应用数学和力学，第13卷第2期（1992年2月）
Applied Mathematics and Mechanics
应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

凸距离空间内星形子集非扩张型映射不动点*

邓 磊　　丁协平

（重庆师范学院）　（成都 四川师范大学）

（1991年1月7日收到）

摘　　要

在本文中，我们给出包含一个集合的某种星形集的刻划及其性质．然后利用这些刻划和性质讨论凸距离空间的星形子集上非扩张型映射的不动点的存在问题，推广了丁协平、Beg和Azam的某些最近结果．最后还给出一个例子说明以上推广是本质上的推广．

关键词　星形集　星中心　星形子集的正规结构

一、引　　言

Takahashi[1]在距离空间中引入了凸性概念，推广了Banach空间内非扩张映射的某些不动点定理，其后有许多作者研究了凸距离空间和不动点问题．最近，Beg和Azam[3]试图在凸距离空间的星形子集上讨论不动点，但是在定理的证明过程中使用了这样的结论“任意一个星形集与一个凸集的交是星形集”．事实上，任意一个星形集与一个凸集的交并非一定是星形集．

在本文中，我们给出包含一个集合的某种星形集的刻划及其性质．然后利用这些刻划和性质讨论凸距离空间的星形子集上非扩张型映射的不动点的存在问题，推广了［2,3,4,6,7］中对应的结果．最后还给出一个例子说明以上推广是本质上的推广．

二、基本概念

定义1　设 (X,d) 是距离空间，$I=[0,1]$．称映射 $W:X\times X\times I\to X$ 是 X 上的一凸结构，如果对每一 $(x,y,\lambda)\in X\times X\times I$ 和 $u\in X$

$$d(u,W(x,y,\lambda))\leqslant\lambda d(u,x)+(1-\lambda)d(u,y)$$

称具有凸结构 W 的距离空间为凸距离空间．

定义2　称凸距离空间 X 的一非空子集 K 是凸的，如果对一切 $(x,y,\lambda)\in K\times K\times I$ 有

* 国家自然科学基金资助项目．

$W(x,y,\lambda)\in K$.

定义3 称凸距离空间X的一非空子集K是星形子集，如果存在$x_0\in K$使得对一切$x\in K$，$\lambda\in I$有$W(x,x_0,\lambda)\in K$. x_0称为K的星中心. 显然凸集是星形集，且凸集中任一点都可作星中心.

定义4 称凸距离空间 X 的星形子集K有正规结构，如果对K的每一至少包含两点的有界星形子集E，存在E的一个星中心x_0使得$\sup\limits_{t\in E} d(x_0,t)<\delta(E)$. 其中$\delta(E)$表$E$的直径.

注1 定义4是凸子集的正规结构概念的推广.

三、命 题

N表自然数集，对$x_0\in X$，$A\subset X$，记$A_1=A\cup\{x_0\}$，$A_2=\{W(x_1,x_0,\lambda_1):x_1\in A_1,\lambda_1\in I\}$，…，$A_{n+1}=\{W(x_n,x_0,\lambda_n):x_n\in A_n,\ \lambda_n\in I\}$，$\forall n\in N$. 记$S_{x_0}(A)=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n$.

命题1 设A是凸距离空间X的一非空集和$x_0\in X$，则

1) $S_{x_0}(A)$是以x_0为星中心包含集A的星形集；

2) 若F是以x_0为星中心包含集$A\subset F$的星形集，则$S_{x_0}(A)\subset F$.

证明 1) 由$S_{x_0}(A)$的定义，显然$A\subset S_{x_0}(A)$，只须证明$S_{x_0}(A)$是以x_0为星中心的星形集. 对任意$x\in S_{x_0}(A)$和$\lambda\in I$，存在$n\in N$使$x\in A_n$，则$W(x,x_0,\lambda)\in A_{n+1}\subset S_{x_0}(A)$. 即 $S_{x_0}(A)$是以x_0为星中心的星形集.

2) 首先用数学归纳法证明对任意$n\in N$有$A_n\subset F$.

当$n=1$时，由F是以x_0为星中心包含集$A\subset F$的星形集，我们有$A_1=A\cup\{x_0\}\subset F$，结论成立.

假定$A_k\subset F$，那么对任意$y\in A_{k+1}$，存在$x_k\in A_k\subset F$和$\lambda_k\in I$使$y=W(x_k,x_0,\lambda_k)$，注意到F是以x_0为星中心的星形集，我们得到$y=W(x_k,x_0,\lambda_k)\in F$，于是$A_{k+1}\subset F$. 故对任意$n\in N$有$A_n\subset F$. 因而有$S_{x_0}(A)=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n\subset F$，命题证明完成.

注2 命题1推广了[2]的命题1.

命题2 设A是凸距离空间X的一个非空集，且$x_0\in A$，则$\delta(\bar{S}_{x_0}(A))=\delta(A)$. 其中$\bar{S}_{x_0}(A)$表$S_{x_0}(A)$的闭包.

证明 因为距离d是连续的，我们仅需证明 $\delta(S_{x_0}(A))=\delta(A)$，显然有 $\delta(S_{x_0}(A))\geqslant\delta(A)$. 对任意$x,y\in S_{x_0}(A)$，存在$n_1,n_2\in N$使$x\in A_{n_1}$，$y\in A_{n_2}$. 令$n=\max\{n_1,n_2\}$，则$x,y\in A_n$. 下面我们用数学归纳法证明，对一切$x,y\in A_n$和$n\in N$有$d(x,y)\leqslant\delta(A)$.

对$x,y\in A_1=A$，显然$d(x,y)\leqslant\delta(A)$.

假定对一切$x,y\in A_k$有$d(x,y)\leqslant\delta(A)$，那么对 $x,y\in A_{k+1}$，我们有 $x=W(x_k,x_0,\lambda_k)$，$y=W(y_k,x_0,\lambda'_k)\in A_{k+1}$，其中$x_k,y_k\in A_k$和$\lambda_k,\lambda'_k\in I$. 由假定，有

$$\begin{aligned}d(x,y)&=d(W(x_k,x_0,\lambda_k),W(y_k,x_0,\lambda'_k))\\&\leqslant\lambda_k d(x_k,W(y_k,x_0,\lambda'_k))+(1-\lambda_k)d(x_0,W(y_k,x_0,\lambda'_k))\\&\leqslant\lambda_k[\lambda'_k d(x_k,y_k)+(1-\lambda'_k)d(x_k,x_0)]+(1-\lambda_k)\lambda'_k d(x_0,y_k)\\&\leqslant\lambda_k[\lambda'_k\delta(A)+(1-\lambda'_k)\delta(A)]+(1-\lambda_k)\lambda'_k\delta(A)\leqslant\delta(A)\end{aligned}$$

故由归纳假定知，对一切$x,y\in A_n$和$n\in N$有 $d(x,y)\leqslant\delta(A)$. 从而 $\delta(S_{x_0}(A))\leqslant\delta(A)$，于是

$\delta(S_{x_0}(A))=\delta(A)$．命题获证．

注3 命题2推广了[2]的命题2.

命题3 设K是凸距离空间X的具有星中心x_0的闭星形集和$T:K\to K$，则$S_{x_0}(T(K))$是T-不变的星形集，$\bar{S}_{x_0}(T(K))$是T-不变的闭星形集．

证明 由命题1知$S_{x_0}(T(K))$是星形集，只须证明$S_{x_0}(T(K))$是T-不变的．对任意$x\in S_{x_0}(T(K))$，由$T(K)\subset K$和命题1的2)知$x\in K$．因此$Tx\in T(K)\subset S_{x_0}(T(K))$，即$S_{x_0}(T(K))$是$T$-不变的．

同理可证$\bar{S}_{x_0}(T(K))$是T-不变的闭星形集．

命题4 设K是凸距离空间X的一非空有界闭星形集，$T:K\to K$满足对一切$x,y\in K$，

$$d(Tx,Ty)\leqslant[d(x,Tx)+d(y,Ty)]/2 \tag{3.1}$$

令$K_r=\{x\in K:d(x,Tx)\leqslant r\}$，若存在$x_0\in K_r$使$Tx_0$是$K$的一个星中心，则$S_{Tx_0}(T(K_r))$是$T$-不变的星形集，$\bar{S}_{Tx_0}(T(K_r))$是$T$-不变的闭星形集．

证明 由命题1的1)知，只须证明$S_{Tx_0}(T(K_r))$和$\bar{S}_{Tx_0}(T(K_r))$是T-不变的．因为对任意$y\in S_{Tx_0}(T(K_r))$，用$T(K_r)$代替A和Tx_0代替x_0，由$S_{Tx_0}(T(K_r))$的构造知，存在$n\in N$使$y\in A_n$．下面我们用数学归纳法证明对任意$z\in K$，$y\in A_n$和$n\in N$，

$$d(y,Tz)\leqslant r/2+d(z,Tz)/2 \tag{3.2}$$

当$y\in A_1=T(K_r)$时，则存在$y_0\in K_r$使$y=Ty_0$，因此由(3.1)式

$$\begin{aligned}d(y,Tz)&=d(Ty_0,Tz)\leqslant[d(y_0,Ty_0)+d(z,Tz)]/2\\&\leqslant r/2+d(z,Tz)/2\end{aligned}$$

于是(3.2)成立．

假定当$y\in A_k$时，(3.2)成立，那么当$y\in A_{k+1}$时，存在$x_k\in A_k$，$\lambda_k\in I$使$y=W(x_k,Tx_0,\lambda_k)\in A_{k+1}$，由(3.1)式

$$\begin{aligned}d(y,Tz)&=d(W(x_k,Tx_0,\lambda_k),Tz)\leqslant\lambda_k d(x_k,Tz)+(1-\lambda_k)d(Tx_0,Tz)\\&\leqslant\lambda_k\left[\frac{1}{2}r+\frac{1}{2}d(z,Tz)\right]+(1-\lambda_k)\left[\frac{1}{2}d(x_0,Tx_0)+\frac{1}{2}d(z,Tz)\right]\\&\leqslant\frac{1}{2}r+\frac{1}{2}d(z,Tz)\end{aligned}$$

即当$y\in A_{k+1}$时，(3.2)也成立．故对任意$z\in K$，$y\in S_{Tx_0}(T(K_r))$有

$$d(y,Tz)\leqslant r/2+d(z,Tz)/2$$

特别地，当$z=y\in S_{Tx_0}(T(K_r))$时，$d(y,Ty)\leqslant r$．又因为Tx_0是K的一个星中心，由命题1的2)得到$S_{Tx_0}(T(K_r))\subset K$．因此，$S_{Tx_0}(T(K_r))\subset K_r$．于是$T(S_{Tx_0}(T(K_r)))\subset T(K_r)\subset S_{Tx_0}(T(K_r))$．故$S_{Tx_0}(T(K_r))$是$T$-不变的．

现证$\bar{S}_{Tx_0}(T(K_r))$也是T-不变的．对任意$z\in\bar{S}_{Tx_0}(T(K_r))$，则对任意$\varepsilon>0$，存在$y\in S_{Tx_0}(T(K_r))$使$d(z,y)<\varepsilon$．由(3.2)式

$$d(z,Tz)\leqslant d(z,y)+d(y,Tz)\leqslant\varepsilon+r/2+d(z,Tz)/2$$

因此$d(z,Tz)\leqslant r+2\varepsilon$，由$\varepsilon>0$的任意性有$d(z,Tz)\leqslant r$．又因为$Tx_0$是$K$的一个星中心，由命题1的2)得到$\bar{S}_{Tx_0}(T(K_r))\subset K$．因此，$\bar{S}_{Tx_0}(T(K_r))\subset K_r$，于是$T(\bar{S}_{Tx_0}(T(K_r)))\subset T(K_r)\subset\bar{S}_{Tx_0}(T(K_r))$．故$\bar{S}_{Tx_0}(T(K_r))$是$T$-不变的．

四、主要结果

定理1　设K是凸距离空间X的一非空有界闭星形子集，且K具有正规结构．设$T:K\to K$满足对K的每一至少包含两点的T-不变闭星形子集E有

$$\sup_{y\in E} d(Tx,Ty)\leqslant \sup_{y\in E} d(x,y),\qquad \forall x\in E \tag{4.1}$$

如果存在K的极小T-不变的闭星形子集K^*，则T在K内存在不动点．

证明　如果K^*是单点集，则在K^*中的那个点是T的不动点．设K^*至少有两点，由正规结构的定义知存在K^*的一个星中心x_0使得$\sup\limits_{t\in K^*} d(x_0,t)=d<\delta(K^*)$．考虑集

$$F=\{z\in K^*:\sup_{t\in K^*} d(z,t)\leqslant d\}$$

因$x_0\in F$，故$F\neq\phi$．对任意$x\in F$和$\lambda\in I$有

$$\begin{aligned}\sup_{t\in K^*} d(W(x,x_0,\lambda),t)&\leqslant \sup_{t\in K^*}[\lambda d(x,t)+(1-\lambda)d(x_0,t)]\\&\leqslant \lambda d+(1-\lambda)d=d\end{aligned}$$

因此F是一以x_0为星中心的非空闭星形集．下面我们证明$T(F)\subset F$．对任意$z\in F$，由(4.1)有

$$\sup_{t\in K^*} d(Tz,Tt)\leqslant \sup_{t\in K^*} d(z,t)\leqslant d \tag{4.2}$$

这蕴含$T(K^*)\subset\bar{S}(Tz,d)$，其中$\bar{S}(Tz,d)$表以$Tz$为心$d$为半径的闭球．由[1]的命题2知$\bar{S}(Tz,d)$是$X$中的闭凸集．因为$K^*$是一有星中心$x_0$的闭星形集和$T(K^*)\subset K^*$，故由命题3知$\bar{S}_{x_0}(T(K^*))$是$T$-不变的闭星形集，再由命题1和$K^*$的极小性得$K^*=\bar{S}_{x_0}(T(K^*))\subset\bar{S}(Tz,d)$，所以$\sup\limits_{t\in K^*} d(Tz,t)\leqslant d$，即$Tz\in F$，从而有$T(F)\subset F$，由$K^*$的极小性有$F=K^*$和$\delta(F)=\delta(K^*)$，另一方面有

$$\delta(F)=\sup_{x,y\in F} d(x,y)\leqslant \sup_{x\in F}\sup_{y\in K^*} d(x,y)\leqslant d<\delta(K^*)$$

矛盾．因此K^*为单点集，即T在K内存在不动点．

注4　定理1推广了[2]的定理1．

定理2　设K是凸距离空间X的一非空有界闭星形子集，且K具有正规结构．设$T:K\to K$使得对一切$x,y\in K$

$$d(Tx,Ty)\leqslant \sup\{d(x,z):z\in\{T^n x\}_{n\geqslant 0}\cup\{T^n y\}_{n\geqslant 0}\} \tag{4.3}$$

如果存在K的极小T-不变的闭星形子集K^*，则T在K内存在不动点．

证明　容易验证定理1的证明对本定理有效，仅需验证(4.2)式成立，因为$T(K^*)\subset K^*$，故由(4.3)式可推得(4.2)式成立．

注5　定理2推广了[2]的定理2．

推论1　设K是凸距离空间X的一非空有界闭星形子集，且K具有正规结构．设$T:K\to K$使得对一切$x,y\in K$

$$d(Tx,Ty)\leqslant ad(x,y)+bd(x,Tx)+cd(x,Ty) \tag{4.4}$$

其中　　$a,b,c\geqslant 0$，$a+b+c\leqslant 1$

如果存在K的极小T-不变的闭星形子集K^*，则T在K内存在不动点．

证明　只须从(4.4)式推出(4.3)式即可．由(4.4)式

$$d(Tx,Ty)\leqslant ad(x,y)+bd(x,Tx)+cd(x,Ty)$$

$$\leqslant (a+b+c)\max\{d(x,y),d(x,Tx),d(x,Ty)\}$$
$$\leqslant \sup\{d(x,z):z\in\{T^n x\}_{n\geq 0}\cup\{T^n y\}_{n\geq 0}\}$$

故(4.3)式成立。

注6 推论1推广了[4]的定理7.

定理3 设K是凸距离空间X的一非空有界闭星形子集．设$T:K\to K$使得对K的每一至少包含两点的非空T-不变闭星形子集E有

$$\delta(T(E))<\delta(E) \tag{4.5}$$

如果存在K的极小T-不变的闭星形子集K^*，并有K^*的一个星中心x_0满足$x_0\in T(K^*)$，则T在K内存在不动点。

证明 因为$T(K^*)\subset K^*$和K^*是具有星中心x_0的闭星形集，故由命题3知$\bar{S}_{x_0}(T(K^*))$是T-不变的闭星形集，再由命题1和K^*的极小性得$\bar{S}_{x_0}(T(K^*))=K^*$。因$x_0\in T(K^*)$由命题2有

$$\delta(T(K^*))=\delta(\bar{S}_{x_0}(T(K^*)))=\delta(K^*)$$

这与(4.5)式矛盾．因此K^*必为单点集，由$T(K^*)\subset K^*$知T在K内有一不动点。

注7 由于K和K^*为闭凸子集时，自然满足条件"有K^*的一个星中心x_0满足$x_0\in T(K^*)$"。因此定理3推广了[2]的定理3。另外定理3改进和推广了[3]的定理。

推论2 设K是凸距离空间X的一非空有界闭星形子集。设$T:K\to K$使得对一切$x,y\in K$

$$d(Tx,Ty)\leqslant a(x,y)d(x,y)+b(x,y)[d(x,Tx)+d(y,Ty)]$$
$$+c(x,y)[d(x,Ty)+d(y,Tx)] \tag{4.6}$$

其中$a(x,y),b(x,y),c(x,y)$为$K\times K$上的非负函数，且$a(x,y)+2b(x,y)+2c(x,y)\leqslant 1$。

如果1) $\inf_{x,y\in K} b(x,y)>0$；2) 对K的每一至少包含两点的T-不变的闭星形子集E有$\sup_{y\in E} d(y,Ty)<\delta(E)$；3) 存在$K$的极小$T$-不变的闭星形子集$K^*$，并满足有$K^*$的一个星中心$x_0$使$x_0\in T(K^*)$。则$T$在$K$内存在唯一的不动点。

证明 由定理3知，我们只需验证对K的每一至少包含两点的T-不变的闭星形子集E有$\delta(T(E))<\delta(E)$。事实上，对一切$x,y\in E$，由(4.6)式

$$d(Tx,Ty)\leqslant a(x,y)d(x,y)+b(x,y)[d(x,Tx)+d(y,Ty)]$$
$$+c(x,y)[d(x,Ty)+d(y,Tx)]$$
$$\leqslant a(x,y)\delta(E)+2b(x,y)\sup_{z\in E}d(z,Tz)+2c(x,y)\delta(E)$$
$$\leqslant [1-2b(x,y)]\delta(E)+2b(x,y)\sup_{z\in E}d(z,Tz)$$
$$\leqslant \delta(E)-2\inf_{x,y\in K}b(x,y)[\delta(E)-\sup_{z\in E}d(z,Tz)] \tag{4.7}$$

注意到$\inf_{x,y\in K}b(x,y)>0$，$\delta(E)-\sup_{z\in E}d(z,Tz)>0$，则由(4.7)式$d(Tx,Ty)<\delta(E)$，即$\delta(T(E))<\delta(E)$。

现假定$x,y\in K$都是T的不动点，由(4.6)式得

$$d(x,y)=d(Tx,Ty)\leqslant a(x,y)d(x,y)+c(x,y)[d(x,y)+d(y,x)]$$
$$\leqslant [a(x,y)+2c(x,y)]d(x,y)$$

注意到对一切$x,y\in K$，$a(x,y)+2c(x,y)<1$。因此$x=y$，即T在K内的不动点是唯一的。证明完成。

注8 推论2改进和推广了[7]的定理1和[4]的定理6.

定理4 设K是凸距离空间X的一非空有界闭星形子集。设$T:K\to K$对一切$x,y\in K$满足

$$d(Tx,Ty)\leqslant[d(x,Tx)+d(y,Ty)]/2 \tag{4.8}$$

如果1) 存在K的极小T-不变的闭星形子集K^*；2) 若K^*至少包含两点时存在$x_0\in K^*$使得对任意$t\in K^*$，$d(x_0,t)<\delta(K^*)$；3) Tx_0是K^*的一个星中心。则T在K内有唯一的不动点。

证明 若K^*为单点集，由$T(K^*)\subset K^*$知T在K内有不动点。现设K^*至少包含有两点，由条件知存在$x_0\in K^*$使得$d(x_0,Tx_0)=d<\delta(K^*)$。我们考虑集

$$F=\{x\in K^*:d(x,Tx)\leqslant d\}$$

因$x_0\in F$，故$F\neq\phi$。由命题4知$\bar{S}_{Tx_0}(T(F))$是T-不变的闭星形集，又由K^*的极小性有$\bar{S}_{Tx_0}(T(F))=K^*$。

由于对任意$x,y\in F$，由(4.8)式得

$$d(Tx,Ty)\leqslant[d(x,Tx)+d(y,Ty)]/2\leqslant d$$

所以$\delta(T(F))\leqslant d$。因$x_0\in F$，我们有$Tx_0\in T(F)$，由命题2得

$$\delta(K^*)=\delta(\bar{S}_{Tx_0}(T(F)))=\delta(T(F))\leqslant d<\delta(K^*)$$

矛盾，因此K^*为单点集。唯一性由(4.8)式很容易得到，定理获证。

注9 当K和K^*为凸子集时，自然满足条件"Tx_0是K^*的一个星中心"。因此定理4推广了[6]的定理3，改进和推广了[3]的定理。

例 设X是由所有收敛的实数列$\{\xi_i\}$组成的空间，范数定义为$\|\{\xi_i\}\|=\sup\limits_i|\xi_i|$。对任意的$(x,y,\lambda)\in X\times X\times I$，定义$W(x,y,\lambda)=\lambda x+(1-\lambda)y$，则$X$是凸距离空间。令

$$K=\{\{\xi_i\}\in X:1/3\leqslant\xi_i\leqslant1,\ (\xi_i-1/2)^2\leqslant(\xi_{i+1}-1/2)^2\}$$

显然K是X的一个非空有界闭集。下面说明K是非凸的星形集，事实上，取

$$\{\xi_i\}=\left\{\frac{1}{3}+\frac{1}{i+1}\right\},\quad \{\eta_i\}=\left\{\frac{2}{3}\right\},\quad \lambda=\frac{1}{2}$$

则
$$W\left(\{\xi_i\},\{\eta_i\},\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{3}+\frac{1}{i+1}\right\}+\frac{1}{2}\left\{\frac{2}{3}\right\}=\left\{\frac{1}{2}+\frac{1}{2(i+1)}\right\}\bar{\in}K$$

即K不是凸集。由$\{1/2\}\in K$，因此对任意$\{\xi_i\}\in K$，$\lambda\in I$有

$$W(\{\xi_i\},\{1/2\},\lambda)=\lambda\{\xi_i\}+(1-\lambda)\{1/2\}=\{\lambda\xi_i+(1-\lambda)/2\}\in K$$

即K是星形集。

设$T(\{\xi_i\})=\{(\xi_i+2)/3\}$，则$T:K\to K$是Kannan映象，$K^*=\{\{1\}\}$是$K$的极小$T$-不变的闭星形子集，显然$\{1\}$是$T$的唯一不动点。

注10 可以验证T并不满足[3]中定理的条件，从而此例改进了[3]中的例。

参 考 文 献

[1] Takahashi, W., A convexity in metric space and nonexpansive mappings, I, *Kodai Math. Sum. Rep.*, 22 (1970), 142—149.

[2] 丁协平，T-凸距离空间内非扩张型映射的不动点，纯粹数学与应用数学，5 (1989), 39—42.

[3] Beg, Ismat and Akbar Azam, Fixed points on star-shaped subsets of convex metric spaces, *Indian J. Pure Appl. Math.*, 18(7) (1987), 594—596.

[4] 张石生、黄发伦，关于Banach空间中平均非扩张映象的不动点理论，四川大学学报（自然科学版），(2) (1975), 67—78.

[5] Jaggi, D. S., On fixed points of nonexpansive mappings, *Contemporary Mathe-*

matics, 21 (1983), 147—149.

[6] Wong, C.S., On Kannan maps, *Proc. Amer. Math. Soc.*, (47) (1975), 105—111.

[7] Kannan, R., Fixed point theorems in reflexive Banach spaces, *Proc. Amer. Math. Soc.*, (38) (1973), 111—118.

Fixed Points of Nonexpansive Mappings on Star-Shaped Subsets of a Convex Metric Space

Deng Lei

(*Chongqing Teacher's College, Chongqing*)

Ding Xie-ping

(*Sichuan Normal University, Chengdu*)

Abstract

In this paper, we give some characteristic properties of star-shaped sets which include a subset of a convex metric space. Using the characteristic properties, we discuss the existence problems of fixed points of nonexpansive type mappings on star-shaped subsets of convex metric spaces, which generalize the recent results obtained by Ding Xie-ping, Beg and Azam. Finally, we give an example which shows that our generalizations are essential.

Key words star-shaped set, star centre, normal structure of a star-shaped set