

广义热传导方程有限元算法的计算准则*

欧阳华江

(大连理工大学, 1990年9月28日收到)

摘 要

本文作者曾对经典的(抛物型)热传导方程提出了两种单调性的新概念, 推导并证明了几组计算准则, 可以使其有限元数值解消除很容易出现的振荡和超界现象. 本文把上述成果用于广义(双曲型)热传导方程的有限元解中, 推导出它的有限元解的计算准则, 并获得了一些新结论.

关键词 热传导方程 双曲型偏微分方程 有限元法 准则/振荡 超界

一、问题的提出

人们通常研究的热传导方程是抛物型偏微分方程, 其有限元解经常会发生振荡或超界现象. 鉴于此, 作者曾提出数值解的时间单调性和空间单调性这两个新概念^[1], 在此基础上, 推出并证明了获得合理数值解的几组计算准则(充分条件)^[1~3], 在此领域中取得了不少进展.

经典的(抛物型)方程可写为

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} &= \nabla^2 T(\mathbf{x}, t) + f(\mathbf{x}, t), \quad T(\mathbf{x}, 0) = T_0, \quad \mathbf{x} \in V \\ T &= T_1, \quad \mathbf{x} \in S_1; \quad \frac{\partial T}{\partial n} = \rho, \quad \mathbf{x} \in S_2; \quad \frac{\partial T}{\partial n} = \beta(T_3 - T), \quad \mathbf{x} \in S_3 \end{aligned} \right\} \quad (1.1)$$

早已有人指出经典热传导方程的缺陷: 一个扰动会在发生的瞬间传播到物体 V 上的各点, 即传播速度是无穷大^[4]. 这显然是不合理的, 热量传播的速度是有限的, 所以有人仿照波动方程, 在经典的抛物型热传导方程中增加一个表示传播速度影响的项, 方程便变为双曲型的电报方程^[4], 本文称之为广义热传导方程, 它可写为^[5]

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} + \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} &= \nabla^2 T(\mathbf{x}, t) + f(\mathbf{x}, t) \\ T(\mathbf{x}, 0) &= T_0, \quad \partial T / \partial t |_{t=0} = 0, \quad \mathbf{x} \in V \\ T &= T_1, \quad \mathbf{x} \in S_1; \quad \frac{\partial T}{\partial n} = \rho, \quad \mathbf{x} \in S_2; \quad \frac{\partial T}{\partial n} = \beta(T_3 - T), \quad \mathbf{x} \in S_3 \end{aligned} \right\} \quad (1.2)$$

当传播速度 $v \rightarrow \infty$, 广义热传导方程退化为经典的热传导方程.

在广义热传导方程中, 增加了温度对时间二阶偏导一项, 整个问题的数学性质发生了质

* 钱伟长推荐.

的变化, 又因为方程(1.2)是描述波动、振动等振荡现象的控制方程, 其数值解比抛物型方程的数值解更容易发生振荡, 问题更加复杂。

无论是抛物型的, 还是双曲型的, 热传导方程的数值解都应该符合热传导的基本物理规律: 热量总是由温度较高的部分流向较低的部分。即在[1~3]中首次提出的单调性的概念对广义热传导方程的数值解也一样适用。

二、有限元列式和单调性概念

把物体 V 划分为若干单元 V_i , 设单元形函数阵为 $[N(\mathbf{x})]$, 节点温度向量为 $\mathbf{q}(t)$, 则有

$$T(\mathbf{x}, t) = \sum_i [N(\mathbf{x})] \mathbf{q}(t), \quad \frac{\partial T}{\partial t} = \sum_i [N(\mathbf{x})] \dot{\mathbf{q}}(t), \quad \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} = \sum_i [N(\mathbf{x})] \ddot{\mathbf{q}}(t),$$

结合Galerkin法可推出(1.2)

$$\left. \begin{aligned} [M] \ddot{\mathbf{q}}(t) + [C] \dot{\mathbf{q}}(t) + [K] \mathbf{q}(t) &= \mathbf{F} \\ [M] &= \frac{1}{v^2} \sum_i \iiint_{V_i} [N]^T [N] dV; \quad [C] = \frac{1}{\alpha} \sum_i \iiint_{V_i} [N]^T [N] dV \\ [K] &= [K_v] + [K_s]; \quad [K_v] = \sum_i \iiint_{V_i} [\nabla N]^T [\nabla N] dV \\ [K_s] &= \sum_i \iint_{S_k} \beta [N]^T [N] dS \\ \mathbf{F} &= \sum_i \iiint_{V_i} f [N]^T dV + \sum_j \iint_{S_j} \rho [N]^T dS + \sum_k \iint_{S_k} \beta T_3 [N]^T dS \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

这里 S_j 表示具有第二类边界(S_2)条件的第 j 个单元的外边界, S_k 表示具有第三类边界(S_3)条件的第 k 个单元的外边界。对第一类边界(S_1)上的节点 l , 令 B 为大数(如 $B=10^6$), 应把 K_{ll} 修正为 BK_{ll} , F_l 修正为 $BK_{ll}T_1$ 。

对(2.1)再做时域上的离散, 把(2.1)中的第一式在时段 $[t_{n-1}, t_{n+1}]$ 上积分, 并只考虑 $f=0$ 的无源情况, 可得递推有限元算法

$$\left. \begin{aligned} [A] \mathbf{q}^{n+1} &= [B] \mathbf{q}^n + [D] \mathbf{q}^{n-1} + \mathbf{F} \Delta t^2 \\ \mathbf{F} &= \sum_j \iint_{S_j} \rho [N]^T dS + \sum_k \iint_{S_k} \beta T_3 [N]^T dS \\ [A] &= [M] + \theta_1 \Delta t [C] + \theta_2 \Delta t^2 [K] \\ [B] &= 2[M] + (2\theta_1 - 1) \Delta t [C] + (2\theta_2 - \theta_1 - 1/2) \Delta t^2 [K] \\ [D] &= -[M] + (1 - \theta_1) \Delta t [C] + (\theta_1 - \theta_2 - 1/2) \Delta t^2 [K] \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

这里 θ_1, θ_2 是数值积分系数, 它们取不同的值对应着不同的计算格式, 如 $\theta_1=1.5$ 和 $\theta_2=1$ 是后差格式, 而 $\theta_1=0.5$ 和 $\theta_2=0.25$ 是平均加速度法。

设初值 T_0 是常量, 则有 $\mathbf{q}^0 = T_0 \mathbf{I}$, $\mathbf{I}^T = \{1, 1, \dots, 1\}$ 。按照Taylor级数对 t_1 有 \mathbf{q} 展开式:

$$\mathbf{q}^1 = \mathbf{q}^0 + \dot{\mathbf{q}}^0 \Delta t + \ddot{\mathbf{q}}^0 \Delta t^2 / 2 \quad (2.3)$$

由初始条件 $\partial T / \partial t|_{t=0} = 0$ 得 $\dot{\mathbf{q}}^0 = 0$, 再由(2.1)得 $\ddot{\mathbf{q}}^0 = [M]^{-1} (\mathbf{F} - [K] \mathbf{q}^0)$, 可推出递推公式(2.2)的起始条件为

$$\mathbf{q}^0 = T_0 \mathbf{I}; \quad \mathbf{q}^1 = \mathbf{q}^0 + \Delta t^2 [M]^{-1} (\mathbf{F} - [K] \mathbf{q}^0) / 2 \quad (2.4)$$

在热传导过程中, 热量总是从温度高的部分向低的部分传播。对无源热传导, 若 $\rho \geq 0$, $T_1 > T_0$ 和 $T_3 > T_0$, 即热量流入物体 V , 则其上任一点的温度应该随时间单调升; 或若 $\rho \leq 0$,

$T_1 \leq T_0$ 和 $T_3 \leq T_0$, 即热量流出物体 V , 其上任一点的温度随时间单调降。也就是无源问题的解答应该具有时间单调性。某些特殊的无源问题的解答还应进一步具有空间单调性。所以提出这两种单调性的概念, 并由此可导出获得合理数值解的计算准则。

三、时间单调性

定义 对任意时刻 t_n , 若 $\rho \geq 0$, $T_1 \geq T_0$ 和 $T_3 \geq T_0$, 则 $q^{n+1} \geq q^n$; 或若 $\rho \leq 0$, $T_1 \leq T_0$ 和 $T_3 \leq T_0$, 则 $q^{n+1} \leq q^n$ 。

引理1 若 $\rho \geq 0$, $T_1 \geq T_0$ 和 $T_3 \geq T_0$, 则 $F - [K]q^0 \geq 0$; 或若 $\rho \leq 0$, $T_1 \leq T_0$ 和 $T_3 \leq T_0$, 则 $F - [K]q^0 \leq 0$ 。

证明 对第一类和第三类边界条件, 引理1在[1~3]中已给出证明。现只研究第二类边界条件, 对第二类边界上点 j , 对应刚度阵 $[K]$ 的行不必修改, 该行所有元素之和是零, 可得

$$(F - [K]q^0)_j = \iint_{S_j} \rho N_j^T dS - \sum_{i=1}^m K_{ji} T_0 = \iint_{S_j} \rho N_j^T dS \quad (3.1)$$

使用低阶单元 (C^1 类单元), 如一维线性元、平面三角元、四节点等参元、空间四面体元、八节点等参元, 在单元边界 S_j 上, 总有 $N_j^T \geq 0$ 。可见: 若 $\rho \geq 0$, $F - [K]q^0 \geq 0$; 或若 $\rho \leq 0$, $F - [K]q^0 \leq 0$ 。引理1对第一类、第二类和第三类边界条件都成立。

引理2 当 $\rho \geq 0$, $T_1 \geq T_0$ 和 $T_3 \geq T_0$, 若满足(3.2), 则 $q^2 \geq q^1$; 或当 $\rho \leq 0$, $T_1 \leq T_0$ 和 $T_3 \leq T_0$, 若满足(3.2), 则 $q^2 \leq q^1$ 。

$$[A]^{-1}([E] + ([B] - [A])[M]^{-1}/2) \geq 0 \quad (3.2)$$

证明 设 $[E]$ 为单位阵。由(2.2)得

$$\begin{aligned} [A](q^2 - q^1) &= ([B] - [A])q^1 + [D]q^0 + F\Delta t^2 \\ &= ([B] - [A])(q^1 - q^0) + ([D] + [B] - [A])q^0 + F\Delta t^2 \end{aligned} \quad (3.3)$$

因为 $[D] + [B] - [A] = -[K]\Delta t^2$, 由(2.4)得 $q^1 - q^0 = \Delta t^2[M]^{-1}(F - [K]q^0)/2$, 推出

$$\begin{aligned} [A](q^2 - q^1) &= ([B] - [A])(q^1 - q^0) + (F - [K]q^0)\Delta t^2 \\ &= \Delta t^2([E] + ([B] - [A])[M]^{-1}/2)(F - [K]q^0) \end{aligned} \quad (3.4)$$

由(3.4)可见, 若满足(3.2), 由引理1可推出引理2。

定理1 当 $\rho \geq 0$, $T_1 \geq T_0$ 和 $T_3 \geq T_0$ 时, 若满足(3.2)和(3.5), 则对任意 t_n , $q^{n+1} \geq q^n$; 或当 $\rho \leq 0$, $T_1 \leq T_0$ 和 $T_3 \leq T_0$, 若满足(3.2)和(3.5), 则对任意 t_n , $q^{n+1} \leq q^n$ 。

$$[A]^{-1}[B] \geq 0; [A]^{-1}[D] \geq 0; [M]^{-1} \geq 0 \quad (3.5)$$

证明 由引理1和引理2可知, 当 $\rho \geq 0$, $T_1 \geq T_0$ 和 $T_3 \geq T_0$, 若满足(3.2)且 $[M]^{-1} \geq 0$, 则 $q^1 \geq q^0$, $q^2 \geq q^1$; 或当 $\rho \leq 0$, $T_1 \leq T_0$ 和 $T_3 \leq T_0$, 若满足(3.2)且 $[M]^{-1} \geq 0$, 则 $q^1 \leq q^0$, $q^2 \leq q^1$ 。

由(2.2)可推出另一递推公式

$$[A](q^{n+1} - q^n) = [B](q^n - q^{n-1}) + [D](q^{n-1} - q^{n-2}) \quad (3.6)$$

由(3.6)可见, 若满足 $[A]^{-1}[B] \geq 0$ 和 $[A]^{-1}[D] \geq 0$, 则由 $q^{n-1} \geq q^{n-2}$ 和 $q^n \geq q^{n-1}$ 可推出 $q^{n+1} \geq q^n$; 或由 $q^{n-1} \leq q^{n-2}$ 和 $q^n \leq q^{n-1}$ 可推出 $q^{n+1} \leq q^n$ 。

从 q^0 与 q^1 , q^1 与 q^2 的关系及递推公式(3.6), 根据数学归纳法, 可证明定理1。

定理2 式(3.7)是解答具有时间单调性的一组充分条件,即本文所说的计算准则。

$$\left. \begin{aligned} [M]^{-1} \geq 0; [A]^{-1}([E] + ([B] - [A])[M]^{-1}/2) \geq 0 \\ [A]^{-1}[B] \geq 0; [A]^{-1}[D] \geq 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.7)$$

定理2是定理1的一个推论,不必证明。

考察式(3.7),还可推出其它的计算准则。

定理3 式(3.8)是解答具有时间单调性的一组充分条件。

$$[M]^{-1} \geq 0; [A]^{-1} \geq 0; [E] + ([B] - [A])[M]^{-1}/2 \geq 0; [B] \geq 0; [D] \geq 0 \quad (3.8)$$

无论是对动力问题还是热传导问题,只要质量集中得当,都会提高计算精度^[6],所以下把 $[M]$ 阵和 $[C]$ 阵都集中“质量”,显然会使 $[M]^{-1} \geq 0$ 。

在(3.8)中,需要求 $[A]^{-1}$,很不方便,根据矩阵分析理论:若正定阵的非对角线元素都非正数,则其逆阵是非负的^[7]。集中“质量”后, $M_{ij}, C_{ij} = 0 (i \neq j)$,只要 $K_{ij} \leq 0$ 就能使 $A_{ij} \leq 0 (i \neq j)$,可以证明:使用线性元,包括一维线性元、内角不大于 $\pi/2$ 的平面三角元和四面体元, $K_{ij} \leq 0 (i \neq j)$ ^[8]。考察(2.2),可以得到定理4。

定理4 若集中 $[M]$ 和 $[C]$ 并使用内角小于 $\pi/2$ 的三角元和四面体元或一维线性元,则(3.9)和(3.10)是解答具有时间单调性的又一充分条件

$$2\theta_2 - \theta_1 - 1/2 \leq 0; \theta_1 - \theta_2 - 1/2 \leq 0; \theta_2 - \theta_1 - 1/2 \leq 0 \quad (3.9)$$

$$\left. \begin{aligned} 2M_{ii} + (2\theta_1 - 1)\Delta t C_{ii} + (2\theta_2 - \theta_1 - 1/2)\Delta t^2 K_{ii} \geq 0 \\ -M_{ii} + (1 - \theta_1)\Delta t C_{ii} + (\theta_1 - \theta_2 - 1/2)\Delta t^2 K_{ii} \geq 0 \\ 3M_{ii} + (\theta_1 - 1)\Delta t C_{ii} + (\theta_2 - \theta_1 - 1/2)\Delta t^2 K_{ii} \geq 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.10)$$

证明 若满足(3.9)和(3.10),则可推出(3.8)。

式(3.9)是对计算格式的要求,而(3.10)是对单元类型和尺寸及时间步长的要求。

四、关于几种计算格式

对于 $\theta_1, \theta_2 \geq 0$, (3.9)中只要前两个不等式成立就足够了,还可从中推出 $\theta_1 \leq 1.5, \theta_2 \leq 1$ 。下面把计算格式分为条件稳定和绝对稳定两类来研究。

1. 绝对稳定格式

递推算法(2.2)的绝对稳定性要求为^[6]

$$\theta_1 \geq 0.5; \theta_2 \geq (\theta_1 + 1/2)^2/4 \quad (4.1)$$

结合(3.9)可知,满足(4.2)的计算格式是绝对稳定且有可能消除振荡的

$$0.5 \leq \theta_1 \leq 1.5; 0.25 \leq \theta_2 \leq 1; 2\theta_2 - \theta_1 \leq 0.5; \theta_1 - \theta_2 \leq 0.5; \theta_2 \geq (\theta_1 + 1/2)^2/4 \quad (4.2)$$

可见 $\theta_1 = 0.5$ 和 $\theta_2 = 0.25$ (平均加速度法)及 $\theta_1 = 1.5$ 和 $\theta_2 = 1$ (后差格式)这两种计算格式都满足式(4.2),但当 $\theta_1 = 1.5$ 和 $\theta_2 = 1$ 时,(3.10)式中的第二个不等式不成立,所以绝对稳定的平均加速度法是个有可能消除振荡的计算格式。对该格式,式(3.10)化为

$$\left. \begin{aligned} 2M_{ii} - 0.5\Delta t^2 K_{ii} \geq 0; -M_{ii} + 0.5\Delta t C_{ii} - 0.25\Delta t^2 K_{ii} \geq 0 \\ 3M_{ii} - 0.5\Delta t C_{ii} - 0.75\Delta t^2 K_{ii} \geq 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.3)$$

满足(4.3)中的第三式则也必满足其中的第一式,所以只有后两式有用。令 $r_i = M_{ii}/K_{ii}$,
 $s_i = C_{ii}/K_{ii}$,可从中推出

$$\left. \begin{aligned} \max_i (s_i - \sqrt{s_i^2 - 4r_i}) \leq \Delta t \leq \min_i [s_i + \sqrt{s_i^2 - 4r_i} \\ (\sqrt{s_i^2 + 36r_i} - s_i)/3]; s_i^2 \geq 4r_i \end{aligned} \right\} \quad (4.4)$$

在(4.4)中, 第二式是单元类型和大小及网格的要求, 而第一式是时间步长与单元的关系。

2. 条件稳定格式

对中心差分法, $\theta_1=0.5, \theta_2=0$, 它是条件稳定格式, 稳定条件为 $\Delta t < 2/\max_i \omega_i^{(0)}$, $\omega_i = \sqrt{K_i/M_i}$, K_i 和 M_i 分别是 $[K]$ 和 $[M]$ 经过一系列相似变换化成对角阵后的对角元, ω_i 相当于动力问题中的频率。该格式满足(3.9), 这时式(3.10)化为

$$2M_{ii} - \Delta t^2 K_{ii} \geq 0; 0.5\Delta t C_{ii} - M_{ii} \geq 0; 3M_{ii} - 0.5\Delta t C_{ii} - \Delta t^2 K_{ii} \geq 0 \quad (4.5)$$

上式可简化为

$$2M_{ii} - \Delta t^2 K_{ii} \geq 0.5\Delta t C_{ii} - M_{ii} \geq 0 \quad (4.6)$$

从(4.6)中解出 Δt 的上下界, 结合稳定性要求得到

$$\max_i \frac{2r_i}{s_i} \leq \Delta t \leq \min_i [\sqrt{2r_i}, (\sqrt{s_i^2 + 48r_i} - s_i)/4]; \Delta t < \min_i \frac{2}{\omega_i} \quad (4.7)$$

对中心差分法, 没有直接对单元的要求, 缺点是需要求出系统的谱半径才能确定 Δt 的上界。

对其它的计算格式, 应该使用(3.9)和(3.10)作判断。

五、具体的上下界公式

考虑一个杆件上的一维热传导, 左端绝热 ($\rho=0$), 右端是对流换热边界或定温边界, 使用线性元, 宽度为 Δx , 并集中“质量”, 可从(2.2)中推出

$$\left. \begin{aligned} [M] = [G]/v^2; [C] = [G]/\alpha; F = \{0, 0, \dots, 0, \beta T_s\}^T \\ [G] = \frac{\Delta x}{2} \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 2 & & & \\ & & 2 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 2 \\ 0 & & & & & 1 \end{bmatrix}; [K] = \frac{1}{\Delta x} \begin{bmatrix} 1 & -1 & & & & \\ -1 & 2 & -1 & & & \\ & -1 & 2 & -1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & -1 & 2 & -1 \\ & & & & -1 & 1 + \beta \Delta x \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (5.1)$$

1. 平均加速度法

换热和定温度边界的上下界公式分别为

$$\begin{aligned} 1 - \sqrt{1 - 8\alpha^2/(\nu \Delta x)^2} \leq 2\alpha \Delta t / \Delta x^2 \\ \leq \frac{1}{1 + \beta \Delta x} \min [1 + \sqrt{1 - 8\alpha^2(1 + \beta \Delta x)/(\nu \Delta x)^2}, \\ (\sqrt{1 + 72\alpha^2(1 + \beta \Delta x)/(\nu \Delta x)^2} - 1)/3] \quad (S_3 \text{上}) \end{aligned} \quad (5.2)$$

$$\begin{aligned} 1 - \sqrt{1 - 8\alpha^2/(\nu \Delta x)^2} \leq 2\alpha \Delta t / \Delta x^2 \leq \min [1 + \sqrt{1 - 8\alpha^2/(\nu \Delta x)^2}, \\ (\sqrt{1 + 72\alpha^2/(\nu \Delta x)^2} - 1)/3] \quad (S_1 \text{上}) \end{aligned} \quad (5.3)$$

无论哪种边界, 都应使 $\Delta x \geq 2\alpha^2(2\beta + \sqrt{4\beta + 2\nu^2/\alpha^2})/\nu^2$

2. 中心差分法

要确定中心差分法中 Δt 的上界, 首先应求出系统的最大广义特征值。高阶系统的特征

值很能估准,也没有普遍适用且精度高的近似估算公式,但对最大特征值, Irons已证明:系统的最大特征值不大于单元的最大特征值^[6].由此可知:对换热边界, $\max \omega_i^2 \leq v^2 / \Delta x^2 (2 + \beta \Delta x + \sqrt{4 + (\beta \Delta x)^2})$; 对定温度边界, $\max \omega_i^2 \leq v^2 / 4 \Delta x^2$, 由(4.7)可推出

$$\left. \begin{aligned} \frac{2\alpha}{v^2} \leq \Delta t \leq \frac{1}{1 + \beta \Delta x} \min \left[\frac{\Delta x \sqrt{1 + \beta \Delta x}}{v}, \frac{\Delta x^2}{8\alpha} \left(\sqrt{1 + \frac{48\alpha^2(1 + \beta \Delta x)}{(v \Delta x)^2}} - 1 \right) \right] \\ \Delta t < \Delta x \sqrt{2 + \beta \Delta x + \sqrt{4 + (\beta \Delta x)^2}} / v \quad (\text{换热边界 } S_3) \end{aligned} \right\} \quad (5.4)$$

$$\frac{2\alpha}{v^2} \leq \Delta t \leq \min \left[\frac{\Delta x}{v}, \frac{\Delta x^2}{8\alpha} \left(\sqrt{1 + \frac{48\alpha^2}{(v \Delta x)^2}} - 1 \right) \right] \quad (\text{定温度边界 } S_1) \quad (5.5)$$

六、空间单调性

定义 对任意时刻 t_n , 若 $q_i^n \geq q_0^n$, 则 $q_i^n \geq q_{i-1}^n$; 或若 $q_i^n \leq q_0^n$, 则 $q_i^n \leq q_{i-1}^n$. 这里 $i=1, 2, \dots, m$, m 是节点总数.

无源热传导问题的温度场总应具有时间单调性,一些特殊的无源热传导问题还应具有空间单调性,比如本文第五节的例子,左端绝热,右端与外界交换热量,其温度场的空间分布是一条单调曲线.

因为很难推出某一时刻任意两个相邻节点的温度差 $q_i^n - q_{i-1}^n$ 的表达式,关于空间单调性一般不能象对时间单调性那样得到普遍的结论,但对刚才提到的一维热传导这一特殊问题,幸运地得到了几点结论.

引理3 对左端绝热,右端是定温度或对流换热边界的一维无源热传导问题,使用线性元,对任意时刻 t_n ,若 $[K]q^n \geq 0$,则温度场的空间分布是一条从左到右单调减的曲线;或若 $[K]q^n \leq 0$,则温度场的空间分布是一条从左到右单调增的曲线.注意 $[K]q^n$ 这里不考虑最后一行.

证明 把 $[K]q^n$ 的积向量的各元素分解为

$$\Delta x \cdot [K]q^n = \begin{Bmatrix} q_0^n - q_1^n \\ -q_0^n + 2q_1^n - q_2^n \\ -q_1^n + 2q_2^n - q_3^n \\ \vdots \\ -q_{m-2}^n + 2q_{m-1}^n - q_m^n \\ -q_{m-1}^n + (1 + \beta \Delta x)q_m^n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} q_0^n - q_1^n \\ q_1^n - q_2^n - (q_0^n - q_1^n) \\ q_2^n - q_3^n - (q_1^n - q_2^n) \\ \vdots \\ q_{m-1}^n - q_m^n - (q_{m-2}^n - q_{m-1}^n) \\ -q_{m-1}^n + (1 + \beta \Delta x)q_m^n \end{Bmatrix} \quad (6.1)$$

从(6.1)可见, $[K]q^n$ 除了最后一行外,每个元之间有种递推关系,若 $[K]q^n \geq 0$,即 $q_0^n - q_1^n \geq 0$, $q_1^n - q_2^n \geq q_0^n - q_1^n \geq 0$, $q_2^n - q_3^n \geq q_1^n - q_2^n \geq 0, \dots, q_{m-1}^n - q_m^n \geq q_{m-2}^n - q_{m-1}^n \geq \dots \geq q_0^n - q_1^n \geq 0$, 温度场的空间分布恰好是一条从左向右单调减的曲线. $[K]q^n \leq 0$ 的情况同理可证.

定理5 对上述特殊一维问题,若解答具有时间单调性且满足(6.2),则解答也同时具有空间单调性.

$$[B] \geq 0, [D] \geq 0 \quad (6.2)$$

证明 把 $[A] = [B] + [D] + [K]\Delta t^2$ 代入递推公式(2.2),可把它分解为

$$\Delta t^2[K]q^{n+1} = F\Delta t^2 + [B](q^n - q^{n+1}) + [D](q^{n-1} - q^{n+1}) \quad (6.3)$$

若解答具有时间单调性,那么,对任意 t_n 或者 $q^n \geq q^{n+1}$, $q^{n-1} \geq q^n \geq q^{n+1}$, F 除了最后一行外都是零,又因为 $[B] \geq 0$, $[D] \geq 0$,可知 $[K]q^{n+1} \geq 0$;或者 $q^n \leq q^{n+1}$, $q^{n-1} \leq q^n \leq q^{n+1}$,同理可知 $[K]q^{n+1} \leq 0$.由引理3知,这时解答也同时具有空间单调性.

定理6 若满足(3.8),或(3.9)和(3.10),或(4.4),或(4.7),或(5.2)和(5.3),或(5.4)和(5.5),则解答具有时间单调性,同时具有空间单调性.

证明 定理6中关于时间单调性的结论已经得到证明,若满足定理6中提到的任何一组计算准则,都能包含着 $[B] \geq 0$, $[D] \geq 0$,根据定理5可证明定理6.

由定理6可知,解答若具有时间单调性,在绝大多数情况下,它还同时具有空间单调性.但其逆命题不成立,详见第七节.

七、算例和分析

考虑第五节提到的例题,取 $\alpha=20$, $\beta=0.03$, $\Delta x=10$, $v=10$, $T_0=100$, $T_3=50$,沿杆长划分30个线性元,按平均加速度法; $\theta_1=0.5$, $\theta_2=0.25$.以上数据保持不变,取不同的 Δt 值做计算,限于篇幅,只列出前四步的结果.按上面的数据,从(5.2)求出 $0.44 \leq \Delta t \leq 0.76$, $\Delta x \geq 6.78$.

1. 满足该不等式的 Δt 都能给出同时具有时间单调性和空间单调性的结果,说明本文的结论是正确的, $\Delta t=0.5$ 时的结果见表1.

表1 $\Delta t=0.5$ 的计算结果

x	250	260	270	280	290	300
0.5	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	96.25
1.0	100.00	100.00	100.00	100.00	99.82	93.93
1.5	100.00	100.00	100.00	99.99	99.53	91.90
2.0	100.00	100.00	100.00	99.96	99.17	90.16

2. 若取 Δt 大于上界0.76直至0.85仍可得到都单调的结果,因为本文的计算准则都是充分条件,不满足它仍有可能获得都单调的结果.但为了保险,应使用满足上下界条件的 Δt ,即使 Δt 大于上界或小于下界,最好也不要与上界或下界相差过大. $\Delta t=0.8$ 时的结果见表2

表2 $\Delta t=0.8$ 的计算结果

x	250	260	270	280	290	300
0.8	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	90.40
1.6	100.00	100.00	100.00	99.98	99.25	89.68
2.4	100.00	100.00	100.00	99.91	98.51	87.05
3.2	100.00	100.00	99.99	99.80	97.71	85.53

3. 若 Δt 取得超过0.85直至1.92,则解答只具有空间单调性而没有时间单调性,说明时间单调性和空间单调性是两回事. $\Delta t=1$ 的结果列于表3.可以看出右边界 $x=300$ 处的温度振荡.

4. 若把 Δt 取得更大,解答没有单调性. $\Delta t=2$ 的结果见表4.值得指出的是,随着时间向前发展,振荡在减弱,后来甚至可能消失.

表3 $\Delta t=1$ 的计算结果

t	x	250	260	270	280	290	300
1.0		100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	85.00
2.0		100.00	100.00	100.00	99.95	98.59	87.60
3.0		100.00	100.00	99.99	99.81	97.56	83.92
4.0		100.00	100.00	99.97	99.58	96.48	83.24

表4 $\Delta t=2$ 的计算结果

t	x	250	260	270	280	290	300
2.0		100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	40.00
4.0		100.00	100.00	99.95	99.34	90.84	92.48
6.0		100.00	99.98	99.77	98.08	91.76	62.96
8.0		99.99	99.92	99.43	96.99	88.48	82.80

5. 若取 Δt 小于下界0.44, 得到单调的结果. 说明 Δt 即使小于下界, 但因为集中了“质量”, 下界实际上不起作用, 对抛物型热传导方程也是在集中“质量”后没有下界限制^[3]. 只是在这里, 这个结论能否适用于其它计算格式还不清楚.

根据计算结果, 给出右端点的温度在不同时间步长下随时间的变化图(见图1).

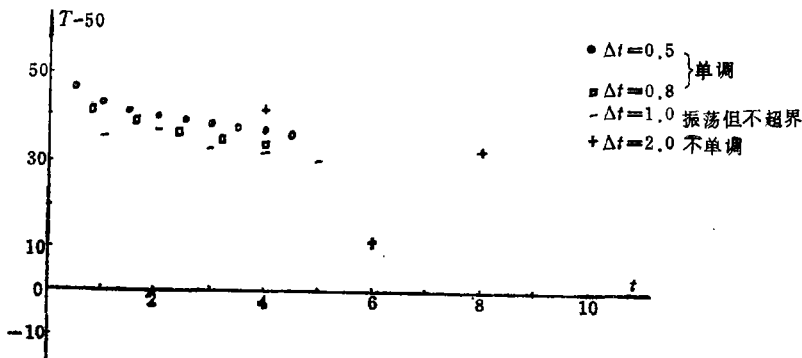


图1 不同时间步长 Δt 下右端边界点的温度变化

上述五种情况与常规的抛物型方程的情况是完全相似的^[2], 据此, 同样可得到图2所示的单调区域分布图.

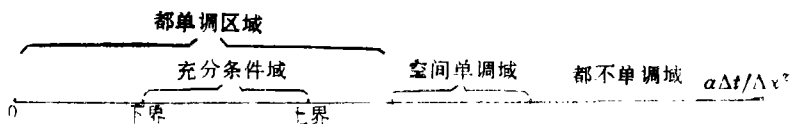


图2 单调区域沿 $a\Delta t/\Delta x^2$ 坐标轴的分布(集中“质量”)

八、结 论

1. 在一定条件下, 双曲型热传导方程(衰减的电报方程)的有限元解可以是不振荡的, 即具有时间单调性.

2. 本文推导并证明了几组计算准则.

3. 对绝对稳定的平均加速度法和条件稳定的中心差分格式, 分别给出了 Δt 的上下界公式。
 4. 对一维问题, 使用线性元, 给出了 Δt 的显式上下界公式, 可用于事前判断。
 5. 讨论了空间调性。
 6. 通过计算, 给出了单调区域沿轴 $\alpha\Delta t/\Delta x^2$ 的分布。
 7. 双曲型热传导方程的计算准则比抛物型热传导方程的要复杂, 单调区域要小, 如果发生振荡, 振荡的幅度更大。
- 本文把针对经典热传导方程所提出的思想移植到求解广义热传导方程, 在此区域中又获得了新的结果。

感谢钱令希教授的悉心指导。

参 考 文 献

- [1] 欧阳华江, 混凝土长期变形的基本理论及其应用, 大连理工大学博士论文 (1989), 29—52.
- [2] 欧阳华江、肖丁, 一维热传导方程有限元解的单调性准则, 计算结构力学及其应用, 7(2) (1990), 71—76.
- [3] 欧阳华江、肖丁, 一类抛物型方程的有限元算法的计算准则, 应用数学和力学, 10(12) (1989), 1115—1121.
- [4] 埃克特, E. R. G., R. M. 德雷克, 《传热传质分析》, 航青译, 金如山校, 科学出版社 (1983), 24—29.
- [5] Baumeister, K.J. and T.D. Hamill, Hyperbolic heat-conduction equation — a solution for the semi-infinite body problem. *J. Heat Transfer, Trans. ASME*, 91(4) (1969), 543—548.
- [6] Zienkiewicz, O.C., 《有限元法》, 尹泽勇等译校, 科学出版社 (1985), 600—637.
- [7] Householder, A.S. 著, 《数值分析中的矩阵论》, 孙家昶等译, 科学出版社 (1986), 9—32.
- [8] 515科研组, 瞬变温度场问题的有限元解法和最大模原理, 计算数学, 4(2) (1982), 113—120.

Criteria for Finite Element Algorithm of Generalized Heat Conduction Equation

Ouyang Hua-jiang

(Research Institute of Engineering Mechanics, Dalian
University of Technology, Dalian)

Abstract

To eliminate oscillation and overbounding of finite element solutions of classical heat conduction equation, the author and Xiao have put forward two new concepts of monotonies and have derived and proved several criteria. This idea is borrowed here to deal with generalized heat conduction equation and finite element criteria for eliminating oscillation and overbounding are also presented. Some new and useful conclusions are drawn.

Key words heat conduction equation, hyperbolic differential equation, finite element method, criteria/oscillation, overbounding