和 χ_2, λ_2 , 不必再计算 χ_3, λ_3 。

因为 r_1 是正实数, 由(3.2)和(3.6)及指数积分的性质, 有

$$\chi_1 = \begin{cases} \exp[r_1\rho]E_1(r_1\rho) - \exp[-r_1\rho]Ei(r_1\rho) & \rho > 0 \\ -\exp[r_1\rho]Ei(|r_1\rho|) + \exp[-r_1\rho]E_1(|r_1\rho|) & \rho < 0 \end{cases} \quad (3.10)$$

$$\lambda_1 = \begin{cases} \exp[r_1\rho]E_1(r_1\rho) + \exp[-r_1\rho]Ei(r_1\rho) & \rho > 0 \\ -\exp[r_1\rho]Ei(|r_1\rho|) - \exp[-r_1\rho]E_1(|r_1\rho|) & \rho < 0 \end{cases} \quad (3.11)$$

指数积分 $E_1(x), Ei(x)$ 的数值求解可应用文献[3,4]的近似公式。

由于 r_2 是复数, 函数 χ_2, λ_2 的数值求解比较困难。将(3.2)和(3.6)中的指数积分和双曲函数都展开成级数形式并化简后有

$$\chi_j = -2 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(r_j\rho)^{2m}}{(2m)!} [\gamma + \ln|r_j\rho| + i\beta_j - \psi \cdot 2m + 1] \quad (3.12)$$

$$\lambda_j = -2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(r_j\rho)^{2m-1}}{(2m-1)!} [\gamma + \ln|r_j\rho| + i\beta_j - \psi \cdot 2m] \quad (3.13)$$

如果 $|r_2\rho|$ 较小, 利用上式求解 χ_2, λ_2 可以很快地得到收敛的结果, 如果 $|r_2\rho|$ 较大, 用上两式求解, 则会引起较大误差, 而需由下式求得

$$\chi_2 = \begin{cases} \exp[r_2\rho]E_1(r_2\rho) + \exp[-r_2\rho]E_1(-r_2\rho) - \pi i \exp[-r_2\rho] & \rho > 0 \\ \exp[r_2\rho]E_1(r_2\rho) + \exp[-r_2\rho]E_1(-r_2\rho) + \pi i \exp[r_2\rho] & \rho < 0 \end{cases} \quad (3.14)$$

$$\lambda_2 = \begin{cases} \exp[r_2\rho]E_1(r_2\rho) - \exp[-r_2\rho]E_1(-r_2\rho) + \pi i \exp[-r_2\rho] & \rho > 0 \\ \exp[r_2\rho]E_1(r_2\rho) - \exp[-r_2\rho]E_1(-r_2\rho) - \pi i \exp[r_2\rho] & \rho < 0 \end{cases} \quad (3.15)$$

其中 $\exp[r_2\rho]E_1(r_2\rho)$, $\exp[-r_2\rho]E_1(-r_2\rho)$ 由下面近似公式求解^[2]若 $x > 10$ 或 $y > 10$, 有 ($z = x + iy$)

$$e^z E_1(z) = \frac{0.711093}{z + 0.415775} + \frac{0.278518}{z + 2.29428} + \frac{0.010389}{z + 6.2900} \quad (3.16)$$

若 $|z| > 15$, ($x > 10$, $y > 10$), 有

$$e^z E_1(z) = \frac{1}{z} \left\{ 1 - \frac{1}{z} + \frac{1 \cdot 2}{z^2} - \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{z^3} + \dots \right\} \quad (3.17)$$

若 $4 \leq |z| \leq 15$, ($x > 10$, $y > 10$), 有

$$e^z E_1(z) = \left(\frac{1}{z+1} - \frac{1}{1+z} + \frac{1}{z+2} - \frac{2}{1+z} + \frac{2}{z+3} - \frac{3}{1+z} + \frac{3}{z+4} - \dots \right) \quad (3.18)$$

若 $|z| < 4$, 则可直接用(3.12)、(3.13)计算函数 χ_2 , λ_2 . 对不同的区间, 在(3.17)、(3.18)中取不同的项, 可保证精度小于 10^{-4} 以下.

求出了函数 χ_1 , χ_2 , λ_1 , λ_2 以后, 由(3.9)很容易得到 $\varphi(\rho)$ 各阶导数的值, 如

$$\begin{aligned} \frac{d^{2k+1}\varphi}{d\rho^{2k+1}} &= -\frac{1}{2} [A_1 r_1^{2k+1} \lambda_1 + 2 \operatorname{Re}(A_2 r_2^{2k+1} \lambda_2)] \\ \frac{d^{2(k+1)}\varphi}{d\rho^{2(k+1)}} &= -\frac{1}{2} [A_1 r_1^{2(k+1)} \chi_2 + 2 \operatorname{Re}(A_2 r_2^{2(k+1)} \chi_2)] \end{aligned} \quad (k=1, 2, 3)$$

$\varphi(\rho)$ 其余阶导数也可类似得到.

3. 数值积分的处理

在计算基本解时, 还要计算形如(2.10)式的定积分. 这可用分段高斯积分来处理. 计算过程中, 将 $(0, 2\pi)$ 分成四个区间, 每个区间内用五点高斯积分公式, 可达到很满意的结果.

当高斯曲率为负值时, 由(2.9)可知, 对某些 θ 值, 会使 $r_2 = 0$. 因此, 积分会出现奇异性. 为避免这种情况, 先确定出使 $r_2 = 0$ 的 θ 值 θ_0 . 在(2.9)的 a_2 中, 若 $k_1 k_2 \leq 0$, 则由

$$k_1 \sin^2 \theta_0 + k_2 \cos^2 \theta_0 = 0$$

可得 $\operatorname{tg}^2 \theta_0 = |k_2/k_1|$, $\operatorname{tg} \theta_0 = \pm \sqrt{|k_2/k_1|}$

$$\text{即 } \theta_0 = \begin{cases} \arctg \sqrt{|k_2/k_1|} \\ \pi \pm \arctg \sqrt{|k_2/k_1|} \\ 2\pi - \arctg \sqrt{|k_2/k_1|} \end{cases} \quad (3.19)$$

因此, $(0, 2\pi)$ 可被划分成四个小区间, 在这些区间里分别进行数值积分, 就可避免奇异性.

四、数值结果

利用前几节的公式和处理方案, 编制了求解考虑剪切变形双曲面扁壳基本解的计算程序, 并计算了受法向集中荷载作用的扁壳在不同的高斯曲率下沿坐标 $x=0$ 和 $y=0$ 的位移和内力的变化, 将计算结果绘制成图1~图14的曲线. 图中横坐标取无量纲量 βr ($\beta r = [\sqrt{12(1-\nu^2)} k_1/h]^{1/2} \sqrt{x^2 + y^2}$), 纵坐标为广义内力或广义位移的无量纲形式, 几何形状参数变量 $\tau = k_2/k_1$.

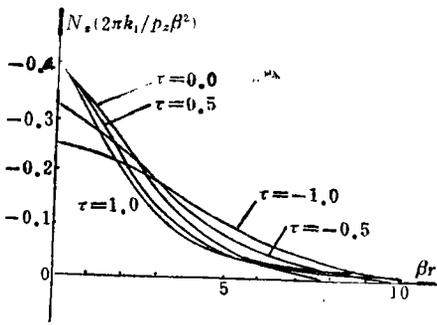


图1 薄膜力 $N_x(y=0, \tau=k_2/k_1)$

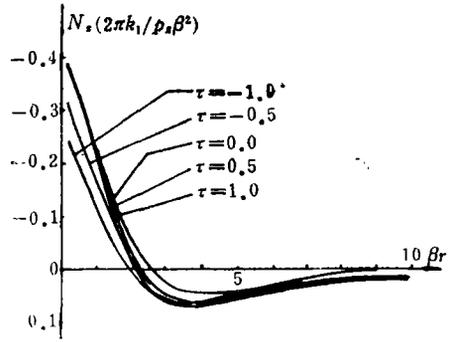


图2 薄膜力 $N_x(x=0, \tau=k_2/k_1)$

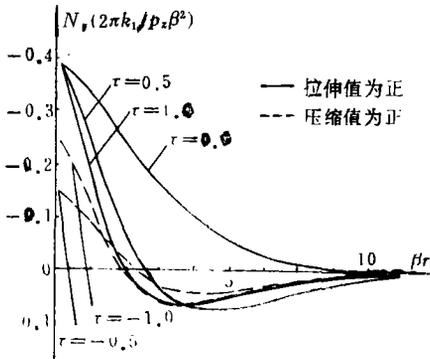


图3 薄膜力 $N_y(y=0, \tau=k_2/k_1)$

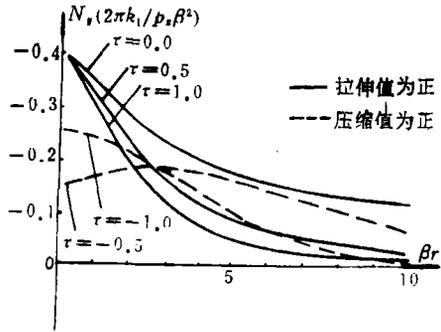


图4 薄膜力 $N_y(x=0, \tau=k_2/k_1)$

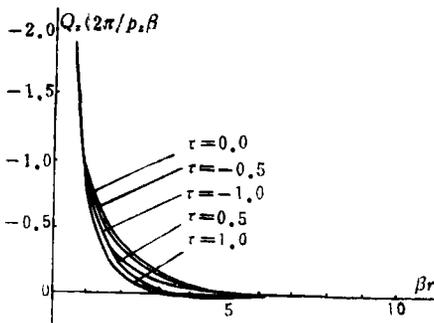


图5 横向剪力 $Q_x(y=0, \tau=k_2/k_1)$

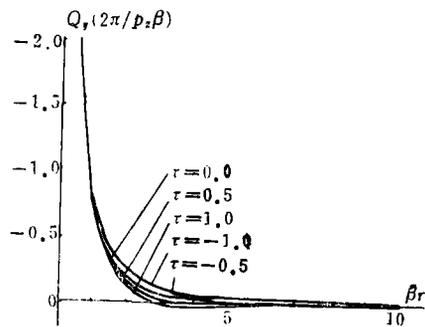


图6 横向剪力 $Q_y(x=0, \tau=k_2/k_1)$

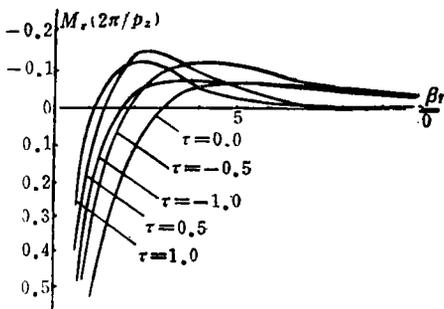


图7 弯曲内力 $M_x(y=0, \tau=k_2/k_1)$

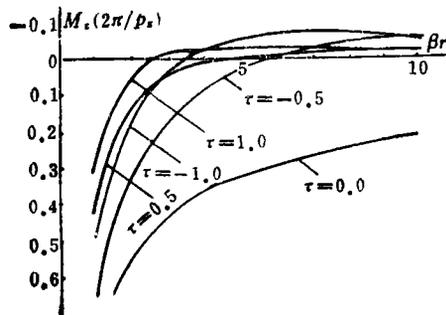


图8 弯曲内力 $M_x(x=0, \tau=k_2/k_1)$

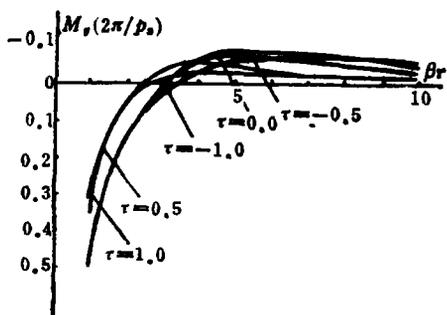


图9 弯曲内力 $M_y(y=0, \tau=k_2/k_1)$

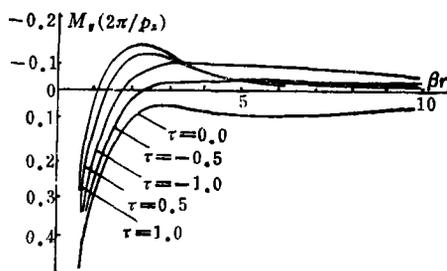


图10 弯曲内力 $M_y(x=0, \tau=k_2/k_1)$

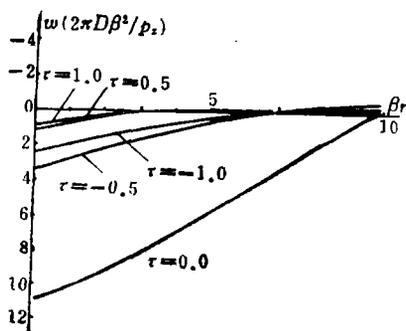


图11 法向位移 $w(y=0, \tau=k_2/k_1)$

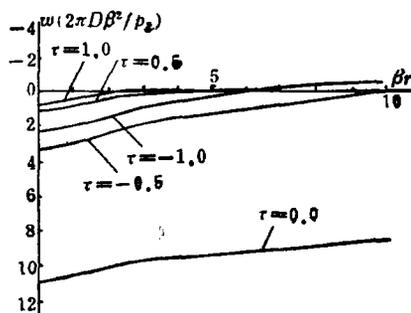


图12 法向位移 $w(x=0, \tau=k_2/k_1)$

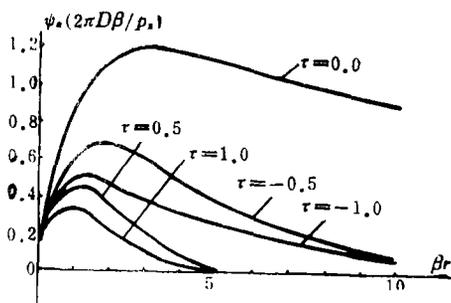


图13 转角 $\psi_x(y=0, \tau=k_2/k_1)$

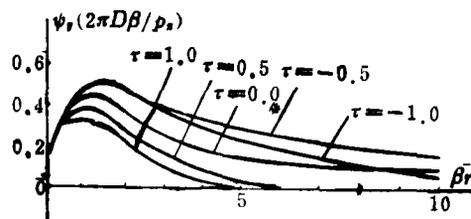


图14 转角 $\psi_y(x=0, \tau=k_2/k_1)$

根据计算结果绘制的内力和位移随 βr 及 τ 的变化曲线与薄壳理论得到的曲线^[5]具有相似的变化趋势,只是弯矩的曲线有些差异,这是考虑了剪应变而增加了两个独立变量 ψ_x 和 ψ_y 所致。图13和图14分别给出了 ψ_x 沿 $y=0$, ψ_y 沿 $x=0$ 随 βr 及 τ 的变化曲线,这是经典薄壳理论所不能得到的。从图中可以看出,高斯曲率对 ψ_x , ψ_y 的影响很明显。尤其对于柱壳,转角衰减得很慢。

五、结 论

本文对文[1]导出的基本解进行了简化,并详细给出了数值计算公式和处理方案,这些都是文[1]的基本解在数值计算中必不可少的步骤。因此,本文的工作使得文[1]的结果更具有实用意义。

文中给出的算例表明,可以根据基本解的数值计算结果,对工程实际中常遇到的扁壳受

集中荷载作用问题进行辅助分析。还可用文[1]的基本解作为边界积分方程的核函数,并结合本文给出的数值处理方法,分析复杂边界的扁壳在分布荷载作用下的弯曲问题^[6]。

附 录

令

$$\begin{aligned} D_1 &= \frac{\partial}{\partial x}, & D_2 &= \frac{\partial}{\partial y}, & \bar{L}_1 &= \nabla^2 - \frac{2}{1-\nu} \frac{C}{D}, & \bar{L}_2 &= \nabla^2 - \frac{C}{D} \\ \bar{L}_3 &= \nabla^4 - (1-\nu^2) \frac{B}{C} \nabla_k^4, & \bar{L}_4 &= D_1^2 + \frac{2}{1-\nu} D_2^2, & \bar{L}_5 &= D_2^2 + \frac{2}{1-\nu} D_1^2 \\ \bar{L}_6 &= (k_1^2 + k_2^2 + 2\nu k_1 k_2) D_1^2 + 2(1+\nu) k_1^2 D_2^2 \\ \bar{L}_7 &= (k_1^2 + k_2^2 + 2\nu k_1 k_2) D_2^2 + 2(1+\nu) k_2^2 D_1^2 \\ \bar{L}_8 &= (k_1 + \nu k_2) D_1^3 + [(2+\nu)k_1 - k_2] D_1 D_2^2 \\ \bar{L}_9 &= (k_2 + \nu k_1) D_2^3 + [(2+\nu)k_2 - k_1] D_1^2 D_2 \\ \nabla_k^2 &= k_2 \partial^2 / \partial x^2 + k_1 \partial^2 / \partial y^2 = k_2 D_1^2 + k_1 D_2^2 \end{aligned}$$

对称微分算子矩阵 $[F]$ 的元素为

$$\begin{aligned} F_{11} &= \left[\frac{D}{B} \nabla^4 \bar{L}_4 - \frac{D}{C} \bar{L}_2 \bar{L}_6 \right] \bar{L}_1 \\ F_{12} &= \left[-\frac{D}{B} \frac{1+\nu}{1-\nu} \nabla^4 + \frac{D}{C} (k_1 - k_2)^2 \bar{L}_2 \right] \bar{L}_1 D_1 D_2 \\ F_{13} &= \frac{D}{C} \bar{L}_1 \bar{L}_2 \bar{L}_8, & F_{14} &= \bar{L}_1 \bar{L}_8 D_1, & F_{15} &= \bar{L}_1 \bar{L}_8 D_2 \\ F_{22} &= \left[\frac{D}{B} \nabla^4 \bar{L}_5 - \frac{D}{C} \bar{L}_2 \bar{L}_7 \right] \bar{L}_1 \\ F_{23} &= \frac{D}{C} \bar{L}_1 \bar{L}_2 \bar{L}_9, & F_{24} &= \bar{L}_1 \bar{L}_9 D_1, & F_{25} &= \bar{L}_1 \bar{L}_9 D_2 \\ F_{33} &= -\frac{D}{C} \nabla^4 \bar{L}_1 \bar{L}_2, & F_{34} &= -\nabla^4 \bar{L}_1 D_1, & F_{35} &= -\nabla^4 \bar{L}_1 D_2 \\ F_{44} &= \bar{L}_3 \left(\bar{L}_4 - \frac{2}{1-\nu} \frac{C}{D} \right) + \frac{2}{1-\nu} \frac{C}{D} \nabla^4 D_2^2 \\ F_{45} &= -\frac{1+\nu}{1-\nu} \bar{L}_3 D_1 D_2 - \frac{2}{1-\nu} \frac{C}{D} \nabla^4 D_1 D_2 \\ F_{55} &= \bar{L}_3 \left(\bar{L}_5 - \frac{2}{1-\nu} \frac{C}{D} \right) + \frac{2}{1-\nu} \frac{C}{D} \nabla^4 D_1^2 \end{aligned}$$

算子矩阵 $[R]$ 的元素为

$$\begin{aligned} R_{1j} &= B[F_{1j} D_1 + \nu F_{2j} D_2 + (k_1 + \nu k_2) F_{3j}] \\ R_{2j} &= B[\nu F_{1j} D_1 + F_{2j} D_2 + (k_2 + \nu k_1) F_{3j}] \\ R_{3j} &= (1-\nu) B[F_{1j} D_2 + F_{2j} D_1] / 2, & R_{4j} &= C[F_{3j} D_1 + F_{4j}] \\ R_{5j} &= C[F_{3j} D_2 + F_{5j}], & R_{6j} &= D[F_{4j} D_1 + \nu F_{5j} D_2] \\ R_{7j} &= D[\nu F_{4j} D_1 + F_{5j} D_2], & R_{8j} &= (1-\nu) D[F_{4j} D_2 + F_{5j} D_1] / 2 \\ & & & (j=1, 2, 3, 4, 5) \end{aligned}$$

参 考 文 献

- [1] 吕品、黄茂光, 考虑剪切变形的任意二次型双曲面扁壳的基本解, 中国科学(A), (5) (1991), 501—510.
- [2] Abramowitz, M. and I. A. Stegun (Eds.), *Handbook of Mathematical Functions*, Fifth Printing, New York (1966).
- [3] Cody, W. J. and H. C. Thacher, Rational Chebyshev approximations for the exponential integral $E_1(x)$, *Math. Comp.*, **22** (1968), 641—649.
- [4] Cody, W. J. and H. C. Thacher, Chebyshev approximation for the exponential integral $E_i(x)$, *Math. Comp.*, **23** (1969), 289—303.
- [5] Matsui, T. and O. Matsuoka, The fundamental solution in the theory of shallow shells, *Int. J. Solids Structures*, **14** (1978), 971—986.
- [6] 吕品, 板壳若干问题的边界元及复变函数分析方法, 中国科学技术大学博士学位论文 (1989).

Calculation of the Fundamental Solution for the Theory of Shallow Shells Considering Shear Deformation

Lü Pin Huang Mao-guang

(*University of Science and Technology of China, Hefei*)

Abstract

In this paper, some formulas are derived for the numerical computation of the fundamental solution obtained in ref. [1] and relevant computer methods are also discussed in detail. As an application of the fundamental solution, problems of a concentrated normal force acting on infinite shallow shells having positive, zero and negative Gaussian curvatures are calculated according to the numerical methods given in the paper.

Key words fundamental solution, shallow shells involving shear deformation, numerical computation