应用数学和力学，第13卷第3期（1992年3月）　　应用数学和力学编委会编
Applied Mathematics and Mechanics　　重庆出版社出版

乘积空间中非线性算子的极大极小不动点定理及迭代法*

兰坤泉　丁协平

（四川师范大学数学系，1991年2月11日收到）

摘　要

本文研究了乘积空间中非线性算子的极大极小不动点和迭代法．作为我们结果的推论，一些耦合不动点定理被获得、它们推广了由郭大钧和 Lankshmikantham 获得的耦合不动点定理．（见 Nonlinear Anal. 11(1986), 623—632）和由兰在[4]、[6]中获得的结果．

关键词　极大极小不动点　耦合不动点

单调迭代法对于研究非线性微分方程的解是一种重要的方法（见[1]、[2]）．根据常微分方程初值问题的耦合拟解，郭和 Lakshmikantham 在[2]中对某些算子引入了抽象耦合不动点的概念并获得了许多耦合不动点及其应用．本文首先获得了乘积空间中一些非线性算子的极大极小不动点定理，它推广了[4]中定理1和[5]中定理1．作为我们结果的推论．非线性算子的耦合不动点定理能被获得，它推广了[2]中定理1和[6]中定理1．

一、叙述和定理的证明

设X是一实 Banach 空间，P是X中一锥，由P在X中引入半序“$\leqslant$”：$y\geqslant x$ 当且仅当$y-x\in P$．称(X, P)为半序 Banach 空间．假设X中的序由P给定．令u_0，$v_0\in X$，且$u_0\leqslant v_0$，$[u_0, v_0]=\{x\in X: u_0\leqslant x\leqslant v_0\}$．$X$中的序列$\{x_n\}$称为非减的（非增的），如果对每一个$\forall n\in N$（自然数集），$x_n\leqslant x_{n+1}$ $(x_{n+1}\leqslant x_n)$．一个映象A: $D\subset X\to X$称为非减的（非增的），如果$x\leqslant y$ $(x, y\in D)$推出$Ax\leqslant Ay$ $(Ay\geqslant Ax)$．如果$D\subset X$是一有界集，那么D的集非紧测度，(D)，被定义为：

$$\nu(D)=\inf\{d>0: D=\bigcup_{i=1}^{m} D_i, \text{ 对某个} m\in N \text{ 且} \operatorname{diam}(D_i)\leqslant d\} \tag{1.1}$$

显然，$\nu(Q)=0$ 当且仅当 Q 是列紧集，且$\nu(D_1\cup D_2)=\max\{\nu(D_1), \nu(D_2)\}$．其它性质见[3]．一个映象$A$: $D\subset X\to X$称为凝聚的如果，$\nu(A(Q))<\nu(Q)$，$Q\subseteq D$，$\nu(Q)\neq 0$．显然，

* 国家自然科学基金资助项目．

全连续映象是凝聚映象．令→和⇀分别表示强收敛和弱收敛．

引理1 设(X, P)是一半序 Banach 空间且$\{u_n\}$是一单调序列（即，$\{u_n\}$是非减的或非增的）．如果$\{u_{n_k}\}\subset\{u_n\}$，$\{u_{m_i}\}\subset\{u_n\}$且$u_{n_k}\to u^*$，$u_{m_i}\rightharpoonup u_*$，则$u^*=u_*$．

证明 应用$\{u_n\}$的单调性和P的弱闭性，引理1容易证明．

引理2 设(X, P)是一半序 Banach 空间．如果$\{u_n\}$是X中一弱列紧单调序列，则存在$u\in X$使得$u_n\rightharpoonup u$．进一步，如果$\{u_n\}$是非减的(非增的)，则$u_n\leqslant u\ (u_n\geqslant u)$，$n\in N$．

证明 不失一般性，设$\{u_n\}$是非减序列．因$\{u_n\}$是弱列紧的，则存在$\{u_{n_k}\}\subset\{u_n\}$和$u_0\in X$使得$u_{n_k}\rightharpoonup u_0$．如果$u_n\not\rightharpoonup u_0$，则存在$\varepsilon_0>0$，$f_0\in X^*$（$X$ 的对偶空间）和$\{u_{t_j}\}\subset\{u_n\}$使得$|f_0(u_{t_j}-u_0)|\geqslant\varepsilon_0$．也因$\{u_{t_j}\}$是弱列紧的，存在一弱收敛的子序列$\{u_{m_i}\}\subset\{u_{t_j}\}$．可以假设，$u_{m_i}\rightharpoonup u'$．因此$u'\neq u_0$，矛盾于引理1．因此，$u_n\rightharpoonup u_0$．因$u_{n+m}\geqslant u_n$且$u_{n+m}-u_n\in P$，$n$，$m\in P$，且$P$是弱闭的，$m\to+\infty$推出$u_0-u_n\in P$，并且因此，$u_n\leqslant u_0$，$n\in N$．

设X和Y是两个实 Banach 空间，分别赋予范数$\|\cdot\|_X$和$\|\cdot\|_Y$．乘积空间$X\times Y$中的范数定义如下：对任何$1\leqslant p\leqslant+\infty$和$(x, y)\in X\times Y$，令

$$\|(x, y)\|=\begin{cases}\max\{\|x\|_X,\ \|y\|_Y\} & (P=+\infty) \quad (*)\\ (\|x\|_X^p+\|y\|_Y^p)^{1/p} & (1\leqslant p<+\infty) \quad (**)\end{cases}$$

$X\times Y$按照通常的线性空间的加法和数乘和上面定义的范数成为 Banach空间．并且

$$(x_n, y_n)\to \text{当且仅当}\ x_n\to x_0\ \text{且}\ y_n\to y_0 \tag{1.2}$$

引理3[4] 设(X, P_1)和(Y, P_2)是两个半序 Banach 空间．则 (1.1) $(X\times Y, P_1\times(-P_2))$是具有正锥$P_1\times(-P_2)$的半序Banach空间；在下面的乘积空间中的半序均由$P_1\times(-P_2)$产生．

（2） 令$w_1=(x_1, y_1)$，$w_2=(x_2, y_2)$且w_1，$w_2\in X\times Y$，则$w_1\leqslant w_2$当且仅当$x_1\leqslant x_2$且$y_2\leqslant y_1$．

现在证明本文的主要结果．

定理 设(X, P_1)和(Y, P_2)是两个半序 Banach 空间且(u_0, v_0)，$(x_0, y_0)\in X\times Y$使得$(u_0, v_0)\leqslant(x_0, y_0)$。假设$B$：$[(u_0, v_0), (x_0, y_0)](=D)\to X\times Y$是非减凝聚映象．如果下面条件成立：

(H_1) $B(D)$有界；

(H_2) $(u_0, v_0)\leqslant B(u_0, v_0)$且$B(x_0, y_0)\leqslant(x_0, y_0)$；

(H_3) 如果$x_n\to x'$，则对任何$y\in Y$，$B(x_n, y)\rightharpoonup B(x', y)$且如果$y_n\to y'$，则对任何$x\in X$，$B(x, y_n)\rightharpoonup B(x, y')$．

则(a)B有极大极小不动点(u_*, v^*)和(x^*, y_*)，即$B(u_*, v^*)=(u_*, v^*)$，$B(x^*, y_*)=(x^*, y_*)$且对B的任何不动点$(\bar{x}, \bar{y})\in[(u_0, v_0), (x_0, y_0)]$，$u_*\leqslant\bar{x}\leqslant x^*$且$y_*\leqslant\bar{y}\leqslant v^*$．而且，

(b) $u_*=\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$，$v^*=\lim\limits_{n\to+\infty}v_n$，$x^*=\lim\limits_{n\to+\infty}x_n$且$y_*=\lim\limits_{n\to+\infty}y_n$，其中，$(u_{n+1}, v_{n+1})=B(u_n, v_n)$且$(x_{n+1}, y_{n+1})=B(x_n, y_n)$，$n=0, 1, 2, \cdots$

(c) $u_0\leqslant u_1\leqslant, \cdots, \leqslant x_n\leqslant, \cdots, \leqslant x_1\leqslant x_0$ 且

$y_0\leqslant y_1\leqslant, \cdots, \leqslant v_n\leqslant, \cdots, \leqslant v_1\leqslant v_0$．

证明 因B是非减的，由引理3(2)知，(c)成立．从(H_1)知，$S=\{(u_{n-1}, v_{n-1}): n\in N\}$有界，显然，$S=\{(u_0, v_0)\}\cup B(S)$且$\nu(S)=\nu(B(S))$．因$B$是凝聚映象，$\nu(S)=0$，并且

因此存在子序列$\{(u_{n_k}, v_{n_k})\}$使得$(u_{n_k}, v_{n_k})\to(u_*, v^*)$。由(1.2)知，$u_{n_k}\to u_*$且$v_{n_k}\to v^*$。根据(c)和引理2知，$\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=u_*$，$\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=v^*$且$u_{n-1}\leqslant u_*$，$v^*\geqslant v_{n-1}$，$n\in N$。因此，$(u_n, v_n)\leqslant(u_*, v^*)$。因$B$是非减的，$B(u_n, v_n)=(u_{n+1}, v_{n+1})\leqslant B(u_*, v^*)$且

$$(u_*, v^*)\leqslant B(u_*, v^*) \tag{1.3}$$

现在，对任何固定的n，$m=0, 1, 2, \cdots$和任何$p\in N$使得$m\leqslant n+p$，有$u_n\leqslant u_{n+p}$，$v_{n+p}\leqslant v_m$并且因此，由引理3(2)知，$(u_n, v_m)\leqslant(u_{n+p}, v_{n+p})$。因$B$是非减的，有

$$B(u_n, v_m)\leqslant B(u_{n+p}, v_{n+p})=(u_{n+p+1}, v_{n+p+1})\leqslant(u_*, v^*) \tag{1.4}$$

固定(1.4)式中m且让n变动，由(H_3)得$B(u_n, v_m)\to B(u_*, v_m)$，$n\to+\infty$。因锥是弱闭的，由(1.4)知，

$$B(u_*, v_m)\leqslant(u_*, v^*) \tag{1.5}$$

在(1.5)式中让m变动，由(H_3)和(1.5)式知，

$$B(u_*, v^*)\leqslant(u_*, v^*) \tag{1.6}$$

由(1.3)和(1.6)式知，$B(u_*, v^*)=(u_*, v^*)$。

类似可证，$x^*=\lim\limits_{n\to+\infty}x_n$，$y_*=\lim\limits_{n\to+\infty}y_n$且$B(x^*, y_*)=(x^*, y_*)$。

最后，令$(\bar{x}, \bar{y})\in[(u_0, v_0), (x_0, y_0)]$且$B(\bar{x}, \bar{y})=(\bar{x}, \bar{y})$.考虑$[(u_0, v_0), (\bar{x}, \bar{y})]$。应用(a)和(b)，有$\bar{x}\geqslant u_*$且$\bar{y}\leqslant v^*$。类似地，考虑$[(\bar{x}, \bar{y}), (x_0, y_0)]$有$\bar{x}\leqslant x^*$且$y_*\leqslant\bar{y}$。至此定理获证。

注0 该定理推广了[4]中定理1.

注1 从定理的证明可以看到，如果P_1和P_2是正则锥，B是凝聚的条件可去掉。

注2 如果$Y=\{0\}$，则该定理推广了[5]中定理1.

为了给出下面的推论，首先回忆混合单调映象的概念(见[2])。

设(X, P)是一半序 Banach 空间且$D\subset X$非空。一个映象A: $D\times D\to X$称为混合单调的，如果$A(x, y)$在x是非减的且在y是非增的。即如果$x_1\leqslant x_2$ $(x_1, x_2\in D)$推出$A(x_1, y)\leqslant A(x_2, y)$，对任何$y\in D$且$y_1\leqslant y_2$ $(y_1, y_2\in D)$推出对任何$x\in D$，$A(x, y_1)\geqslant A(x, y_2)$。点$(x^*, y^*)\in D\times D$称为$A$的耦合不动点如果$A(x^*, y^*)=x^*$且$y^*=A(y^*, x^*)$。

假设下面的乘积空间由(*)式赋予范数。

推论 设(X, P)是一半序 Banach 空间，u_0，$v_0\in X$且$u_0\leqslant v_0$.假设A: $[u_0, v_0]\times[u_0, v_0]\to X$是混合单调凝聚映象使得下面的条件成立：

(h_1) $A([u_0, v_0]\times[u_0, v_0])$有界；

(h_2) $u_0\leqslant A(u_0, v_0)$且$A(u_0, v_0)\leqslant v_0$；

(h_3) $A(x, \cdot)$在x是半连续且$A(y, \cdot)$在y是半连续。

则A有一极大极小不动点$(x^*, y^*)\in[u_0, v_0]\times[u_0, v_0]$，即$(x^*, y^*)$是$A$的耦合不动点，且对任何$A$的耦合不动点$(\bar{x}, \bar{y})\in[u_0, v_0]\times[u_0, v_0]$，$x^*\leqslant\bar{x}\leqslant y^*$且$x^*\leqslant\bar{y}\leqslant y^*$。而且，$x^*=\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$，$y^*=\lim\limits_{n\to+\infty}v_n$，其中$u_n=A(u_{n-1}, v_{n-1})$，$v_n=A(v_{n-1}, u_{n-1})$，$n\in N$，且使得$u_0\leqslant u_1\leqslant$; $\cdots$, $\leqslant v_n\leqslant$, $\cdots$, $\leqslant v_1\leqslant v_0$。

为了给出推论的证明，需要下面一些引理。

引理4[6] 如果$D=D_1\times D_2\subset X\times Y$有界，则

$$\nu_\infty(D)\leqslant\max\{\nu_X(D_1), \nu_Y(D_2)\} \tag{1.7}$$

其中 ν_∞，ν_X和ν_Y分别表示$X\times Y$，X和Y中集测度。

下面的结果是明显的。

引理5 如果$f\in(X\times Y)^*$，则$f|_X\in X^*$且$f|_Y\in Y^*$，其中$f|_X$和$f|_Y$分别表示f在X和Y上的限制。

引理6[6] 设$(X,\ P_1)$和$(Y_1,\ P_2)$是两个半序 Banach 空间，$u_0,\ x_0\in X$；$y_0,\ v_0\in Y$且$u_0\leqslant x_0$，$y_0\leqslant v_0$，则

$$[(u_0,\ v_0),\ (x_0,\ y_0)]=[u_0,\ x_0]\times[y_0,\ v_0]$$

引理7 设$(X,\ P)$是一半序 Banach 空间，$u_0,\ v_0\in X$ 且$u_0\leqslant v_0$。假设A: $[u_0,\ v_0]\times[u_0,\ v_0]\to X$是一映象。令

$$B(x,\ y)=(A(x,\ y),\ A(y,\ x))\qquad(x,\ y\in[u_0,\ v_0])\tag{1.8}$$

则下述结论成立：

(P_1) 如果A是混合单调的，则B: $[(u_0,\ v_0),\ (v_0,\ u_0)]\to X\times X$是非减的；

(P_2) 如果A是凝聚的，则B也是；

(P_3) 如果$A(x,\ \cdot)$在x是半连续且$A(\cdot,\ y)$在y是半连续的，则B满足(H_3)；

证明 (P1)的证明见[5]。

(P_2) 设$D_1\subset[(u_0,\ v_0),\ (v_0,\ u_0)]$有界且$\nu_\infty(D_1)\neq 0$。注意到$B(D_1)\subset A(D_1)\times A(D_1)$。因$A$是凝聚的由引理4知，$\nu_\infty(B(D_1))\leqslant\nu_\infty(A(D_1)\times A(D_1))=\nu_X(A(D_1))<\nu_\infty(D_1)$。

(P_3) 假设$y_n\to y_0$，令$x\in X$且$f\in(X\times Y)^*$。对任何$\varepsilon>0$，因$A(x,\cdot)$在x半连续且$A(\cdot,\ y)$在y半连续。存在$n_0\in N$使得

$$|f(A(x,\ y_n)-A(x,\ y_0),\ 0)|<\frac{\varepsilon}{2}\qquad(n\geqslant n_0)\tag{1.9}$$

且

$$|f(0,\ A(y_n,\ x)-A(y_0,\ x))|<\frac{\varepsilon}{2}\qquad(n\geqslant n_0)\tag{1.10}$$

因$B(x,\ y_n)-B(x,\ y_0)=(A(x,\ y_n)-A(x,\ y_0),\ A(y_n,\ x)-A(y_0,\ x))$，则

$$|f(B(x,\ y_n)-B(x,\ y_0))|\leqslant|f(A(x,\ y_n)-A(x,\ y_0),\ 0)|$$
$$+|f(0,\ A(y_n,\ x)-A(y_0,\ x))|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

因此，$B(\cdot,\ y)$在y半连续。类似地，$B(x,\ \cdot)$在x半连续。

推论的证明 令$B(x,\ y)=(A(x,\ y),\ A(y,x))$，$x,\ y\in[u_0,\ v_0]$。由引理6和7知，$B$: $[(u_0,\ v_0),\ (v_0,\ u_0)]\to X\times Y$是非减映象且$B(x,\ \cdot)$在$x$半连续且$B(\cdot,\ y)$在$y$半连续。易知$(\mathrm{h}_1)$推出$B[(u_0,\ v_0),\ (v_0,\ u_0)]$有界，$(\mathrm{h}_2)$和引理3(2)推出$(u_0,\ v_0)\leqslant B(u_0,\ v_0)$且$B(v_0,\ u_0)\leqslant(v_0,\ u_0)$。在上的定理中，令$X=Y$，$P_1=P_2=P$，$x_0=v_0$，$y_0=u_0$，则$B$满足定理的所有条件，从定理和$B$的定义知，推论成立。

注3 在推论中，如果P是正则锥，A是凝聚的条件可去掉。

注4 在推论中，如果$X\times Y$中由(**)定义范数，我们不知道，相同的结论是否成立。

注5 推论推广了[2]中定理1和[6]中定理1。

参 考 文 献

[1] Laddle, G. S., V. Lakshmikantham and A. S. Vatsala, *Monotone Iterative Technique for Nonlinear Differential Equations*, Pitman (1985).

[2] Guo Da-jun and V. Lakshmikantham, Coupled fixed points of nonlinear operators with applications, *Nonlinear Anal.*, 11(1987), 623—632.

[3] Martin, R.H., *Nonlinear Operators and Differential Equation*, Wiley, New York (1976).

[4] 兰坤泉，混合单调映象、增映象和不动点，四川师范大学学报。(待发表)

[5] 余庆余，凝聚映象的不动点定理，数学学报，24(1981)，430—435.

[6] 兰坤泉，混合单调凝聚映象的耦合不动点，四川师范大学学报。(待发表)

Minimal and Maximal Fixed Point Theorems and Iterative Technique for Nonlinear Operators in Product Spaces

Lan Kun-quan   Ding Xie-ping

(*Sichuan Normal University, Chengdu*)

Abstract

In this paper, we study minimal and maximal fixed point theorems and iterative technique for nonlinear operators in product spaces. As a corollary of our result, some coupled fixed point theorems are obtained, which generalize the coupled fixed point theorems obtained by Guo Da-jun and Lankshmikantham and the results obtained by Lan in [4] and [6].

Key words minimal and maximal fixed point, coupled fixed point