

# 非线性振动系统的异宿轨道 分叉、次谐分叉和混沌

张伟 霍拳忠 李 骊

(天津大学力学系) (北京工业大学)

(1991年1月21日收到)

## 摘 要

在参数激励与强迫激励联合作用下具有 van der Pol 阻尼的非线性振动系统, 其动态行为是非常复杂的. 本文利用 Melnikov 方法研究了这类系统的异宿轨道分叉、次谐分叉和混沌. 对于各种不同的共振情况, 系统将经过无限次奇阶次谐分叉产生 Smale 马蹄而进入混沌状态. 最后我们利用数值计算方法研究了这类系统的混沌运动. 所得结果揭示了一些新的现象.

**关键词** 异宿轨道分叉 次谐分叉 混沌运动 参数激励 Melnikov 方法

## 一、引 言

对参数激励与强迫激励联合作用下非线性动力系统的分叉和混沌问题的研究是非线性振动理论中最感兴趣的领域之一. 这类振动系统可以揭示出极其复杂的行为方式和稳定性. 对于这种复杂行为的阐明不仅是数学上面临挑战的问题, 而且也具有很大的实际意义.

在这篇文章里我们研究参数激励与强迫激励联合作用下一个自由度的非线性振动系统

$$\ddot{x} - \varepsilon(\mu - \alpha x^2)\dot{x} + (\omega^2 + 2\varepsilon c \cos 2t)(\gamma x - \varepsilon \beta x^3) = \varepsilon F \cos \Omega t \quad (1.1)$$

这里  $0 < \varepsilon \ll 1$ ,  $\mu$  是正的或负的阻尼系数,  $\alpha, \beta, \gamma$  是正的或负的参数.

令  $x_1 = x, x_2 = \dot{x}$ , 则方程(1.1)可以写成如下形式

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\gamma\omega^2 x_1 + \varepsilon[\mu x_2 + \beta\omega^2 x_1^3 - \alpha x_1^2 x_2 \\ \quad - 2(\gamma x_1 - \varepsilon\beta x_1^3)\cos 2t + F \cos \Omega t] \end{cases} \quad (1.2)$$

当方程(1.1)的线性阻尼和刚度、参数激励、强迫激励均为零时, 方程(1.2)变为

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \varepsilon\beta\omega^2 x_1^3 - \varepsilon\alpha x_1^2 x_2 \end{cases} \quad (1.3)$$

方程(1.3)所代表的系统是余维2退化的, 其向量场的线性部分具有二重退化

$$A_0 = D_x f(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (1.4)$$

因此在数学上方程(1.2)可以看成是方程(1.3)的普适开折(universal unfolding)并且加上参数扰动和强迫扰动<sup>[1][3]</sup>. 方程(1.2)可以产生余维2分叉.

在文献[1]中, Holmes 和 Rand 利用微分动力系统方法研究了 van der Pol-Duffing 型强非线性振子的局部分叉和全局分叉特性. 在文献[2]中, Greenspan 和 Holmes 利用 Melnikov 方法研究了具有强迫激励时 van der Pol-Duffing 型强非线性振子的同宿分叉特性. 在文献[3]中, 唐建宁和刘曾荣利用 Melnikov 方法研究了 2-jet 系统和 3-jet 系统普适开折后的复杂分叉现象. 下面我们利用 Melnikov 方法研究方程(1.1)的异宿分叉、次谐波分叉和混沌.

## 二、异宿轨道分叉

为了便于研究, 作标度变换  $\beta \rightarrow \beta/\varepsilon$ , 则方程(1.2)变为

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\gamma\omega^2 x_1 + \beta\omega^2 x_1^3 + \varepsilon[\mu x_2 - \alpha x_1^2 x_2 \\ - 2(\gamma x_1 - \beta x_1^3) \cos 2t + F \cos \Omega t] \end{cases} \quad (2.1)$$

当  $\varepsilon=0$  时, 方程(2.1)变为

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 \\ \dot{x}_2 = -\gamma\omega^2 x_1 + \beta\omega^2 x_1^3 \end{cases} \quad (2.2)$$

方程(2.2)是 Hamilton 系统, 其 Hamiltonian 为

$$H = \frac{1}{2} x_2^2 + \frac{1}{2} \gamma \omega^2 x_1^2 - \frac{1}{4} \beta \omega^2 x_1^4 = h \quad (2.3)$$

这里  $h$  是常数.

$$\text{令} \quad \begin{cases} x_2 = 0 \\ -\gamma\omega^2 x_1 + \beta\omega^2 x_1^3 = 0 \end{cases} \quad (2.4)$$

得到: (I) 当  $\beta\gamma > 0$  时, 有三个奇点  $(0, 0)$ ,  $(\pm\sqrt{\gamma/\beta}, 0)$ ;

(II) 当  $\beta\gamma < 0$  时, 有一个奇点  $(0, 0)$ .

在本文里我们只研究 (I) 的情况. 经过简单分析后, 易知

(i) 当  $\gamma > 0$  时,  $(0, 0)$  是中心,  $(\sqrt{\gamma/\beta}, 0)$  和  $(-\sqrt{\gamma/\beta}, 0)$  是双曲鞍点;

(ii) 当  $\gamma < 0$  时,  $(0, 0)$  是鞍点,  $(\sqrt{\gamma/\beta}, 0)$  和  $(-\sqrt{\gamma/\beta}, 0)$  是中心.

情况 (i) 产生异宿环, 情况 (ii) 产生同宿环. 下面我们仅对情况 (i) 进行研究.

当  $h = \gamma^2 \omega^2 / 4\beta$  时, 存在着过双曲鞍点  $P_+^0(\sqrt{\gamma/\beta}, 0)$  和  $P_-^0(-\sqrt{\gamma/\beta}, 0)$  的一对异宿(heteroclinic)轨道  $q^0(t)$  和双曲鞍点组成的异宿环  $\Gamma^0 = \{P_-^0\} \cup \{q^0(t) | t \in \mathbf{R}\} \cup \{P_+^0\}$ , 则未扰动系统(2.2)的两条异宿轨道  $q^0(t)$  的方程为

$$\begin{cases} x_1(t) = \pm \sqrt{\frac{\gamma}{\beta}} \operatorname{th}\left(\frac{\sqrt{2\gamma}}{2} \omega t\right) \\ x_2(t) = \pm \frac{\gamma\omega}{2} \sqrt{\frac{2}{\beta}} \operatorname{sech}^2\left(\frac{\sqrt{2\gamma}}{2} \omega t\right) \end{cases} \quad (2.5)$$

当  $0 < h = h_k < \gamma^2 \omega^2 / 4\beta$  时, 在异宿环  $\Gamma^0$  内存在着一族围绕中心的周期闭轨, 其方程为

$$\begin{cases} x_{1k} = k\sqrt{\frac{2\gamma}{(1+k^2)\beta}} \operatorname{sn}\left(\sqrt{\frac{\gamma}{1+k^2}}\omega t\right) \\ x_{2k} = \frac{k\gamma\omega}{1+k^2} \sqrt{\frac{2}{\beta}} \operatorname{cn}\left(\sqrt{\frac{\gamma}{1+k^2}}\omega t\right) \operatorname{dn}\left(\sqrt{\frac{\gamma}{1+k^2}}\omega t\right) \end{cases} \quad (2.6)$$

这里  $\operatorname{sn}$ ,  $\operatorname{cn}$ ,  $\operatorname{dn}$  均为 Jacobi 椭圆函数,  $k$  满

足关系式  $h_k = \frac{k^2\gamma^2\omega^2}{(1+k^2)\beta}$ , 周期为  $T(k) = \frac{4K(k)}{\omega}$

$\cdot \sqrt{\frac{1+k^2}{\gamma}}$ ,  $K(k)$  为第一类完全椭圆积分. 系

统 (2.2) 的相平面如图 1 所示.

对应于方程 (2.5) 的异宿轨道的 Melnikov 函数为

$$\begin{aligned} M(t_0) &= \int_{-\infty}^{\infty} x_2(t) [\mu x_2(t) - \alpha x_1^2(t) x_2(t) - 2(\gamma x_1(t) \\ &\quad - \beta x_1^3(t)) \cos 2(t+t_0) + F \cos \Omega(t+t_0)] dt \\ &= \mu W_1 - \alpha W_2 + \gamma W_3 \sin 2t_0 + \beta W_4 \sin 2t_0 + F W_5 \cos \Omega t_0 \end{aligned} \quad (2.7)$$

这里  $W_1 = \frac{2\gamma\omega\sqrt{2\gamma}}{3\beta}$ ,  $W_2 = \frac{2\gamma^2\omega\sqrt{2\gamma}}{15\beta^2}$ ,  $W_3 = \frac{8\pi}{\beta\omega^2} \operatorname{cosch}\left(\frac{\pi}{\omega}\sqrt{\frac{2}{\gamma}}\right)$

$$W_4 = -\frac{8\pi}{3\beta^2\omega} \left(\frac{4}{\gamma\omega^2} - 1\right) \operatorname{cosch}\left(\frac{\pi}{\omega}\sqrt{\frac{2}{\gamma}}\right), \quad W_5 = \frac{\Omega\pi}{\omega} \sqrt{\frac{2}{\beta}} \operatorname{cosch}\left(\frac{\pi\Omega}{2\omega}\sqrt{\frac{2}{\gamma}}\right) \quad (2.8)$$

令  $A = \max_{t_0 \in (0, T)} M(t_0)$ ,  $B = \min_{t_0 \in (0, T)} M(t_0)$  (2.9)

$$M = \max_{t_0 \in (0, T)} [(\gamma W_3 + \beta W_4) \sin 2t_0 + F W_5 \cos \Omega t_0] \quad (2.10)$$

$$m = \min_{t_0 \in (0, T)} [(\gamma W_3 + \beta W_4) \sin 2t_0 + F W_5 \cos \Omega t_0] \quad (2.11)$$

这里  $T = \max(\pi, 2\pi/\Omega)$ . 由此我们得到以下推论.

**推论 1** (a) 当  $AB > 0$ , 即  $\mu W_1 - \alpha W_2 < m$  或  $\mu W_1 - \alpha W_2 > M$  时, 对于任何  $t_0$ ,  $M(t_0)$  没有简单零点, 则经过双曲鞍点的稳定流形  $W^s(p_*)$  与不稳定流形  $W^u(p_*)$  永远不相交, 即有  $W^s(p_*) \cap W^u(p_*) = \emptyset$ .

(b) 当  $AB < 0$ , 即  $m < \mu W_1 - \alpha W_2 < M$  时, 对于某些  $t_0$ ,  $M(t_0)$  有简单零点, 则经过双曲鞍点的稳定流形  $W^s(p_*)$  与不稳定流形  $W^u(p_*)$  横截相交于非退化异宿点, 即有  $W^s(p_*) \cap W^u(p_*) \neq \emptyset$ . 因此系统 (1.1) 具有横截 2-环, 这意味着系统 (1.1) 在相平面上出现 Smale 马蹄<sup>[4][5]</sup>.

(c) 当  $AB = 0$ , 即  $\mu W_1 - \alpha W_2 = m$  或  $\mu W_1 - \alpha W_2 = M$  时, 对于某些  $t_0$ ,  $M(t_0)$  有二次零点, 则稳定流形  $W^s(p_*)$  与不稳定流形  $W^u(p_*)$  发生二次异宿相切<sup>[4][6]</sup>.

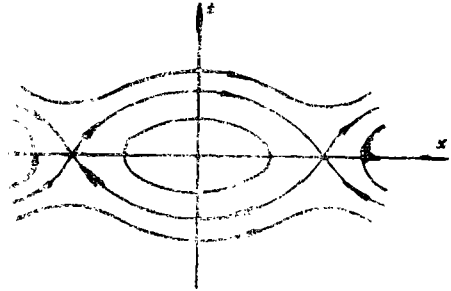
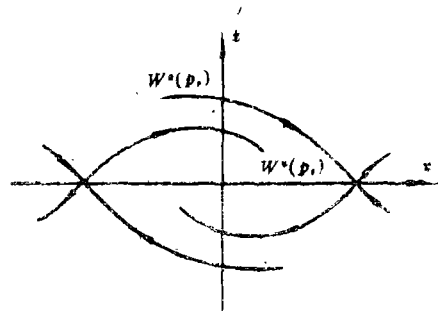


图 1 系统 (2.2) 的相图



(a)

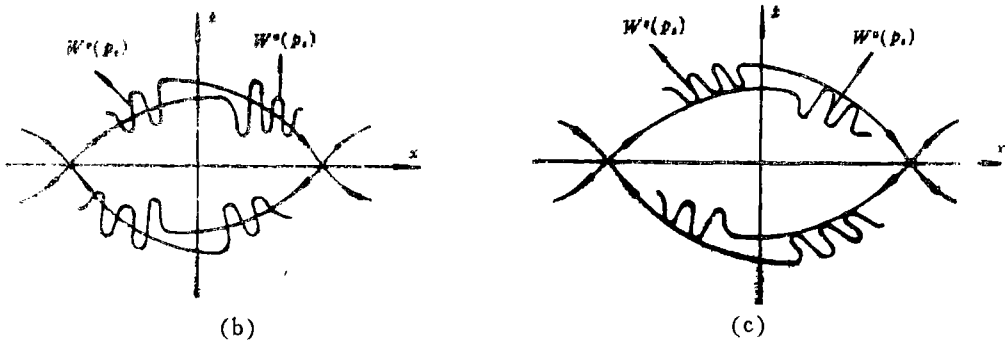


图2 Poincaré映射的稳定流形和不稳定流形的关系

根据上面的分析,可以得到上述三种情况下 Poincaré 映射的稳定流形  $W^s(p_s)$  和不稳定流形  $W^u(p_s)$  之间的关系图,如图 2 所示.

### 三、次谐分叉

在这节里我们计算对应于(2.6)的共振周期轨道的次谐 Melnikov 函数.共振条件为

$$\frac{4K(k)}{\omega} \sqrt{\frac{1+k^2}{\gamma}} = \frac{m}{n} \frac{2\pi}{\Omega} \quad (3.1)$$

并且有  $\omega = \Omega$ ,  $l\Omega = 2$ ,  $\Omega = 1/2, 1, 2$ ;  $l$  为正整数.

(1) 当  $\omega = \Omega = 1$  时,称为主共振——主参数共振;

(2) 当  $\omega = \Omega = 2$  时,称为主共振——基本参数共振.因此周期为  $T(k) = 2m\pi/n\Omega$

( $m, n$  为互素整数)的次谐 Melnikov 函数为

$$\begin{aligned} M^{m/n}(t_0) &= \int_0^{nT(k)} x_{2k}(t) \{ \mu x_{2k}(t) - \alpha x_{1k}^2(t) x_{2k}(t) - 2[\gamma x_{1k}(t) \\ &\quad - \beta x_{1k}^3(t)] \cos 2(t+t_0) + F \cos \Omega(t+t_0) \} dt \\ &= \mu J_1(m, n) - \alpha J_2(m, n) + \gamma J_3(m, n) \sin 2t_0 \\ &\quad + \beta J_4(m, n) \sin 2t_0 + F J_5 \cos \Omega t_0 \end{aligned} \quad (3.2)$$

这里

$$\begin{aligned} J_1(m, n) &= \frac{8\omega}{3\beta} \left( \frac{\gamma}{1+k^2} \right)^{3/2} [(k^2-1)K(k) + (k^2+1)E(k)] \\ J_2(m, n) &= \frac{16\omega}{15\beta^2} \left( \frac{\gamma}{1+k^2} \right)^{5/2} [2(k^4-k^2+1)E(k) - (k^4-3k^2+2)K(k)] \\ J_3(m, n) &= \begin{cases} 0, & (n \neq 1, 2) \\ \frac{4m^2\pi^3}{K^2\beta} \left( \frac{\gamma}{1+k^2} \right) \operatorname{cosech} \frac{m\pi K'}{K} & (n=1, \Omega=1) \\ \frac{16m^2\pi^3}{K^2\beta} \left( \frac{\gamma}{1+k^2} \right) \operatorname{cosech} \frac{2m\pi K'}{K} & (n=1, \Omega=\frac{1}{2}) \\ \frac{m^2\pi^3}{K^2\beta} \left( \frac{\gamma}{1+k^2} \right) \operatorname{cosech} \frac{m\pi K'}{2K} & (n=1, \Omega=2, m \text{ 为偶数}) \\ \frac{8m^2\pi^3}{K^2\beta} \left( \frac{\gamma}{1+k^2} \right) \operatorname{cosech} \frac{m\pi K'}{K} & (n=2, \Omega=\frac{1}{2}, m \text{ 为奇数}) \end{cases} \end{aligned}$$

$$J_4(m, n) = \begin{cases} 0, & (n \neq 1, 2) \\ \frac{4m^2\pi^3}{K^2\beta^2} \left( \frac{\gamma}{1+k^2} \right)^2 \left\{ \frac{1}{3} \left[ \frac{m^2\pi^2}{K^2} + 4(2-k^2) \right] - 2k^2 \right\} \operatorname{cosech} \frac{m\pi K'}{K} & (n=, \Omega=1) \\ \frac{16m^2\pi^3}{K^2\beta^2} \left( \frac{\gamma}{1+k^2} \right)^2 \left\{ \frac{1}{3} \left[ \frac{4m^2\pi^2}{K^2} + 4(2-k^2) \right] - 2k^2 \right\} \operatorname{cosech} \frac{2m\pi K'}{K} & \left( n=1, \Omega=\frac{1}{2} \right) \\ \frac{m^2\pi^3}{K^2\beta^2} \left( \frac{\gamma}{1+k^2} \right)^2 \left\{ \frac{1}{3} \left[ \frac{m^2\pi^2}{4K^2} + 4(2-k^2) \right] - 2k^2 \right\} \operatorname{cosech} \frac{m\pi K'}{2K} & (n=1, \Omega=2, m \text{ 为偶数}) \\ \frac{8m^2\pi^3}{K^2\beta^2} \left( \frac{\gamma}{1+k^2} \right)^2 \left\{ \frac{1}{3} \left[ \frac{m^2\pi^2}{4K^2} + 4(2-k^2) \right] - 2k^2 \right\} \operatorname{cosech} \frac{m\pi K'}{K} & \left( n=2, \Omega=\frac{1}{2}, m \text{ 为奇数} \right) \end{cases}$$

$$J_5(m, n) = \begin{cases} 0, & (n \neq 1) \\ \frac{m\pi^2}{K} \sqrt{\frac{2}{\beta}} \left( \frac{\gamma}{1+k^2} \right)^{1/2} \operatorname{cosech} \frac{m\pi K'}{2K} & (n=1, m \text{ 为奇数}) \end{cases} \quad (3.3)$$

这里  $K' = K(k') = K(\sqrt{1-k^2})$ ,  $E = E(k)$  为第二类完全椭圆积分。

$$\text{令 } C = \max_{t_0 \in (0, T)} M^{m/n}(t_0), \quad D = \min_{t_0 \in (0, T)} M^{m/n}(t_0) \quad (3.4)$$

$$J = \max_{t_0 \in (0, T)} \{ [\gamma J_3(m, n) + \beta J_4(m, n)] \sin 2t_0 + F J_5(m, n) \cos \Omega t_0 \} \quad (3.5)$$

$$j = \min_{t_0 \in (0, T)} \{ [\gamma J_3(m, n) + \beta J_4(m, n)] \sin 2t_0 + F J_5(m, n) \cos \Omega t_0 \} \quad (3.6)$$

这里  $T = \max(\pi, 2\pi/\Omega)$ 。根据上面的分析计算, 我们得到以下结论。

**推论2** (a) 当  $CD > 0$ , 即  $\mu J_1(m, n) - \alpha J_2(m, n) < j$  或  $\mu J_1(m, n) - \alpha J_2(m, n) > J$  时, 对于任何  $t_0$ ,  $M^{m/n}(t_0)$  没有简单零点, 则扰动系统(2.1)无  $m/n$  次谐波。

(b) 当  $CD < 0$ , 即  $j < \mu J_1(m, n) - \alpha J_2(m, n) < J$  时, 对于某些  $t_0$ ,  $M^{m/n}(t_0)$  有简单零点, 则扰动系统(2.1)有  $m/n$  次谐波产生, 即存在  $-m/n$  次谐波分叉的周期轨道。对于  $\Omega = 1/2$  和  $\Omega = 1$  这两种共振情况, 系统(1.1)存在  $m$  次奇阶次谐波分叉。当强迫激励为零时, 对于  $\Omega = 1/2$  共振情况, 系统(1.1)存在  $m/2$  次 ( $m$  为奇数) 超次谐波分叉; 对于  $\Omega = 2$  共振情况, 系统(1.1)存在  $m$  次偶阶次谐波分叉。

(c) 当  $CD = 0$ , 即  $\mu J_1(m, n) - \alpha J_2(m, n) = j$  或  $\mu J_1(m, n) - \alpha J_2(m, n) = J$  时, 对于某些  $t_0$ ,  $M^{m/n}(t_0)$  有二次零点, 则扰动系统(2.1)有次谐波鞍结(saddle-node)分叉发生。

#### 四、混沌运动的数值研究

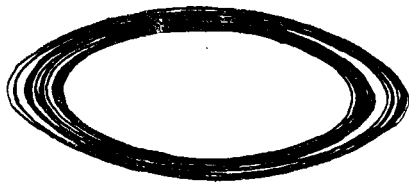
前面我们用 Melnikov 方法研究了系统(1.1)出现混沌运动的必要条件。由于 Melnikov 方法还不能完全揭示出系统(1.1)的混沌运动的特征, 因此这一节我们用数值计算方法研究系统(1.1)的混沌运动, 以便验证理论结果, 说明系统(1.1)确实存在着混沌运动。

要想对混沌运动和奇怪吸引子的性态进行定性判断和刻划,更深入地了解混沌运动的本质,必须使用数值计算方法和电子计算机进行仿真计算。目前人们主要用四种方法来定性刻划混沌运动和奇怪吸引子的特征:①相平面图;②Poincaré映射;③平均功率谱;④时间历程。要想从定量的角度去度量和刻划混沌运动,目前来说还不是一件很容易的事。最近Brunsdn和Holmes<sup>[13]</sup>等人设法从功率谱的角度来定量地度量梁的混沌振动,下面我们综合考虑这四种特征以便确定一个运动是否是混沌运动。

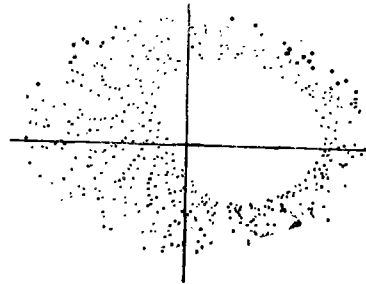
下面的一些结果是在HP1000计算机上利用SDSC仿真程序得到的。

### 1. $\omega = \Omega = 1$ , 即主共振——主参数共振情况下的结果

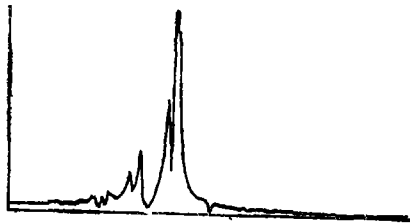
我们发现在 $F = 255.5$ ,  $x_{10} = 0.001$ ,  $x_{20} = 0.005$ ,  $\varepsilon = 0.0001$ ,  $\alpha = \mu = 5$ ,  $\gamma = \beta = 1$ 值处存在着混沌运动,如图3所示。



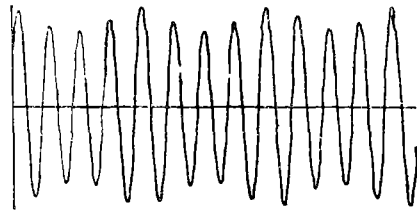
(a) 相平面图



(b) Poincaré映射



(c) 平均功率谱

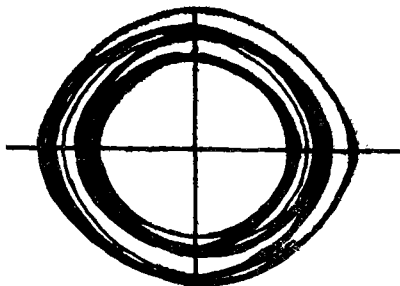


(d) 时间历程

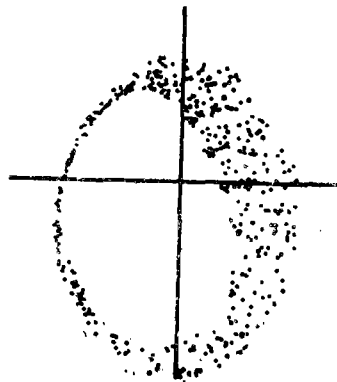
图3  $\gamma = 1$ ,  $\omega = \Omega = 1$ ,  $F = 255.5$ 时的混沌运动

### 2. $\omega = \Omega = 2$ . 即主共振——基本参数共振情况下的结果

当取 $F = 156.6$ ,  $x_{10} = 0.099$ ,  $x_{20} = 0.101$ ,  $\varepsilon = 0.001$ ,  $\alpha = \mu = 0.5$ ,  $\gamma = \beta = 1$ 值时,我们发现存在着混沌运动,如图3所示。



(a) 相平面图



(b) Poincaré映射

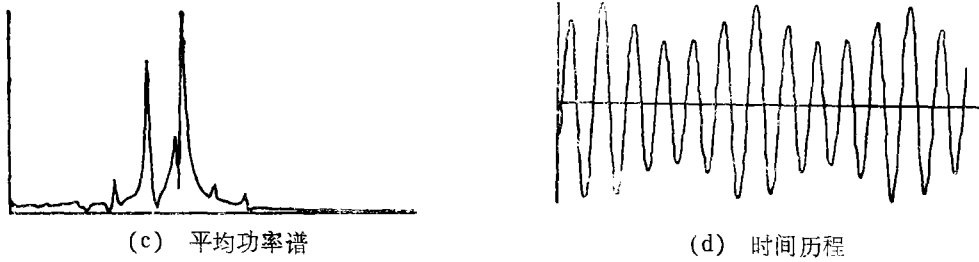


图4  $\gamma=1, \omega=\Omega=2, F=156.6$ 时的混沌运动

3.  $\omega=\Omega=1/2$  时的结果

当取  $F=35.56, x_{10}=0.099, x_{20}=0.101, \varepsilon=0.0001, \alpha=\mu=3, \gamma=\beta=1$  值时存在着混沌运动, 如图5所示.

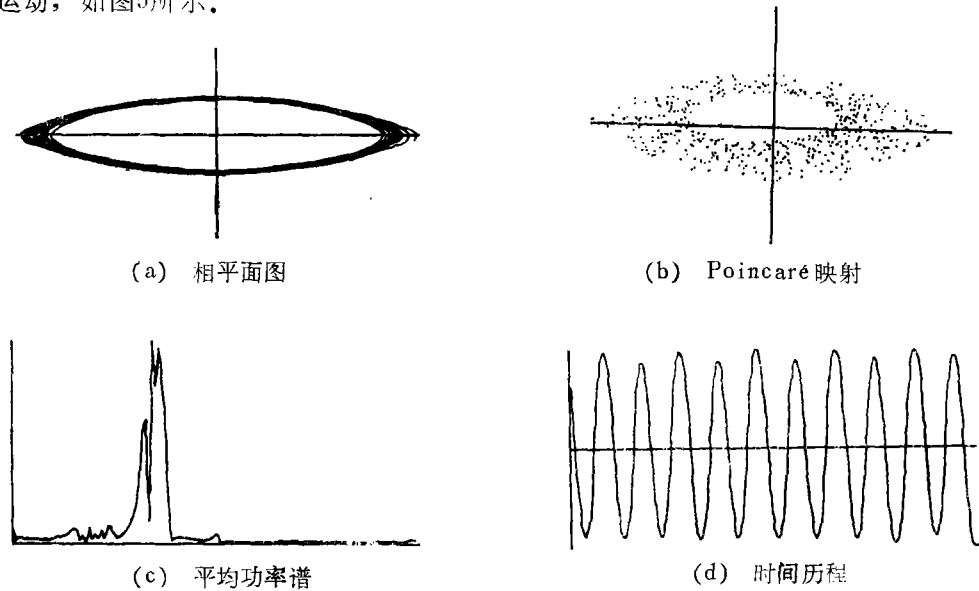
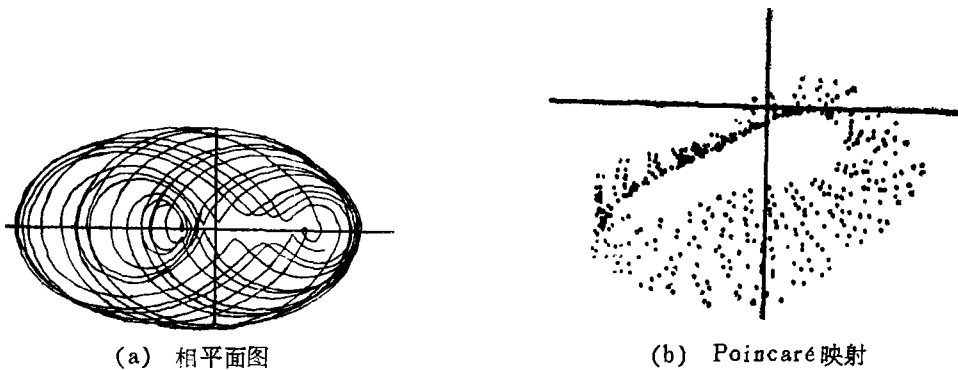


图5  $\gamma=1, \omega=\Omega=1/2, F=35.56$ 时的混沌运动

4.  $\omega=1, \Omega=2$ , 即1/2亚谐波共振——主参数共振情况下的结果

我们发现当取  $F=5.5, x_{10}=x_{20}=0.1, \varepsilon=0.1, \alpha=\mu=0.01, \gamma=\beta=1$  值时存在着混沌运动, 如图6所示.



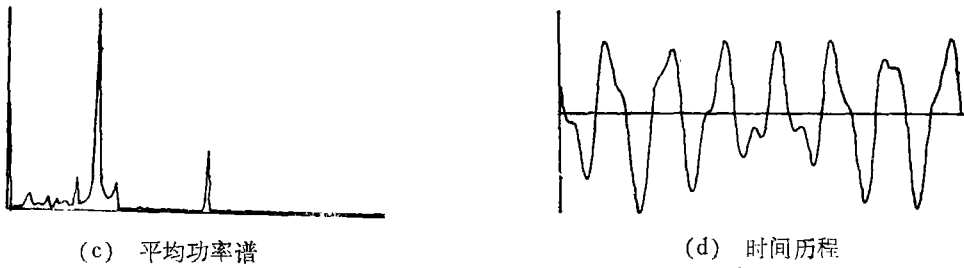


图6  $\gamma=1, \omega=1, \Omega=2, F=5.5$ 时的混沌运动

经过一些比较繁琐的计算后可以证明在上述四种共振情况下，每种共振情况产生混沌运动的参数值均满足推论1和推论2中的(b)，这说明理论结果和数值结果还是较为吻合的。

## 五、讨论和结论

在本文里，我们用Melnikov方法和数值计算方法研究了方程(1.1)的异宿轨道分叉、次谐分叉和混沌运动，发现了许多有趣的新现象。根据(3.3)式，经过简单计算可以证明当 $n=1$ 时，有 $\lim_{m \rightarrow \infty} M^{m/1}(t_0) = 2M(t_0)$ ；当 $n \neq 1$ 时， $\lim_{m \rightarrow \infty} M^{m/n}(t_0) = 2n(\mu W_1 - \alpha W_2 + \gamma W_3 \sin 2t_0 + \beta W_4 \sin 2t_0) \neq 2nM(t_0)$ 。由此可知在参数激励与强迫激励联合作用下超次谐分叉并不以出现Smale马蹄为极限<sup>[3][4]</sup>。

从(3.3)式和上面的分析可以看出，系统(1.1)只能有无限次奇阶次谐分叉而导致Smale马蹄，即意味着混沌。当强迫激励为零时，对于不同的共振情况，系统(1.1)可以有无限次次谐分叉和无限次偶阶次谐分叉而导致Smale马蹄出现，对于 $\omega = \Omega = 1/2$ 这种共振情况，系统(1.1)也可以以无限次奇阶超次谐分叉而导致Smale马蹄出现。

分析(3.3)式还可以看出，对于各种不同的共振情况，系统(1.1)可以经过不同的奇阶次谐分叉次序而导致Smale马蹄出现，从而有混沌运动产生。

在第四节里，我们还利用数值计算方法和电子计算机研究了系统(1.1)在四种共振情况下的混沌运动，从而验证了系统(1.1)在这四种共振情况下确有混沌运动产生。从所得结果我们发现存在异宿轨道情况下( $\gamma > 0$ )系统(1.1)的混沌运动与存在同宿轨道情况下( $\gamma < 0$ )系统(1.1)的混沌运动相比有非常大的区别。在 $\gamma > 0$ 时，混沌带很窄，运动对初值的微小变化很敏感，只有通过大量的计算才能找到混沌运动。从图形上看， $\gamma > 0$ 时系统(1.1)的混沌运动特征不如 $\gamma < 0$ 时混沌运动的特征显著。这种现象可以从力学的角度作出进一步的解释。在 $\gamma < 0$ 时系统(1.1)具有两个势阱(double well potentials)，因而混沌运动比较容易从直观上观察到。在 $\gamma > 0$ 时，系统(1.1)只有一个势阱(single well potential)，混沌运动不太容易从直观上观察到。从运动的角度来说，两种情况下判断混沌运动的标准也有所不同。由于有van der Pol阻尼项、三次非线性刚度项和参数激励项同时存在，也使得系统(1.1)的混沌运动的Poincaré映射图与强迫van der Pol方程和强迫Duffing方程的Poincaré映射图有很大区别。



## 参 考 文 献

- [1] Holmes, P. J. and R. A. Rand, Phase portraits and bifurcations of the nonlinear oscillator  $\ddot{x} + (a + \gamma x^2)\dot{x} + \beta x + \delta x^3 = 0$ , *Int. J. Nonlinear Mech.*, **15** (1960), 449—458.
- [2] Greenspan, B. D. and P. J. Holmes, Repeated resonance and homoclinic bifurcation in a periodically forced family of oscillators, *SIAM J. Math. Anal.*, **15** (1) (1984), 69—97.
- [3] 唐建宁、刘曾荣, 2-jet 和 3-jet 系统中的复杂分叉现象, *应用数学学报*, **11**(2) (1988), 173—181.
- [4] Guckenheimer, J. and P. J. Holmes, *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcations of Vector Fields*, Springer-Verlag, New York (1983).
- [5] Male, S. S., Differentiable dynamical systems, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **73** (1967), 747—817.
- [6] Greenspan, B. D. and P. J. Holmes, Homoclinic orbits, subharmonics and global bifurcations in forced oscillations, *Nonlinear Dynamics and Turbulence*, G. Barenblatt, G. Iooss, and D. D. Joseph (eds), Pitman, London (1983), 172—214.
- [7] Melnikov, V. K., On the stability of the center for time periodic perturbations, *Trans. Moscow Math. Soc.*, **12** (1963), 1—57.
- [8] Holmes, P. J., Averaging and chaotic motions in forced oscillations, *SIAM J. Appl. Math.*, **38** (1980), 65—80.
- [9] Hale, J. K., *Ordinary Differential Equations*, 2nd Edition, Kreiger Publ. Co. (1980).
- [10] Hale, J. K. and X. -B. Lin, Heteroclinic orbits for retarded functional differential equations, *J. Diff. Eqs.*, **65** (1986), 175—202.
- [11] Gradshteyn, I. S. and I. M. Ryzhik, *Table of Integrals, Series and Products*, Academic Press (1980).
- [12] 万世栋、李继彬, Jacobi 椭圆函数有理式的 Fourier 级数, *应用数学和力学*, **9** (6) (1988), 499—513.
- [13] Brunnsden, V. J., Cortell and P. J. Holmes, Power spectra of chaotic vibrations of a buckled beam, *J. Sound Vib.*, **130**(1) (1989), 1—25.

## Heteroclinic Orbit and Subharmonic Bifurcations and Chaos of Nonlinear Oscillator

Zhang Wei    Huo Quan-zhong  
(*Tianjin University, Tianjin*)

Li Li  
(*Beijing Polytechnic University, Beijing*)

### Abstract

Dynamical behavior of nonlinear oscillator under combined parametric and forcing excitation, which includes van der Pol damping, is very complex. In this paper, Melnikov's method is used to study the heteroclinic orbit bifurcations, subharmonic bifurcation and chaos in this system. Smale horseshoes and chaotic motions can occur from odd subharmonic bifurcation of infinite order in this system for various resonant cases. Finally the numerical computing method is used to study chaotic motions of this system. The results achieved reveal some new phenomena.

**Key words** heteroclinic orbit bifurcations, subharmonic bifurcations, chaotic motions, parametric excitation, Melnikov's method