应用数学和力学，第13卷第6期（1992年6月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

论类梯度筛选算法的无效性

孙星明　罗志辉　韦凌德

（湘潭师范学院数学系）　　（重庆交通学院）

（钱伟长推荐，1991年7月17日收到）

摘　要

本文简要介绍了水能资源梯级开发顺序最优化研究中著名的"类梯度筛选算法"，在实践中给出了该算法的一个反例，并在理论上证明了该算法的无效性。

关键词　类梯度　算法　最优序　梯级水电站

一、引　言

水能资源梯级开发顺序最优化问题，国外称之为容量扩充问题，运筹学中称排序问题。该问题的描述是：已知一条河流上有n座电站待建，应怎样安排这些电站的建设顺序才能使水能资源开发总体效益最大？许多学者，如：W.S. Butcher, Y.Y. Haimes, T.L. Morin, A.M.O.Esogbue, D.Erlenkotter, D.T.O'Laughaire, W.S.Nainnis, D.P.Loucks, J.Kuiper, L.Ortolano, M.R.Rao, P.J.Doulliez, J.A.Bondy, U.S.R.Murty, R.A.Rhode, H.Luss,冯尚友、张毅、李枚安等，用了许多著名的方法。如：动态规划、整数规划、线性规划、模拟模型法、随机搜索法等，以及这些方法的改进形式，来处理这个问题（见文献[1]、[2]）。但不幸的是，除作者的结果（见文献[3]、[4]）和文献[5]中的方法外，所有方法的计算量都与电站的个数成指数级增长。因而这些方法都不成功，特别是当电站个数较多时（如大于7）就更不行了。

文献[5]的作者引入了类梯度筛选算法，并且证明了当类梯度不为零时这个算法为P算法，即确定最优建设顺序所需的计算次数是电站个数的多项式函数。大多数研究者都企图寻找或改进运筹学中已有的方法来解决上述容量扩充问题。而文献[5]的作者则已充分意识到，目前已有的运筹学方法来解决容量扩充问题的局限。故他们选择了一条新的研究途径，尝试创立一种解决容量扩充问题的有效算法。他们在文献[5]中引入了"类梯度"这一新概念，全面讨论了它的性质；并据此提出了有关的最优排序定理；同时给出了在其所获理论支持下寻找最优排序的具体算法。文献[5]中虽然做了大量细致的努力，做了很多有益的工作，其成果亦受到了较高的评价（见文献[6]），但我们不得不指出该算法在理论上和在实际应用中都有错误。在本文的第三部分，将给出这个算法在实践中的一个反例，并将在理论上证明这个算法是无效的。

二、类梯度筛选算法简介

为了叙述方便，我们先介绍一下文献[5]中引入的一些定义和记号。

定义1 如果两个排列（或序）的不同点只在于一对相邻元素（或电站）的顺序，则称这两个排列（或序）是相邻的。

定义2 项目是指一个电站或多个电站的人为组合的等效电站。

定义3 两个相邻排列的目标值之差，称为两相邻元素的对换引起的类梯度，记为 $\mathrm{QG}(P_1\bar{A}\ \bar{B}P_2)$，

$$\mathrm{QG}(P_1\bar{A}\ \bar{B}P_2)=\mathrm{NB}(P_1ABP_2)-\mathrm{NB}(P_1BAP_2)$$

其中，$\mathrm{NB}(P_1ABP_2)$和$\mathrm{NB}(P_1BAP_2)$是相对于排列（即序）P_1ABP_2与P_1BAP_2的目标值（即净效益现值），A，B是电站，P_1与P_2是若干电站或项目的子排列（或子序）.

结论1 如果$\mathrm{QG}(P_1\bar{A}\ \bar{B}P_2)>0$，则$P_1BAP_2$不是最优排列，即不是最优序.

类梯度筛选算法的主要思想：

第一步：从K个电站中任选出两个电站A，B，计算由这两个元素对换引起的类梯度$\mathrm{QG}(\bar{A}\ \bar{B})$

$$\mathrm{QG}(\bar{A}\ \bar{B})=\mathrm{QG}(P_1\bar{A}\ \bar{B})=\mathrm{NB}(P_1AB)-\mathrm{NB}(P_1BA) \tag{2.1}$$

如果$\mathrm{QG}(\bar{A}\ \bar{B})>0$，则断定$BA$不是最优决策，$AB$可能是最优决策.

第二步：将第一步得到的可能为优的决策按首位元素是否相同分类．从任一类中任选出两个决策AB与AC，计算类梯度$\mathrm{QG}(\overline{AB}\ \ \overline{AC})$，方法如下：

$$\mathrm{QG}(\overline{AB}\ \ \overline{AC})=\mathrm{QG}(A\ \bar{B}\ \bar{C}) \tag{2.2}$$

如果$\mathrm{QG}(\overline{AB}\ \ \overline{AC})>0$，则断定$AC$不是最优决策，$AB$可能是．再把$AB$与首位元素是$A$的其他决策按这个方法相比较，选出一个可能为优的决策．这样重复下去，可找到每一类中的一个可能为优的决策.

第三步：从由第二步选出的可能为优的决策中，任选两个决策AB与CD，将AB与CD视为一个项目，用下述方法计算类梯度$\mathrm{QG}(\overline{AB}\ \ \overline{CD})$，

$$\mathrm{QG}(\overline{AB}\ \ \overline{BD})=\mathrm{QG}(\bar{A}\ \ \overline{BD}),\quad \mathrm{QG}(\overline{AB}\ \ \overline{CB})=\mathrm{QG}(\bar{A}\ \ B\ \ \bar{C}) \tag{2.3}$$

如果$\mathrm{QG}(\overline{AB}\ \ \overline{CD})>0$，则断定$CD$非最优排列，而$AB$可能是．再把$AB$与其他可能为优的决策相比较，又可找出一个可能为优的决策．依此下去，最优排列的前面两个元素组成的子排列即可选出.

第四步：对剩下的$K-2$个项目，再重复第一步，直至剩下的项目是0或1为止.

三、反例及理论分析

假定在一条河流上有4个电站待建，这些电站的条件如表1所示．假定贴现率是0.05，要求出最优建设顺序使总效益现值为最大.

按类梯度筛选算法得出的最优建设顺序是：4 3 1 2，它的总效益现值是1560.83，然而，按照我们的结果（见文献[3]、[4]），最优建设顺序应为：4 2 1 3，它的总效益现值是1567.72．由此可见，由类梯度算法得到的最优建设顺序不一定真正最优．出现这种错误的原因在于算法的第二步与第三步有错．因为按类梯度的定义和关于它的结论，即本文的定义1和结论1，这些只对电站有效，而没有对项目定义．若由两项目的对换引起的类梯度按(2.1)、(2.2)、(2.3)式定义，则结论1不成立．下面我们详述这一点.

首先，为方便起见，我们假定只考虑有4个电站A，B，C，D的情形．且以V_X表示电站X单独运行时的年净效益，$\bar{V}_{XY}=\bar{V}_{YX}$表示电站$X$与$Y$联合运行所带来的效益增值，$r$为贴现

表 1

电站序号	1	2	3	4
电站种类	调节电站	径流电站	径流电站	径流电站
单独运行时的年净效益	740	800	850	1000
调节电站建成后的年净效益增值	—	300	100	50
施工期（年）	8.5	8	8	8

率，m_1，m_2，m_3，m_4分别是电站A，B，C，D的施工期，$Z=1/(1+r)$。

因 $\mathrm{QG}(\overline{AB}\ \ \overline{AC})=\mathrm{QG}(A\ \bar{B}\ \bar{C})=\mathrm{NB}(ABCD)-\mathrm{NB}(ACBD)$

若 $\mathrm{QG}(\overline{AB}\ \ \overline{AC})>0$，即$\mathrm{NB}(ABCD)-\mathrm{NB}(ACBD)>0$，我们只能断定$ACBD$不是最优顺序，而不能肯定$AC$不是最优顺序中前面两个元素的子顺序。根据效益计算公式，可得：

$$\mathrm{NB}(ABCD)=V_AZ^{m_1}+(V_B+\bar{V}_{AB})Z^{m_1+m_2}+(V_C+\bar{V}_{AC}+\bar{V}_{BC})Z^{m_1+m_2+m_3}$$
$$+(V_D+\bar{V}_{AD}+\bar{V}_{BD}+\bar{V}_{CD})Z^{m_1+m_2+m_3+m_4}$$

$$\mathrm{NB}(ACBD)=V_AZ^{m_1}+(V_C+\bar{V}_{AC})Z^{m_1+m_3}+(V_B+\bar{V}_{AB}+\bar{V}_{BC})Z^{m_1+m_2+m_3}$$
$$+(V_D+\bar{V}_{AD}+\bar{V}_{BD}+\bar{V}_{CD})Z^{m_1+m_2+m_3+m_4}$$

从而有：

$$\mathrm{QG}(\overline{AB}\ \ \overline{AC})=Z^{m_1}((V_B+\bar{V}_{AB})Z^{m_2}(1-Z^{m_3})-(V_C+\bar{V}_{AC})Z^{m_3}(1-Z^{m_2})) \tag{3.1}$$

按类梯度筛选算法，只要(3.1)>0，就断定AC不是最优建设顺序中前面两个元素的子顺序。但是，又有：

$$\mathrm{NB}(ACDB)=V_AZ^{m_1}+(V_C+\bar{V}_{AC})Z^{m_1+m_3}+(V_D+\bar{V}_{AD}+\bar{V}_{CD})Z^{m_1+m_3+m_4}$$
$$+(V_B+\bar{V}_{AB}+\bar{V}_{CB}+\bar{V}_{DB})Z^{m_1+m_2+m_3+m_4}$$

$$\mathrm{NB}(ABDC)=V_AZ^{m_1}+(V_B+\bar{V}_{AB})Z^{m_1+m_2}+(V_D+\bar{V}_{AD}+\bar{V}_{BD})Z^{m_1+m_2+m_4}$$
$$+(V_C+\bar{V}_{AC}+\bar{V}_{CB}+\bar{V}_{CD})Z^{m_1+m_2+m_3+m_4}$$

因此，有

$$\mathrm{NB}(ACDB)-\mathrm{NB}(ABCD)=Z^{m_1}((V_C+\bar{V}_{AC})Z^{m_3}(1-Z^{m_2})+(V_D$$
$$+\bar{V}_{AD})Z^{m_3+m_4}(1-Z^{m_2})-(V_B+\bar{V}_{AB})Z^{m_2}(1-Z^{m_3+m_4})$$
$$+\bar{V}_{CD}Z^{m_3+m_4}(1-Z^{m_2})-\bar{V}_{CB}Z^{m_2+m_3}(1-Z^{m_4})) \tag{3.2}$$

$$\mathrm{NB}(ACDB)-\mathrm{NB}(ABDC)=Z^{m_1}((V_C+\bar{V}_{AC})Z^{m_3}(1-Z^{m_2+m_4})$$
$$-(V_B+\bar{V}_{AB})Z^{m_2}(1-Z^{m_3+m_4})+\bar{V}_{CD}Z^{m_3+m_4}(1-Z^{m_2})$$
$$-\bar{V}_{DB}Z^{m_2+m_4}(1-Z^{m_3})) \tag{3.3}$$

因(3.1)、(3.2)、(3.3)可以同时大于零，而(3.2)，(3.3)>0说明AC可能是最优顺序前面两个元素的子顺序，但AB不是。也就是说，类梯度筛选算法错误地将真正的最优决策筛选掉了，而将另一决策误当成了最优决策。事实上，要使(3.1)，(3.2)，(3.3)>0很容易。为简便起见，我们不仿假定$m_1=m_2=m_3=m_4=M$且$R=Z^M$，则(3.1)、(3.2)、(3.3)可化成：

$$R^2(1-R)((V_B+\bar{V}_{AB})-(V_C+\bar{V}_{AC})) \tag{3.4}$$

$$R^2(1-R)((V_D+\bar{V}_{AD}+\bar{V}_{CD}-\bar{V}_{CB}-(V_B+\bar{V}_{AB}))R$$
$$-((V_B+\bar{V}_{AB})-(V_C+\bar{V}_{AC}))) \tag{3.5}$$

$$R^2(1-R)((\bar{V}_{CD}-\bar{V}_{DB})R-((V_B+\bar{V}_{AB})-(V_C+\bar{V}_{AC}))(1+R)) \tag{3.6}$$

显然，只要V_D，$\bar{V}_{CD}$，$\bar{V}_{DB}$取适当的值，(3.4)、(3.5)、(3.6)三式都能大于零。

综上所述，所谓的类梯度筛选算法不能保证由它所得出的最优序真正是最优的。故这个算法无论在理论上还是在实际应用中都是无效的。但应该对文献[5]作出肯定的是，当全部

电站都是径流电站时，该算法成立。关于这一点，请详见文献[3].我们感到可惜的是，文献[5]的作者没有进一步从另一正确路线上进行研究，所以未能指出其结论对于这一种特殊情形还是有效的。

四、结　　语

水能资源梯级开发顺序最优化问题的实质，是要证明该问题是否存在P算法，即是否是P问题。到目前为止，对该问题还没有找到任何满意的方法，是世界上许多科学家致力解决的难题.我们希望在各界同仁的不断努力下，该问题能早日得到圆满的解决。

作者感谢徐利治教授、冯尚友教授、杨林聪、刘燕君等同志的帮助。

参 考 文 献

[1] Luss, H., Operations research and capacity expansion problems: A survey, *Oper. Res.*, 30(5) (1982), 907—947.

[2] 张毅、冯尚友，水电系统容量扩展的优化方法和模型,水利电力科技，(1) (1989), 95—107.

[3] Luo Zhi-hui and Sun Xing-ming, On the optimal construction order of water energy developed by stairs, *Abstracts of Regional Conference on Asian-Pacific Countries*, International Geographical Union (1990, 8), 13—18.

[4] Sun Xing-ming and Luo Zhi-hui, On the optimal sequencing of hydroelectric stations.（待发表）

[5] 李敉安、吴相林，梯级水电站排序模型的类梯度筛选算法，系统工程的理论与实践，7(4) (1985), 1—9.

[6] 红水河梯级水电站和有关火电站投产顺序优化研究，水电部技术鉴定证书，鉴字第87022号 (1987, 2).

[7] 李敉安、吴相林，河流梯级开发中水电厂投产顺序优化的数学模型，水电能源科学，7(4) (1989), 301—307.

On the Inefficiency of the Quasi-Gradient Screening Algorithm

Sun Xing-ming　　Luo Zhi-hui

(*Department of Mathematics, Xiangtan Teacher's College, Hunan*)

Wei Ling-de

(*Chongqing Jiaotong Institute, Chongqing*)

Abstract

In this paper, the well-known quasi-gradient screening algorithm on optimal sequencing cascaded development of water energy resources will be introduced. Then we will give a contraexample in practice and prove the inefficiency of the algorithm in theory.

Key words quasi-gradient, algorithm, optimal sequencing, cascaded hydroelectric station