应用数学和力学，第13卷第6期（1992年6月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

入水冲击问题变分原理及其它*

金伏生

（武汉工学院，1991年3月4日收到）

摘　要

首先建立入水前后两个衔接阶段的较为严密的场方程．再得到与之对应的各类变分原理，界限定理，第二阶段问题的边界积分方程．证明了解的存在性并提供了求解实施方案．最后以船舶兴波阻力问题的算例，论证了第二阶段问题的一种特殊应用及其正确性．从而为求取较为精确的入水冲击问题基本方程的变分有限元及边界元方法奠定了严密的理论基础．

关键词　变分原理　边界积分方程　动力冲击问题

一、引　言

入水冲击问题的意义（例如导弹入水及船舶拍击等）是众所周知的，但目前尚未解决．在入水前问题的较有代表性的文献[1]中，压缩空气层简化为一维问题，水域简化为二维问题，得到一个差分解，但未考虑入水后的情况．在入水后问题的较有代表性的文献[2]中，则又未计及入水前的压缩空气层作用，且只能得到近似分析解．

这是一个包含变动界面的、刚体—空气—水三者耦合、并且分为入水前后两个阶段的非定常非线性问题，难度极大．这个问题的意义还在于，其数学模型包括了一些其它问题，例如入水后问题稍加改动，可以模拟目前也未解决的船舶兴波阻力问题．

本文的目的是建立一个较为严密的理论体系，包括基本方程，以及变分有限元解及边界元解的理论基础．

基本方程分为两个阶段．在接触面开始压缩空气层至与水全部接触（$0\leqslant t\leqslant T_1$）的第一阶段，把文献[1]的基本方程改进为，空气层由一维扩充为二维，水域由二维扩充为三维．因为空气层较薄，可以不计厚度影响，基本上是二维问题．第一阶段末至入水初始阶段，称为第二阶段（$T_1\leqslant t\leqslant T_2$），使用文献[2]的基本方程，但是计入了重要的第一阶段末的状态．就是说，流场维数扩充为真实情况，并串联了两个不同物理内容的阶段．明显可见，这个模型，较正确地模拟了实际情况．

进一步建立各类变分原理、界限定理、第二阶段问题边界积分方程，证明了解的存在性．其中，使用了文献[3]建立互补变分原理的方法，与具有代表性的文献[4]比较，改进之处至少是：只需要一个判别式，确定一对互补泛函相同的驻点性质．最后以船舶兴波阻力的三个算例[5]，论证了第二阶段问题一种蜕化情况的有效应用及其正确性[6]．

* 何友声推荐．

本文内容为求取较为精确的基本方程的新的数值解法奠定了严密的理论基础.

二、基本方程

以下使用的都是无因次量. 直角系的 (x,y) 面置于静水面上，Oz 轴向上. 给定接触面形状的刚体（见图1～3）以给定速度u垂直向下冲击水面. 水的速势、密度、压力分别为ϕ，ρ_0，p. 空气层的速度、速势、密度、压力、状态常数分别为Λ，ϕ_1，ρ_a，p_a，k. 变动的水表面记以Σ，并分为二部分，$\Sigma=\Sigma_1\cup\Sigma_2$，见图1～3[1,2]. 在第一阶段，$\Sigma_1$代表与压缩空气层接触部分，$\Sigma_2$代表与大气层接触部分. 在第二阶段，$\Sigma_1$指浸水部分. Σ_1与Σ_2的交线或Σ_1面的边界线为$\partial\Sigma_1$；在第一阶段，Σ_1面与Σ_2面在交线$\partial\Sigma_1$处连续并光滑，周线$\partial\Sigma_1$的向外单位法线为$\boldsymbol{n}$. 第一阶段水表面Σ与静水面差值为ζ，向上为正；第二阶段，ζ指Σ_2面与静水面差值. 压缩空气层厚度为h. 水域V，其边界面为S，包括无穷远处边界S_∞，S的向外单位法线为$\boldsymbol{N}$.

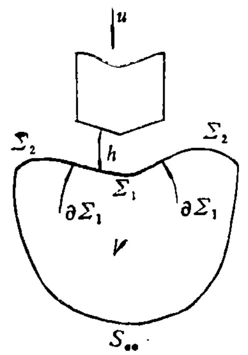

图1 第一阶段中间过程

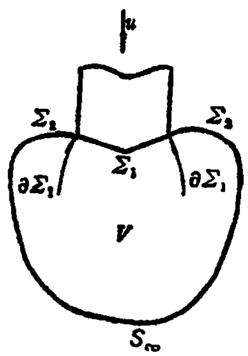

图2 第一阶段末或第二阶段初

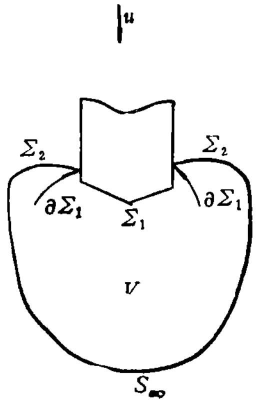

图3 第二阶段中间过程

引进界面族变量ψ：$\psi=0$定义为第一阶段水表面Σ以及第二阶段水表面Σ_2，V限于$\psi\geqslant0$.

第一阶段问题的无量纲基本方程是

$$V:\quad \Delta\phi=0 \tag{2.1}$$

$$\Sigma_1:\quad \partial(\rho_a h)/\partial t+\nabla_1\cdot(\rho_a h\Lambda)=0 \tag{2.2}$$

$$p=p_a \tag{2.3}$$

$$\Sigma_2:\quad p=p_{a0} \tag{2.4}$$

$$\Sigma:\quad \partial\psi/\partial t+\nabla\phi\cdot\nabla\psi=0 \tag{2.5}$$

$$S_\infty:\quad \nabla\phi=0 \tag{2.6}$$

$$t=0:\quad h=h_0 \tag{2.7}$$

$$t=T_1:\quad h=0 \tag{2.8}$$

$$\zeta=\zeta_{T_1} \tag{2.9}$$

$$\partial\Sigma_1:\quad \rho_a h\Lambda=\rho_{a0}\overline{(h\Lambda)} \tag{2.10}$$

以及

$$V:\quad -\rho_0^{-1}p=\partial\phi/\partial t+|\nabla\phi|^2/2+gz \tag{2.11}$$

$$\Sigma_1:\quad \Lambda=\nabla_1\phi_1 \tag{2.12}$$

$$p_a=\rho_a^k \tag{2.13}$$

$$-\rho_a^{-1}p_a=(k-1)(\partial\phi_1/\partial t+\Lambda^2/2)-1 \tag{2.14}$$

$$h+\int_0^t udt-h_0+\zeta=0 \tag{2.15}$$

$$t=0: \quad \phi=0 \tag{2.16}$$

下列(2.17)～(2.19)式可由上述方程导出．由界面族ψ的定义知

$$\psi=\zeta-z \tag{2.17}$$

得

$$\delta\psi=\delta\zeta \tag{2.18}$$

以及(2.18)代入(2.15)得

$$\Sigma_1: \ \delta h=-\delta\psi \tag{2.19}$$

$$(\partial V=S=\Sigma\cup S_\infty, \ \ \Sigma=\Sigma_1\cup\Sigma_2)$$

其中，$\nabla_1=\boldsymbol{i}\partial/\partial x+\boldsymbol{j}\partial/\partial y$，$\nabla$为三维算子．$h_0$是空气层刚被压缩（即初始的常量密度和压力$\rho_{a0}$，$p_{a0}$，连同静水表面，开始变化）时的给定值，也就是刚体压缩空气层部分的z坐标值．T_1，ζ_{T_1}，$(\overline{h\Lambda})$是给定值，由下列方法确定．由(2.8)、(2.15)式确定Σ_1上的

$$\zeta_{T_1}=h_0-\int_0^{T_1}udt \tag{2.20}$$

其中，由$\partial\Sigma_1$上的最大h_0值$h_0|_{\max}$对应ζ_{T_1}零值（见图2)．

$$0=h_0|_{\max}-\int_0^{T_1}udt$$

确定时间T_1．留下的给定值，Σ_2面上的ζ_{T_1}及$\partial\Sigma_1$上的$(\overline{h\Lambda})$，其确定方法在下面 说明．

基本方程由下列依据结合泛函驻值条件（见下文）构成．关于流体的方程是常规的（或见[2]）．关于空气层，式(2.2) 是由文[1]的一维方程扩充为二维；式 (2.12)～(2.14) 是常规的（见文[7]）；式 (2.15) 是这里给出的，是由文[1]的速度形式横向连续条件积分为位移形式连续条件并扩充为二维．这里引进待定界面族变量ψ，以及提出有 关 的 (2.15)、(2.17)～(2.19) 式，是借鉴于混合介质力学变分原理的方法[3,5,6,8]，从下文将知道，这对刚—气—水耦合问题变分原理的建立起了重要作用．

上面提到，基本方程及变分泛函中，留下的给定值是Σ_2面上的ζ_{T_1}值及$\partial\Sigma_1$上的$(\overline{h\Lambda})$值，事先并不知道，将由下列方式迭代确定．由(2.4)、(2.11)、(2.17)式确定Σ_2上的

$$\begin{aligned}\zeta_{T_1}&=-g^{-1}(\partial\phi/\partial t+|\nabla\phi|^2/2)|_{\Sigma_2(T_1)}-g^{-1}\rho_0^{-1}p_{a0}\\&\approx-g^{-1}(\partial\phi/\partial t+|\nabla\phi|^2/2)|_{z=0,T=T_1}-g^{-1}\rho_0^{-1}p_{a0}\end{aligned} \tag{2.21}$$

其中使用了显见成立的下列

性质1 水面高度ζ的自变量定义域Σ代以$z=0$，误差一个可允许的高阶小量．

以后我们在适当的地方，定义域Σ用$z=0$ 取代．因此由上一迭代过程的ϕ值，确定新的ζ_{T_1}值．

通过(2.12)、(2.15)、(2.17)式，由上一迭代过程的ϕ_1，ψ值确定新的$(\overline{h\Lambda})$值．

这二种迭代过程的收敛性在下文性质2中交待．

第二阶段问题的基本方程是

$$V: \quad \nabla\phi=0 \tag{2.22}$$

$$\Sigma_2: \quad \partial\psi/\partial t+\nabla\phi\cdot\nabla\psi=0 \tag{2.23}$$

$$-\rho_0^{-1}p\equiv\partial\phi/\partial t+|\nabla\phi|^2/2+gz=-\rho_0^{-1}p_{a_0} \tag{2.24}$$

$$\Sigma_1: \quad (\nabla\phi-\boldsymbol{u})\cdot\boldsymbol{N}=0 \tag{2.25}$$

$$S_\infty: \quad \nabla\phi=0 \tag{2.26}$$

$$t=T_1: \quad \phi=\phi_{T_1} \tag{2.27}$$

$$t=T_2: \quad \zeta=\zeta_{T_2} \tag{2.28}$$

$$(\partial V=S=\Sigma_1\cup\Sigma_2\cup S_\infty)$$

上述方程是常规的（例如[2]）．浸水面Σ_1在刚体进水过程中是给定的，即浸水线$\partial\Sigma_1$（见图3）可以看作刚体进入静水状态给以确定．T_2值定义为第二阶段（入水初始阶段）末端，是给定的．ϕ_{T_1}由第一阶段确定．ζ_{T_2}将由与第一阶段相同的关系式，即（2.24）式，按照与第一阶段类似的(2.21)式，迭代确定：

$$\zeta_{T_2}=-g^{-1}(\partial\phi/\partial t+|\nabla\phi|^2/2)|_{z=0,T=T_2}-g^{-1}\rho_0^{-1}p_{a0} \tag{2.29}$$

下面我们将证明，两个阶段问题的变分解存在．因此成立

性质2 Σ_2上的ζ_{T_1}，$\partial\Sigma_1$上的$(\overline{h\Lambda})$，以及ζ_{T_2}，三个迭代过程收敛．

三、驻值原理（广义变分原理）

这里的广义变分原理，定理1，2，是指相对于下文的约束变分原理而言，因为在广义变分泛函中仍然要满足一些约束条件．

定理1 令下列泛函中(2.11)～(2.16)式事先满足，那末其驻值条件是第一阶段问题(2.1)～(2.16)式的解：

$$\begin{aligned}\Pi(\phi,\phi_1,\psi)=&-\int_0^{T_1}\int_V k^{-1}pU(\psi)dVdt-\int_0^{T_1}\int_{\Sigma_1}k^{-1}hp_a dSdt\\&+\int_0^{T_1}\int_{\Sigma_2}k^{-1}p_{a0}\psi dSdt+\int_{\Sigma_1}\rho_{a0}h_0\phi_1|_{t=0}dS-\int_V\rho_0k^{-1}U(\psi_{T_1})\phi|_{t=T_1}dV\\&-\int_0^{T_1}\int_{\partial\Sigma_1}\rho_{a0}\,(\overline{h\Lambda})\cdot\boldsymbol{n}\phi_1 dc\end{aligned} \tag{3.1}$$

其中$U(\psi)$是Heaviside函数．

证 利用Heaviside函数性质（例如[8]），注意(2.19)式，以及利用下列关系

$$-\delta(k^{-1}p_a)=-\rho_a^{k-1}\delta\rho_a=\rho_a\delta(\partial\phi_1/\partial t+\Lambda^2/2) \tag{3.2}$$

证得定理1：

$$\begin{aligned}\delta\Pi\xlongequal{(2\cdot11)\sim(2\cdot16)}&-\int_0^{T_1}\int_V k^{-1}\rho_0\Delta\phi\delta\phi dVdt+\int_0^{T_1}\int_{\Sigma_1}\Big\{k^{-1}(p_a-p)\delta\psi-\Big[\frac{\partial(\rho_a h)}{\partial t}\\&+\nabla_1\cdot(\rho_a h\Lambda)\Big]\delta\phi_1-k^{-1}\rho_0\Big(\frac{\partial\psi}{\partial t}+\nabla\phi\cdot\nabla\psi\Big)\delta\phi\Big\}dSdt-\int_0^{T_1}\int_{\Sigma_2}k^{-1}\\&\cdot\Big[(p-p_{a0})\delta\psi+\rho_0\Big(\frac{\partial\psi}{\partial t}+\nabla\phi\cdot\nabla\psi\Big)\delta\phi\Big]dSdt+\int_0^{T_1}\int_{S_\infty}\rho_0k^{-1}\boldsymbol{N}\cdot\nabla\phi\delta\phi dSdt\\&+\int_{\Sigma_1}[(\rho_{a0}h_0-\rho_a h)\delta\phi_1|_{t=0}+\rho_a h\delta\phi_1|_{t=T_1}]dS+\int_V\rho_0k^{-1}[U\\&-U(\psi_{T_1})]\delta\phi|_{t=T_1}dV+\int_0^{T_1}\int_{\partial\Sigma_1}[\rho_a h\Lambda-\rho_{a0}(\overline{h\Lambda})]\cdot\boldsymbol{n}\delta\phi_1 dcdt\end{aligned} \tag{3.3}$$

$$=0\Rightarrow(2.1)\sim(2.10) \tag{3.4}$$

定理2 令下列泛函中(2.27)式事先满足，那末其驻值条件是第二阶段问题(2.22)～(2.28)式的解：

$$\Pi(\phi,\psi)=-\int_{T_1}^{T_2}\int_V \rho_0^{-1}pU(\psi)dVdt-\int_{T_1}^{T_2}\int_{\Sigma_1}\boldsymbol{u}\boldsymbol{N}\phi dSdt$$
$$+\int_{T_1}^{T_2}\int_{\Sigma_2}\rho_0^{-1}p_{a0}\psi dSdt-\int_V U(\psi_{T_2})\phi|_{t=T_2}dV \tag{3.5}$$

证 由下式证得定理2：

$$\delta\Pi\overset{(2\cdot27)}{=\!=}-\int_{T_1}^{T_2}\int_V\Delta\phi\delta\phi dVdt-\int_{T_1}^{T_2}\int_{\Sigma_2}\Big[\Big(\frac{\partial\psi}{\partial t}+\nabla\phi\cdot\nabla\psi\Big)\delta\phi$$
$$+\rho_0^{-1}(p-p_{a0})\delta\psi\Big]dSdt+\int_{T_1}^{T_2}\int_{\Sigma_1}(\nabla\phi-\boldsymbol{u})\cdot\boldsymbol{N}\delta\phi dSdt$$
$$+\int_{T_1}^{T_2}\int_{S_\infty}\nabla\phi\cdot\boldsymbol{N}\delta\phi dSdt+\int_V[U-U(\psi_{T_2})]\delta\phi|_{t=T_2}dV \tag{3.6}$$
$$=0\Rightarrow(2.22)\sim(2.26)、(2.28) \tag{3.7}$$

四、约束变分原理及界限定理

定理3 在第一阶段问题的(3.1)式的泛函Π中，分别事先满足平衡条件(2.3)、(2.4)式和机动条件(2.1)、(2.2)、(2.5)～(2.10)式，分别构成泛函Π_1和$-\Gamma_1$。
那末

(i) Π_1和Γ_1具有相同的驻点性质：

$$\partial^2\Pi_1=\delta^2\Gamma_1=\int_0^{T_1}\int_V\frac{1}{2}k^{-1}\rho_0|\nabla\delta\phi|^2dVdt+\int_0^{T_1}\int_{\Sigma_1}\frac{1}{2}ha^{2m}(1-a^{-2}A^2)(\delta A)^2dSdt \tag{4.1}$$

其中a是声速，$m=(k-1)^{-1}$。

(ii) 至少当$A\leqslant a$，解存在并且成立

$$\Pi_1\geqslant\Pi_1|_0=-\Gamma_1|_0\geqslant-\Gamma_1 \tag{4.2}$$

其中(　)$|_0$为真解处值。

证 (i) 从(3.3)式证得驻值条件：

$$\partial\Pi_1=\delta\Pi|_{(2\cdot3)(2\cdot4)} \tag{4.3}$$

(上式等号右边表示，(2.3)、(2.4)式在$\delta\Pi$（见(3.3)式）中事先满足；以下类似)

$$=0\Rightarrow(2.1)(2.2)(2.5)\sim(2.10) \tag{4.4}$$
$$-\delta\Gamma_1=\delta\Pi|_{(2\cdot1)(2\cdot2)(2\cdot5)\sim(2\cdot10)} \tag{4.5}$$
$$=0\Rightarrow(2.3)(2.4) \tag{4.6}$$

(ii) 从条件(2.3)、(2.4)以及(2.11)、(2.17)式，得到

$$\Sigma_1:\quad \psi=-g^{-1}\rho_0^{-1}p_a-g^{-1}(\partial\phi/\partial t+|\nabla\phi|^2/2)|_{\Sigma_1}-\zeta$$
$$=-g^{-1}\rho_0^{-1}(p_a-p)=0 \tag{4.7}$$

$$\Sigma_2:\quad \psi=-g^{-1}\rho_0^{-1}p_{a0}-g^{-1}(\partial\phi/\partial t+|\nabla\phi|^2/2)|_{\Sigma_2}-\zeta$$
$$=-g^{-1}\rho_0^{-1}(p_{a0}-p)=0 \tag{4.8}$$

$$(x,y)\in\Sigma_1:\ \psi=-g^{-1}\rho_0^{-1}p_a-g^{-1}(\partial\phi/\partial t+|\nabla\phi|^2/2)|_{z=0}-z \tag{4.9}$$

$$(x,y)\in\Sigma_2:\ \psi=-g^{-1}\rho_0^{-1}p_{a0}-g^{-1}(\partial\phi/\partial t+|\nabla\phi|^2/2)|_{z=0}-z \tag{4.10}$$

(4.9)、(4.10)两式在$(x,y)\in\partial\Sigma_1$上连续，因此在全域连续。注意(4.8)式包含了前文已经使用过的$t=T_1$及T_2时的(2.21)和(2.29)式。

由(4.7)、(4.8)知道(2.3)、(2.4)式等价于

$$\Sigma:\ \psi=0 \tag{4.11}$$

当(2.3)、(2.4)式命定成立则也等价于

$$\Sigma:\ \delta\psi=0 \tag{4.12}$$

同时，变分原理(4.4)中的变量ψ将被(4.9)、(4.10)式取代。

通过下列关系

$$a^2=1-(2m)^{-1}\Lambda^2,\ \rho_a=a^{2m} \tag{4.13}$$

把(3.2)式再变分一次：

$$-\delta^2(k^{-1}p_a)=a^{2m}(1-a^{-2}\Lambda^2)(\delta\Lambda)^2/2 \tag{4.14}$$

(3.1)式变分二次，由(2.19)、(4.12)、(4.14)式，得到(4.1)式中的$\delta^2\Pi_1$值。

(4.5)式再变分一次，注意(2.11)～(2.19)式，得到

$$\begin{aligned}\delta^2\Gamma_1=&\int_0^{T_1}\int_{\Sigma_1}\frac{1}{2}k^{-1}\delta(p-p_a)\delta\psi dSdt+\int_0^{T_1}\int_{\Sigma_2}\frac{1}{2}k^{-1}\delta p\delta\psi dSdt\\
=&-\int_0^{T_1}\int_V\frac{1}{2}k^{-1}\delta\left[\rho_0\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}+\frac{1}{2}|\nabla\phi|^2+gz\right)\right]\delta UdVdt-\int_0^{T_1}\int_{\Sigma_1}\frac{1}{2}k^{-1}\delta\left\{\rho_a\left[(k\right.\right.\\
&\left.\left.-1)\left(\frac{\partial\phi_1}{\partial t}+\frac{1}{2}\Lambda^2\right)-1\right]\right\}\delta hdSdt\\
=&-\delta\int_0^{T_1}\int_V\frac{1}{2}k^{-1}\rho_0\delta\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}+\frac{1}{2}|\nabla\phi|^2+gz\right)UdVdt-\delta\int_0^{T_1}\int_{\Sigma_1}\frac{1}{2}k^{-1}\delta\left\{\rho_a\left[(k\right.\right.\\
&\left.\left.-1)\left(\frac{\partial\phi_1}{\partial t}+\frac{1}{2}\Lambda^2\right)-1\right]\right\}hdSdt+\int_0^{T_1}\int_V k^{-1}\rho_0\delta^2\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}+\frac{1}{2}|\nabla\phi|^2+gz\right)UdVdt\\
&-\int_0^{T_1}\int_{\Sigma_1}k^{-1}\delta^2p_ahdSdt\end{aligned} \tag{4.15}$$

其中

$$\begin{aligned}&-\int_0^{T_1}\int_V\frac{1}{2}k^{-1}\rho_0\delta\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}+\frac{1}{2}|\nabla\phi|^2+gz\right)UdVdt\\
&=-\int_V\frac{1}{2}k^{-1}\rho_0(\delta\phi U)|_0^{T_1}dV+\int_0^{T_1}\int_V\frac{1}{2}k^{-1}\rho_0\Delta\phi\delta\phi dVdt\\
&\quad+\int_0^{T_1}\int_{\Sigma_1}\frac{1}{2}k^{-1}\rho_0\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}+\nabla\phi\cdot\nabla\psi\right)\delta\phi dSdt-\int_0^{T_1}\int_{S_\infty}\nabla\phi\cdot N\delta\phi dSdt\end{aligned} \tag{4.16}$$

$$\begin{aligned}&-\int_0^{T_1}\int_{\Sigma_1}\frac{1}{2}k^{-1}\delta\left\{\rho_a\left[(k-1)\left(\frac{\partial\phi_1}{\partial t}+\frac{1}{2}\Lambda^2\right)-1\right]\right\}hdSdt\\
&\overset{3.2}{=\!=}-\int_0^{T_2}\int_{\Sigma_1}\frac{1}{2}\rho_ah\delta\left(\frac{\partial\phi_1}{\partial t}+\frac{1}{2}\Lambda^2\right)dSdt\end{aligned}$$

$$=-\int_{\Sigma_1}\frac{1}{2}(\rho_a h\delta\phi_1)\big|_0^{T_1}dS+\frac{1}{2}\int_0^{T_1}\int_{\Sigma_1}\left[\frac{\partial(\rho_a h)}{\partial t}+\nabla_1\cdot(\rho_a h\Lambda)\right]\delta\phi_1 dSdt$$

$$-\int_0^{T_1}\int_{\partial\Sigma_1}\frac{1}{2}(\rho_a h\Lambda)\cdot n\delta\phi_1 dcdt \tag{4.17}$$

(4.14)、(4.16)、(4.17) 代入 (4.15)，并再次满足命定条件 (2.1)、(2.2)、(2.5)～(2.10)式，得到(4.1)式中的$\delta^2\Gamma_1$值，证得(4.1)式。由Π_1和Γ_1的构成机理，易证(4.2)式中的$\Pi_1|_0=-\Gamma_1|_0$。当$\Lambda\leqslant a$，易证明 (4.1) 式一致正定，此即泛函取极小值的充分条件[9]，因此证得(4.2)式。最小原理与解存在的等价性是由于域内调和算子（见式(2.1)）是正定的。定理3证毕。

定理4 在第二阶段问题的(3.5)式的泛函Π中，分别事先满足平衡条件(2.24)及机动条件(2.22)、(2.23)、(2.25)、(2.26)、(2.28)分别构成泛函Π_1和$-\Gamma_1$，那末，

(i) Π_1与Γ_1具有相同的驻点性质：

$$\delta^2\Pi_1=\delta^2\Gamma_1=\int_{T_1}^{T_2}\int_V\frac{1}{2}|\nabla\delta\phi|^2dVdt \tag{4.18}$$

(ii) 解存在并且

$$\Pi_1\geqslant\Pi_1|_0=-\Gamma_1|_0\geqslant-\Gamma_1 \tag{4.19}$$

证 (i)从(3.6)式易证得驻值条件：

$$\delta\Pi_1=\delta\Pi|_{(2.24)} \tag{4.20}$$

$$=0\Rightarrow(2.22)(2.23)(2.25)(2.26)(2.28) \tag{4.21}$$

$$-\delta\Gamma_1=\delta\Pi|_{(2.22)(2.23)(2.25)(2.26)(2.28)} \tag{4.22}$$

$$=0\Rightarrow(2.24) \tag{4.23}$$

(ii) 类似可证，(4.8)、(4.10)式（此时(4.10)式的定义域$(x,y)\in\Sigma_2$改为全域，以下仍记为(4.10)式）在第二阶段问题中成立。因此(2.24)式等价于

$$\Sigma_2:\quad \psi=0 \tag{4.24}$$

当(2.24)式命定成立则也等价于

$$\Sigma_2:\quad \delta\psi=0 \tag{4.25}$$

同时，变分原理(4.21)式中的变量ψ将被(4.10)式取代。

(3.5)式变分二次，利用(4.25)式，得到(4.18)式中的$\delta^2\Pi_1$值。

(4.22)式再变分一次：

$$\delta^2\Gamma_1=\frac{1}{2}\int_{T_1}^{T_2}\int_{\Sigma_2}\rho_0^{-1}\delta p\delta\psi dSdt=\frac{1}{2}\int_{T_1}^{T_2}\int_V\rho_0^{-1}\delta p\delta UdVdt$$

$$=\frac{1}{2}\delta\int_{T_1}^{T_2}\int_V\rho_0^{-1}\delta pUdVdt-\int_{T_1}^{T_2}\int_V\rho_0^{-1}\delta^2 pUdVdt \tag{4.26}$$

其中

$$\frac{1}{2}\int_{T_1}^{T_2}\int_V\rho_0^{-1}\delta pUdVdt=-\frac{1}{2}\int_V(\delta\phi U)\Big|_{t=T_2}dV+\frac{1}{2}\int_{T_1}^{T_2}\int_{\Sigma_2}\Big(\frac{\partial\psi}{\partial t}$$

$$+\nabla\psi\cdot\nabla\phi\Big)\delta\phi dSdt-\frac{1}{2}\int_{T_1}^{T_2}\int_{\Sigma_1\cup S_\infty}\nabla\phi\cdot N\delta\phi dSdt+\frac{1}{2}\int_{T_1}^{T_2}\int_V\Delta\phi\delta\phi dVdt \tag{4.27}$$

(4.27)代入(4.26)，并再次满足命定条件(2.22)、(2.23)、(2.25)、(2 26)、(2.28)式，

得到(4.18)式中的$\delta^2\Gamma_1$值，证得(4.18)式。易证明(4.18)式一致正定，满足泛函取极小的充分条件[9]，以及类似可知(4.19)式中的$\Pi_1|_0=-\Gamma_1|_0$，因此 (4.19) 式成立。解存在与最小原理的等价性是由于调和算子是正定的。定理4证毕。

注1 定理1～4是文[3] 互补变分原理工作的继续，比传统结果（例如文 [4]）改进之处至少是：只需要一个判别式，可以确定一对互补泛函相同的驻点性质。

五、第二阶段问题的边界积分方程

定理5 令(2.24)式事先满足（该时变量ψ将由(4.10)式被变量ϕ取代），则第二阶段问题的解存在并由下式确定：

$$\begin{aligned}\left(\begin{matrix}4\pi\\2\pi\end{matrix}\right)\int_{T_1}^{T_2}\phi(\boldsymbol{X}_0)dt=&\int_{T_1}^{T_2}\int_{\Sigma_2}(\nabla\psi\cdot\nabla rr^{-2}\phi-r^{-1}\partial\psi/\partial t)dSdt\\&-\int_{T_1}^{T_2}\int_{\Sigma_1}\boldsymbol{N}\cdot(\nabla rr^{-2}\phi+\boldsymbol{u}r^{-1})dSdt+\int_V[U(\psi)-U(\psi_{T_2})]r^{-1}|_{t=T_2}dV,\\&\boldsymbol{X}_0\in{}^V_S,\ r=|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|\end{aligned}\tag{5.1}$$

并且满足水面波形与浸水面形状的关系式

$$\begin{aligned}\int_{T_1}^{T_2}\int_{\Sigma_2}(\partial\psi/\partial t)dSdt+\int_{T_1}^{T_2}\int_{\Sigma_1}\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{N}dSdt+\int_V[U(\psi_{T_2})\\-U(\psi)]|_{t=T_2}dV=0\end{aligned}\tag{5.2}$$

证 (4.21)式中分别取$\delta\phi=r^{-1}$及1，以及分别分部积分(4.21)式中的$\int_V\nabla\phi\delta\phi dV$ 项二次及一次，分别得到(5.1)及(5.2)式。由于(5.1)与(4.21)式等价，由定理 4 知道解存在。(5.2) 式正是Neumann问题的解存在条件。定理5证毕。

六、水表面积分域线性化及约束变分原理的另一形式

类似于性质1，成立

性质3 定理1～5中积分体域V的水表面界面Σ 或Σ_2，以及面域积分中的水表面积分域Σ或Σ_2，取为$z=0$，误差一个可允许的高阶小量。

注2 性质1、3能使由变分式或边界积分方程一次解出变量ϕ,ϕ_1,ψ，性质2保证了一些待定量的迭代过程收敛。因此性质1～3为定理1～5的计算实施提供了可能性。

两个阶段问题的约束变分式$\delta\Pi_1=0$中的变量ψ，将被依赖于速势的关系式(4.9)、(4.10)取代，致使变分式的非线性程度增高。为了降低变分式的非线性程度，下列易见成立的推论1提供了另一显见有效的迭代途径。

推论1 (i) 由式(3.1)、(4.12)，第一阶段问题的变分式(4.4)等价于

$$\begin{aligned}\delta\Pi_1=&-\int_0^{T_1}\int_V k^{-1}\delta pU(\psi)dVdt-\int_0^{T_1}\int_{\Sigma_1}k^{-1}h\delta p_a dSdt\\&+\int_{\Sigma_1}\rho_{a0}h_0\delta\phi_1|_{t=0}dS-\int_V\rho_0k^{-1}U(\psi_{T_1})\delta\phi|_{t=T_1}dV\\&-\int_0^{T_1}\int_{\partial\Sigma_1}\rho_{a0}(h\Lambda)\cdot\boldsymbol{n}\delta\phi_1dc=0\end{aligned}\tag{6.1}$$

其中积分域V及Σ_1由界面函数ψ的(4.9)、(4.10)式迭代确定。

(ii) 由式(3.5)、(4.25)，第二阶段问题的变分式(4.21)等价于

$$\delta\Pi_1=-\int_{T_1}^{T_2}\int_V \rho_0^{-1}\delta p U(\psi)dVdt-\int_{T_1}^{T_2}\int_{\Sigma_1}\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{N}\delta\phi dSdt$$
$$-\int_V U(\psi_{T_2})\delta\phi|_{t=T_2}dV=0 \tag{6.2}$$

其中积分域V由界面函数ψ的(4.10)式迭代确定。

注意推论1的处理方法与注2中的相反：水面边界保持真实情况（迭代确定），降低变分泛函的非线性程度。但是两者的效果是等价的。

七、水面船舶兴波阻力问题中的应用

文献[5]首次提出浮体绕流问题的变分解。作为航舶兴波阻力问题的应用，在三个算例中[5]初见成效。这个问题是本文第二阶段问题的一种蜕化情况：取为定常状态，给定速度$\boldsymbol{u}$取为水平方向并为定值，以及浸水面Σ_1是不变的。作为本文第二阶段问题的一种特殊应用，这里把文[6]的进一步的结果写出如下：

定理6[6] 水面船舶兴波阻力变分有限元及边界元解存在、唯一并且精度达到工程要求。

显然还成立

推论2 第二阶段问题为非定常刚体—水耦合问题，包括非定常水面船舶兴波问题奠定了变分有限元及边界元解理论基础。

参考文献

[1] Koehler, B. R., Jr. and C. F. Kettleborough, Hydrodynamic impact of a falling body upon a viscous incompressible fluid, *J. Ship Research*, **21**(3) (1977), 165.

[2] Korobkin, A. A. and V. V. Pukhnachov, Hydrodynamic impact into water, *Ann. Rev. Fluid Mech.*, **20** (1988), 159.

[3] 金伏生，某类连续介质力学一些基本问题的一种实用统一理论，科学通报，**34**(13) (1989), 1035；其他工作见：**35**(5) (1990), 397；**35**(15) (1990), 1197；**35**(19) (1990), 1459.

[4] Arthurs, A. M., *Complementary Variational Principles*, Clarendon Press, Oxford (1970).

[5] 金伏生，计及粘性边界层三维浮体绕流模型及其变分原理，科学通报，**29**(17) (1984), 1044；三个算例见：武汉水运工程学院学报，**9**(4) (1985), 75及**11**(1) (1987), 107；《中国造船工程学会阻力论文集》(1988), 158.

[6] 金伏生，水面船舶兴波阻力变分解及边界积分方程解，水动力学研究与进展，**6**(3) (1991), 23.

[7] 刘高联，三维振荡机翼非定常跨声速绕流的变分原理族，中国科学A辑，(11) (1988), 1171.

[8] 金伏生，建议一个极限分析的广义变分原理，固体力学学报，(1) (1981), 107；(1) (1984), 111.

[9] Simpson, H. C. and S. J. Spector, On the positivity of the second variation in finite elasticity, *ARMA*, **98** (1987), 1.

Variational Principles for Hydrodynamic Impact Problems

Jin Fu-sheng

(*Wuhan Institute of Technology, Wuhan*)

Abstract

We first establish the rigorous field equations of the two continuous stages before and after entering water. Then correspondently, we obtain the specific variational principles, bounded theorems, and boundary integral equations of the second stage problems. The existence of solutions are proved and the scheme of solving the solutions are provided. Finally, as a numerical example, the ship's wave resistence problem is used to demonstrate the specific application of the second stage problems and its accuracy. Then we provide a rigorous and sound theoretical basis of variational finite element method and boundary element method for calculating the accurately fundamental equations.

Key words variational principle, boundary integral equation, hydrodynamic impact problem