应用数学和力学，第 13 卷第 3 期(1992 年 3 月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

Sobolev空间$W^{m,p}(\Omega)$中残差泛函的极值理论*

凌 镛 镛

(同济大学应用数学系，1990年12月24日收到)

摘 要

本文在Sobolev空间中讨论残差泛函$J(u)$的概念及性质，论证了残差泛函$J(u)$的弱紧性、强制性和下半连续性及凸性条件.根据临界点理论在Sobolev空间中建立起该残差泛函的极值原理，给出$J(u)=0$极小值存在定理.此外还证明了等价定理和$J(R_n(c))=0$的五种等价形式.

关键词 Sobolev 空间 残差泛函 无穷维 Banach 空间 凸性 下半连续性 强制性 极小值存在定理

一、引 言

全国已连续三届召开加权残值法(MWR)学术会议，它在应用数学和计算力学等领域已有广泛和深入地应用[1],[2].邱吉宝[3]在Hilbert空间中建立强、弱对偶空间原理并证明了MWR的适定性与一致收敛性.凌镛镛[4],[5]曾对一类非线性微分方程证明解的存在性，建立残差不等式并给出误差界估计及MWR的强收敛性.但加权残值法的数学理论基础尚未有系统论述.本文在Sobolev空间$W^{m,p}(\Omega)$中对残差泛函进行数学理论探讨，分析研究残差泛函的性质，建立起Sobolev空间中残差泛函的极值原理，给出极值存在性定理.从而将加权残值法置于Sobolev空间理论基础上.

二、残差泛函的概念

我们在Sobolev空间中考虑如下偏微分方程(2.1)和边值(2.2)的定解问题[Ⅰ]

$$[\mathrm{I}]\quad \begin{cases} L(u)=f(x) & (\forall x\in\Omega\subset R^n) & (2.1)\\ B(u)=g(x) & (\forall x\in\partial\Omega) & (2.2)\end{cases}$$

其中偏微分算子

$$L(u)=\sum_{|\alpha|=m}A_{\alpha_1\cdots\alpha_n}(x)\frac{\partial^{|\alpha|}u}{\partial x_1^{\alpha_1}\cdots\partial x_n^{\alpha_n}}+F(x,u,Du,\cdots,D^{m-1}u)$$

$$(x=(x_1,\cdots,x_n);\ |\alpha|=\alpha_1+\cdots+\alpha_n,\ \alpha_i\geqslant 0)\qquad(2.3)$$

---

* 徐次达推荐.

或
$$L(u)=\sum_{|\alpha|=m}A_{\alpha_1\cdots\alpha_n}(x,u,Du,\cdots,D^{m-1}u)\frac{\partial^{|\alpha|}u}{x_1^{\alpha_1}\cdots x_n^{\alpha_n}}+F \tag{2.4}$$

$$Du=\frac{\partial u}{\partial x_i}(i=1,\cdots,n)\qquad D^2u=\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}\qquad (i,j=1,\cdots n.)$$

$$D^ku=\frac{\partial^k u}{\partial x_1{}^{\beta_1}\cdots\partial x_n^{\beta_n}}\qquad (k=\beta_1+\cdots\beta_n;\ \beta_i\geqslant 0;\ i=1,\cdots,n;\ 1\leqslant k\leqslant m-1)$$

在偏微分算子(2.3)中最高阶导数的的系数$A_\alpha(x)$具有适当的可微性和代数性质.非线性项F是含低于m阶的各阶偏导数的非线性项.而偏微分算子(2.4)之$A_\alpha(x,u,Du,\cdots,D^{m-1}u)$，此时即使$F$只是$x$的函数$L$也是拟线性.由(2.3)或(2.4)之$L(u)$所构成的方程(2.1)一般统称为非线性偏微分方程.

我们在Sobolev空间中考虑上述定解问题[Ⅰ]的解，即设$u(x)\in W^{m,p}(\Omega)$.自变量x变化区域Ω是n维向量空间R^n中的有界开区域或有界开集，其测度mes$\Omega>0$.为使嵌入定理成立，还可设Ω是具有强局部Lipschitz性质[6]或可设Ω为锥形区域或L型区域[7].Ω的边界$\partial\Omega$是由有限片充分光滑的$n-1$维超曲面S_l所构成. 算子$B(u)$是最高阶为$m-1$阶的在边界$\partial\Omega$上的线性偏微分算子.例如它可以是$\partial\Omega$上外法向偏微分算子.条件(2.2)中也可含有初值条件. 非齐次项$f(x)\in W^{0,p}(\Omega)=L^p(\Omega)$和$g(x)\in W^{0,p}(\partial\Omega)=L^p(\partial\Omega)$.

1 残差泛函的定义及基本性质

我们对$u\in W^{m,p}(\Omega)$定义方程(2.1)和(2.2)的残差函数

$$R(u)\equiv(L(u)-f)\in L^p(\Omega)\qquad(\forall u\in W^{m,p}(\Omega)) \tag{2.5}$$

$$R_B(u)\equiv(B(u)-g)\in L^p(\ \Omega)\qquad(\forall u\in W^{m-1,p}(\partial\Omega)) \tag{2.6}$$

有时也称$R(u)$和$R_B(u)$为偏微分算子L和B的残差函数.

定义 1 定解问题[Ⅰ]的残差泛函是

$$J(u)\equiv\int_\Omega|R(u)|^p d\Omega+\int_{\partial\Omega}|R_B(u)|^p dS\qquad(\forall u\in W^{m,p}(\bar\Omega))$$
$$(1\leqslant p;\bar\Omega=\Omega+\partial\Omega) \tag{2.7a}$$

$$J(u)=\|R(u)\|^p{}_{L^p(\Omega)}+\|R_B(u)\|^p{}_{L^p(\partial\Omega)}=J(\bar R(u))<+\infty\qquad(1\leqslant p) \tag{2.7b}$$

定义2 方程(2.1)的残差泛函是

$$J(u)\equiv\int_\Omega|R(u)|^p d\Omega=\|R(u)\|^p{}_{L^p(\Omega)}<+\infty\qquad(1\leqslant p;\ \forall u\in W^{m,p}(\Omega)) \tag{2.8}$$

为方便我们将(2.8)之$J(u)$记作$J(R(u))$和(2.7)之$J(u)$记作$J(\bar R(u))$. 这样定义的残差泛函与通常将偏微分方程作为一阶变分方程来定义的泛函是不同的.如今泛函(2.8)中出现的u可微性高，而后者物理意义明确为能量泛函等.这可通过Poisson方程边值问题和薄膜振动方程混合问题等计算可知.

由残差泛函定义(2.8)或(2.7)知道其最小值是零. 求泛函极小值u变为求u使泛函方程$J(u)=0$.

我们有如下基本性质

性质1 $J(u)\equiv J(R(u))\geqslant 0$ (2.9)

性质2 $\min J(u)=0 \qquad (\forall u\in W^{m,p}(\Omega))$ (2.10)

泛函极小值问题化为求解泛函方程$J(u)=0$.

性质3 映照J: $W^{m,p}(\Omega)\to R^1$

$$u \mapsto J(u)=\int_\Omega |R(u)|^p d\Omega \tag{2.11}$$

或

$$J: W^{0,p}(\Omega)\to R^1$$

$$R(u)\mapsto J(R(u))=\int_\Omega |R(u)|^p d\Omega \tag{2.12}$$

由于Sobolev空间$W^{m,p}(\Omega)$是自反的Banach空间[7]则由Eberlein-Шмулян定理[8]可知，对$W^{m,p}(\Omega)$中任意有界点列必有一弱收敛子列.因此有

性质4 $W^{m,p}(\Omega)$中有界点列上的J映照(2.11)是弱紧的.即当$u_n\in W^{m,p}(\Omega)$且$\|u_n\|_{m,p}\leqslant M$则有$\exists\, u_0\in W^{m,p}(\Omega)$，使

$$J(u_{n_k})\to J(u_0)\text{，当}n_k\to\infty\text{时.} \tag{2.13}$$

性质5 $J(R(u))$是强制性的，即

$$J(u)=\|R(u)\|^p_{L^p(\Omega)}\to+\infty\text{，当}\|R(u)\|_{L^p(\Omega)}\to+\infty \tag{2.14}$$

而$J(u)$也是强制性的，即

$$J(u)=\int_\Omega |R(u)|^p d\Omega\to+\infty\text{，当}\|u\|_{m,p}\to+\infty \tag{2.15}$$

这是因为有不等式

$$\|L(u)-f\|\geqslant M\|u\|-\|f\|.$$

泛函$J(u)$是强制性的意义可从偏微分算子P是正定算子看出.当P是正定算子时，有$(Pu,u)\geqslant a^2\|u\|^2$.

对于正算子言，已知它的偏微分方程定解问题是和泛函极小值问题等价.今在Sobolev*空间$W^{m,p}(\Omega)$中，对于残差泛函同样有等价定理.

2 等价定理

设偏微分方程(PDE)定解问题[Ⅰ]$=\{(2.1),(2.2)\}$存在解$u^*\in U\subset W^{m,p}(\bar\Omega)$则此$u$是残差泛函的极小值即$J(\bar R(u^*))=0$.反之，如残差泛函方程$J(\bar R(u))=0$存在解$u^*\in U\subset W^{m,p}(\bar\Omega)$则此极小值$u^*\in$PDE[Ⅰ]即$u^*$满足方程(2.1)和条件(2.2).

证明

必要性 ($\Longrightarrow$) 已知$\exists\, u^*\in U\subset W^{m,p}(\bar\Omega)$是PDE[Ⅰ]之解，于是有

$R(u^*)=R_B(u^*)=0$则有$J(\bar R(u^*))=0$.

充分性 ($\Longleftarrow$) 已知$J(\bar R(u))=0$存在解$u^*\in W^{m,p}(\bar\Omega)$则有

$\|R(u^*)\|^p+\|R_B(u^*)\|^p=0$

由范数非负性必有$\|R(u^*)\|=0$及$\|R_B(u^*)\|=0$即有$R(u^*)=0$和$R_B(u^*)=0$即$u^*\in$PDE[Ⅰ].

三、残差泛函的极值原理

这一节要在Sobolev空间中建立残差泛函极小值存在定理.我们通过残差函数$|R(u)|$的凸性，推导出泛函$J(R(u))$的凸性.由于Sobolev空间$W^{m,p}(\Omega)$是自反空间，再连同泛函$J(R(u))$的强制性和下半连续性，于是可证明泛函方程$J(u)=0$的极小值存在性定理.

1. $J(R_n(c))=0$的五种等价形式

考虑$W^{m,p}(\Omega)$空间中有限维子空间$U_n\subset W^{m,p}(\Omega)$，取该子空间$U_n$中基函数$\{\phi_i\}_{i=1,\cdots,n}$则 $\forall u_n\in U_n$ 有 $u_n=\sum_{i=1}^{n}c_i\phi_i$，于是残差函数

$$R(u_n)=L(u_n)-f=L\left(\sum_{i=1}^{n}c_i\phi_i\right)-f\quad\in W^{0,p}(\Omega)\tag{3.1}$$

由空间$W^{m,p}(\Omega)$是完备的线性赋范空间即Banach空间，它又是可分度量空间，故必含有一个可数拓扑基[9]，从而存在规范正交完备系. 关于空间$W^{m,p}(\Omega)$存在基的问题可参见文献[10].

今设空间$W^{0,p}(\Omega)(1\leqslant p\leqslant q<\infty)$的规范正交完备系是$\{\psi_j\}_{j=1,\cdots,}$.我们可将残差函数$R(u_n)\in W^{0,p}(\Omega)$对$W^{0,p}(\Omega)$中的基$\{\psi_j\}$展开成收敛的广义Fourier级数

$$R(u_n)=\sum_{j=1}^{\infty}A_j\psi_j=\sum_{j=1}^{n}A_j\psi_j+E_n,\ E_n\to 0\,(n\to\infty)\tag{3.2}$$

记

$$R_n(u_n)=R_n(c)=\sum_{j=1}^{n}A_j\psi_j\tag{3.3}$$

其中系数

$$A_j=\langle R(u_n),\psi_j\rangle,\ (R(u_n)\in L^p(\Omega);\ \psi_j\in L^p(\Omega);\ 1\leqslant p\leqslant q<\infty,\ \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1)\tag{3.4}$$

由于$L^p(\Omega)\hookrightarrow L^p(\Omega)(1\leqslant p\leqslant q<\infty)$，即当$R_n(c)\in L^q(\Omega)$就有$R_n(c)\in L^p(\Omega)$.故可考虑

$$\begin{aligned}J(R_n(c))&=J\left(\sum_{j=1}^{n}A_j\psi_j\right)\\&=\int_\Omega\left|\sum_{j=1}^{n}A_j\psi_j\right|^p d\Omega\\&=\int_\Omega\left|\sum_{\alpha+\cdots+\alpha_n=p}\frac{p!}{\alpha_1!\cdots\alpha_n!}A_1^{\alpha_1}\cdots A_n^{\alpha_n}\psi_1^{\alpha_1}\cdots\psi_n^{\alpha_n}\right|d\Omega\end{aligned}\tag{3.5}$$

从(3.5)我们直接计算可得

定理 1 $J(R_n(c))=0\Longleftrightarrow A_j=\langle R(u_n),\psi_j\rangle=0\qquad(j=1,\cdots,n)$

$$\Longleftrightarrow A_1^2+\cdots+A_n^2=0\tag{3.6}$$

定理2 $A_j=0_{j=1,\cdots,n}\Longleftrightarrow\sum_{i=1}^{n}c_i\langle L(\phi_i),\psi_j\rangle=\langle f,\psi_j\rangle_{j=1,\cdots,n}$ (3.7)

$$\text{或}\quad \sum_{i=1}^{n}c_iL(\phi_i)=f\quad(\text{当}L\text{是线性算子})$$

$$A_j=0_{j=1,\cdots,n}\Longleftrightarrow\left\langle L\left(\sum_{i=1}^{n}c_i\phi_i\right),\ \psi_j\right\rangle=\langle f,\psi_j\rangle_{j=1,\cdots,n} \tag{3.8}$$

$$\text{或}\quad L\left(\sum_{i=1}^{n}c_i\phi_i\right)=f\qquad(\text{当}L\text{是非线性算子})$$

从上述两定理给出了$J(R_n(c))=0$的五种等价形式.

对于$\forall u\in W^{m,p}(\Omega)$，可得$W^{0,p}(\Omega)=L^p(\Omega)$中的$R(u)$，今将$R(u)\in L^p(\Omega)$在$L^q(\Omega)_{1\leqslant p\leqslant q<\infty}$中对规范正交完备系$\{\psi_j\}$展开，即

$$R(u)=\sum_{j=1}^{\infty}\tilde{A}_j\psi_j,\ \text{其中}\tilde{A}_j=\langle R(u),\psi_j\rangle_{j=1,\cdots,\infty} \tag{3.9}$$

根据Levi定理极限与积分号交换，计算可得

$$J(R(u))=\int_\Omega\left|\sum_{j=1}^{\infty}\tilde{A}_j\psi_j\right|^p d\Omega=\lim_{n\to\infty}\int_\Omega\left|\sum_{j=1}^{n}\tilde{A}_j\psi_j\right|^p d\Omega$$
$$=\lim_{n\to\infty}J(R_n(u)) \tag{3.10}$$

其中

$$R_n(u)=\sum_{j=1}^{n}\tilde{A}_j\psi_j\in L^q(\Omega)\hookrightarrow L^p(\Omega) \tag{3.10$'$}$$

于是得到

定理3 设$R(u)=\lim\limits_{n\to\infty}R_n(u)$在$L^p(\Omega)_{1\leqslant p\leqslant q<\infty,1/p+1/q=1}$内，

则$J(u)\equiv J(R(u))=\lim\limits_{n\to\infty}J(R_n(u))\qquad(\forall u\in W^{m,p}(\Omega))$ (3.11)

此定理说明，如果$J(R_n(u))=0$存在极小值，则有$J(u)=0$存在极小值. 因此我们可以先对$J(R_n(u))$讨论极小值问题，然后用极限达到$J(u)$的极小值.这将给出残差泛函极小值的构造方法.下面我们从Banach空间理论得出残差泛函极小值的存在性定理.

从无穷维Banach空间X上泛函J的极值理论有定理：当X是自反Banach空间，$J:X\to R^1$，J本身$\neq\infty$且J是下半连续的，凸的，并满足强制性条件，则J达到极小值[8].

所以，我们还需讨论残差泛函$J(u)$的下半连续性和$J(u)$如何形成凸性.这样就在Sobolev空间中有$J(u)=0$的极小值存在性.

2. $J(u)$的下半连续性

定理4 残差泛函$J(u)$是下半连续的，即

$$\text{当}u_n\to u_0\text{在}W^{m,p}(\Omega)\text{内}\Rightarrow\varliminf_{n\to\infty}J(u_n)\geqslant J(u_0) \tag{3.12}$$

证明

$$J(u)=\int_{\Omega}|R(u)|^{p}d\Omega\geqslant 0 \qquad (\forall u\in W^{m,p}(\Omega))$$

考虑子空间

$$U_n\subset U_{n_1}\subset\cdots\subset U_{n_k}\subset\cdots\subset W^{m,p}(\Omega)$$

设有元素 $u_n,\ u_{n_1},\cdots,u_{n_k},\cdots\to u_0\ \ (n_k\to\infty)$

维数 $n<n_1<\cdots<n_k<\cdots$

相应泛函有 $J(u_n)\geqslant J(u_{n_1})\geqslant\cdots\geqslant J(u_{n_k})\geqslant\cdots J(u_0)$ (3.13)

于是当$u_n\to u_0$时，有$\varliminf\limits_{n\to\infty}J(u_n)\geqslant J(u_0)$

即$J(u)$具有下半连续性。

3. $J(u)$的凸性条件

从残差泛函$J(u)\equiv J(R(u))$的定义(2.7)或 (2.8) 可知，由于偏微分算子L是相当广泛的，不能保证$J(u)$的凸性，即不一定具有

$$J\left(\frac{u_1+u_2}{2}\right)\leqslant\frac{1}{2}[J(u_1)+J(u_2)]$$

这就要对算子L或残差$R(u)=L(u)-f$给出条件才使$J(u)$是凸泛函.我们有上述定理

定理5 设$|R(u)|$是非减凸函数则$J(u)$是凸泛函。

证明 已知$|R(u)|$是凸函数，即有

$$\left|R\left(\frac{u_1+u_2}{2}\right)\right|\leqslant\frac{1}{2}|R(u_1)|+\frac{1}{2}|R(u_2)|$$

由Minkowski不等式计算知

$$\left\{\int_{\Omega}\left|R\left(\frac{u_1+u_2}{2}\right)\right|^{p}d\Omega\right\}^{\frac{1}{p}}\leqslant\left\{\int_{\Omega}\left|\frac{1}{2}|R(u_1)|+\frac{1}{2}|R(u_2)|\right|^{p}d\Omega\right\}^{\frac{1}{p}}$$

$$\leqslant\left\{\int_{\Omega}\left|\frac{1}{2}|R(u_1)|\right|^{p}d\Omega\right\}^{\frac{1}{p}}+\left\{\int_{\Omega}\left|\frac{1}{2}|R(u_2)|\right|^{p}d\Omega\right\}^{\frac{1}{p}}\quad(1<p)$$

即

$$\left\{J\left(\frac{u_1+u_2}{2}\right)\right\}^{\frac{1}{p}}\leqslant\frac{1}{2}\{J(u_1)\}^{\frac{1}{p}}+\frac{1}{2}\{J(u_2)\}^{\frac{1}{p}} \tag{3.14}$$

而$1<p$，$J(u)\geqslant 0$且非减，所以由$\{J(u)\}^{\frac{1}{p}}$是凸函数可知$J(u)$是凸函数[11]。

由上述定理5还可得到当偏微算子L是凸的，则$J(u)$是凸泛函这一性质。

4. $J(u)=0$极小值u^*存在性定理

由第二节$J(u)$性质5及第三节定理4，5可知残差泛函$J(u)$有如下性质

（Ⅰ） 空间$W^{m,p}(\Omega)$是自反的Banach空间， (3.15)

（Ⅱ） $J:W^{m,p}(\Omega)\to R^1$

$$u\mapsto J(u)=\int_{\Omega}|R(u)|^{p}d\Omega\geqslant 0 \tag{3.16}$$

(Ⅲ) $J(u)\neq+\infty$是强制性的，即$\lim\limits_{\|R(u)\|\to\infty}J(R(u))=+\infty$ (3.17)

(Ⅳ) J是下半连续的，即

$$\text{当}u_n\to u_0\text{在}W^{m,p}(\Omega)\text{内}\Rightarrow\lim_{n\to\infty}J(u_n)\geqslant J(u_0) \tag{3.18}$$

(Ⅴ) 当残差函数$|R(u))|$是非减的，凸的，则残差泛函$J(u)$是凸泛函。

由此五个性质，根据无穷维Banach空间泛函极值理论知$J(u)$极小值存在。即得到

定理6 ($J(u)$极小值存在定理) 设残差函数$|R(u)|$是非减凸的，则残差泛函$J(u)$ 在Sobolev空间$W^{m,p}(\Omega)$中达到极小值，即$J(u)=0$的极小值$u^*\in W^{m,p}(\Omega)$存在。其中

$$J:W^{m,p}(\Omega)\longrightarrow R^1$$

$$u\mapsto J(u)=\int_\Omega|R(u)|^p d\Omega\geqslant 0$$

定理7 设偏微算子L是凸的，则残差泛函$J(u)=\int|R(u)|^p d\Omega$在空间$W^{m,p}(\Omega)$中达到极小值，即$J(u)=0$的极小值存在。

证明 由$L((u_1+u_2)/2)\leqslant[L(u_1)+L(u_2)]/2$可知$|R(u)|$是凸的，再从定理6所满足之五个性质(3.15)～(3.19)，便得证。

参 考 文 献

[1] 第三届全国加权残值法会议论文集，西南交通大学出版社 (1989).

[2] 徐次达，固体力学加权残值法，同济大学出版社 (1987).

[3] 邱吉宝，加权残数法理论基础的初步探讨，力学学报，19SUP (1987).

[4] 凌镛镛，一类非线性微分方程的残差不等式，第三届全国加权残值法会议论文集，西南交通大学出版社 (1989)，38

[5] 凌镛镛、凌備備，二阶非线性微分方程周期解及误差界估计，第一届全国解析与数值结合法会议论文集，湖南大学出版社 (1990)，853.

[6] Adams, R.A.,《Sobolev空间》，北京大学数学系译 (1977).

[7] 李立康、郭毓駒，《索伯列夫空间引论》，上海科技出版社 (1981).

[8] 张恭庆，《临界点理论及其应用》(现代数学丛书)，上海科学技术出版社 (1986).

[9] Lipschutz, S.,《一般拓扑学》，华东师范大学出版社 (1982).

[10] Ciesielski, Z. and J. Domsta, Construction of anorthonormal basis in $C^m(I^d)$ and $W^m_p(I^d)$, *Studia Math.*, 41 (1972), 211.

[11] Mitrinović, D. S.,《解析不等式》，科学出版社 (1987).

An Extremum Theory of the Residual Functional in Sobolev Spaces $W^{m,p}(\Omega)$

Ling Yong-yong
(Department of Applied Mathematics, Tongji University, Shanghai)

Abstract

In the present paper the concept and properties of the residual functional in Sobolev space are investigated. The weak compactness, force condition, lower semi-continuity and convex of the residual functional are proved. In Sobolev space, the minimum principle of the residual functional is proposed. The minimum existence theoreom for $J(u)=0$ is given by the modern critical point theory. And the equivalence theorem or five equivalence forms for the residual functional equation are also proved.

Key words Sobolev spaces, residual functional, infinite Banach spaces, convex, lower semi-continuity, force condition, minimum existence theorem