应用数学和力学，第13卷第2期(1992年2月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

积分非完整可控力学系统运动方程的场方法*

梅凤翔

(北京理工大学，1990年6月20日收到)

摘　要

本文将场方法推广应用于积分非完整可控力学系统的运动方程，并举例说明方法的应用.

关键词　运动方程　非完整系统　可控系统　场方法

一、引　言

非完整系统运动方程的积分方法是分析力学的重要而又困难的问题。传统Hamilton-Jacobi 积分方法在推广应用于非保守或非完整系统时遇到了严重困难并有极其严格的限制[1]。南斯拉夫学者Vujanović 给出的场方法对积分完整非保守系统的运动方程提供了一个重要工具[2]。文献[3]将场方法推广应用于积分非完整非可控力学系统的运动方程。

本文研究一类非完整可控力学系统，其中约束方程中出现某些控制参数，将场方法推广应用于积分这类系统的运动方程，并举例说明方法的具体应用。

二、非完整可控力学系统的运动方程及其标准形式

研究一质点系，点的质量为$m_\nu(\nu=1,\cdots,N)$，点的直角坐标为$x_i(i=1,\cdots,3N)$，作用力在坐标轴上投影为$X_i(i=1,\cdots,3N)$。因此，第ν个点的坐标、它的质量以及作用力在坐标轴上投影分别为$x_{3\nu-2},x_{3\nu-1},x_{3\nu}$，$m_{3\nu-2}=m_{3\nu-1}=m_{3\nu}$，$X_{3\nu-2},X_{3\nu-1},X_{3\nu}$。设系统受有$m$个完整约束

$$f_\rho(x_i,u_r,t)=0 \qquad (\rho=1,\cdots,m;i=1,\cdots,3N;r=1,\cdots,p) \tag{2.1}$$

以及g个非完整约束

$$\varphi_\beta(x_i,\dot{x}_i,u_r,t)=0 \qquad (\beta=1,\cdots,g) \tag{2.2}$$

并且$m+g<3N$。在一般情形下，约束方程(2.1)、(2.2)中包含控制参数u_r。在理想约束下，可控力学系统的D'Alembert-Lagrange原理为[4]

---

* 李骊推荐.

国家自然科学基金资助项目.

$$\sum_{i=1}^{3N}(X_i-m_i\ddot{x}_i)\delta x_i=0 \tag{2.3}$$

选$n=3N-m$个广义坐标$q_s(s=1,\cdots,n)$，点的直角坐标可表为

$$x_i=x_i(q_s,u_r,t) \tag{2.4}$$

若将(2.4)代入(2.1)，则使(2.1)成为恒等式。令

$$\Psi_\beta(q_s,\dot{q}_s,u_r,\dot{u}_r,t)\equiv\varphi_\beta(x_i(q_s,u_r,t),\dot{x}_i(q_s,\dot{q}_s,u_r,\dot{u}_r,t),u_r,t)$$

则非完整约束(2.2)成为

$$\Psi_\beta(q_s,\dot{q}_s,u_r,\dot{u}_r,t)=0 \qquad (\beta=1,\cdots,g) \tag{2.5}$$

原理(2.3)容易表为广义坐标形式

$$\sum_{s+1}^{n}\left(Q_s-\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_s}+\frac{\partial T}{\partial q_s}\right)\delta q_s=0 \tag{2.6}$$

由(2.5)、(2.6)，利用通常的Lagrange乘子法，我们得到非完整可控力学系统的Routh型方程[4]

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_s}-\frac{\partial T}{\partial q_s}=Q_s+\sum_{\beta=1}^{g}\lambda_\beta\frac{\partial\Psi_\beta}{\partial\dot{q}_s} \qquad (s=1,\cdots,n) \tag{2.7}$$

方程(2.7)不同于通常非完整非可控系统的方程，在于其中出现控制参数及其对时间的导数。在给定控制规律时，方程(2.7)联合约束方程(2.5)便可求解。

现假设控制参数u_r为时间t的已知函数，并记作$u_r=u_r(t)$ $(r=1,\cdots,p)$。利用文献[4]给出的方法，容易将(2.7)表为显形式

$$\begin{aligned}
&\ddot{q}_l+\sum_{s=1}^{n}A_{sl}^{-1}\sum_{m=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}[k,m;s]\dot{q}_k\dot{q}_m\\
&=\sum_{s=1}^{n}A_{sl}^{-1}\left\{\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial B_k'}{\partial q_s}-\frac{\partial B_s'}{\partial q_k}\right)\dot{q}_k+Q_s-\frac{\partial B_s'}{\partial t}+\frac{\partial T_0'}{\partial q_s}-\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial A_{ks}}{\partial t}\dot{q}_k\right.\\
&\left.+\sum_{r=1}^{p}\frac{\partial B_s'}{\partial u_r}\dot{u}_r+\sum_{r=1}^{p}\frac{\partial B_s'}{\partial\dot{u}_r}\ddot{u}_r-\sum_{r=1}^{p}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial A_{ks}}{\partial u_r}\dot{u}_r\dot{q}_k+\sum_{\beta=1}^{g}\lambda_\beta\frac{\partial\Psi_\beta}{\partial\dot{q}_s}\right\} \qquad (l=1,\cdots,n)
\end{aligned} \tag{2.8}$$

其中

$$\left.\begin{aligned}
&A_{sk}=\sum_{i=1}^{3N}m_i\frac{\partial x_i}{\partial q_s}\frac{\partial x_i}{\partial q_k}=A_{ks},\quad A_{sk}=A_{sk}(q_l,u_r,t)\\
&B_s'=\sum_{i=1}^{3N}m_i\frac{\partial x_i}{\partial q_s}\left(\sum_{r=1}^{p}\frac{\partial x_i}{\partial u_r}\dot{u}_r+\frac{\partial x_i}{\partial t}\right),\quad B_s'=B_s'(q_l,u_r,\dot{u}_r,t)\\
&T_0'=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3N}m_i\left(\frac{\partial x_i}{\partial t}\right)^2+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3N}m_i\sum_{r=1}^{p}\sum_{\sigma=1}^{p}\frac{\partial x_i}{\partial u_r}\frac{\partial x_i}{\partial u_\sigma}\dot{u}_r\dot{u}_\sigma+\sum_{i=1}^{3N}m_i\sum_{r=1}^{p}\frac{\partial x_i}{\partial u_r}\frac{\partial x_i}{\partial t}\dot{u}_r\\
&T_0'=T_0'(q_l,u_r,\dot{u}_r,t)\\
&[k,m;s]=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial A_{ks}}{\partial q_m}+\frac{\partial A_{ms}}{\partial q_k}-\frac{\partial A_{km}}{\partial q_s}\right)
\end{aligned}\right\} \tag{2.9}$$

如果约束方程中没有控制参数u_r，则(2.8)简化成文献[3]给出的非完整非可控系统运动方程的显形式。

将非完整约束方程(2.5)对t求导数，得到

$$\sum_{l=1}^{n}\left(\frac{\partial\Psi_\beta}{\partial q_l}\dot{q}_l+\frac{\partial\Psi_\beta}{\partial\dot{q}_l}\ddot{q}_l\right)+\sum_{r=1}^{p}\left(\frac{\partial\Psi_\beta}{\partial u_r}\dot{u}_r+\frac{\partial\Psi_\beta}{\partial\dot{u}_r}\ddot{u}_r\right)+\frac{\partial\Psi_\beta}{\partial t}=0\qquad(\beta=1,\cdots,g)\tag{2.10}$$

将(2.8)代入(2.10)并消去$\ddot{q}_l$，可得到关于λ_β的g个代数方程。设由此可解出λ_β并记作

$$\lambda_\beta=\lambda_\beta(q_s,\dot{q}_s,u_r,\dot{u}_r,\ddot{u}_r,t)\qquad(\beta=1,\cdots,g)\tag{2.11}$$

将(2.11)代入(2.8)可解得$\ddot{q}_s$，记作

$$\ddot{q}_s=g_s(q_k,\dot{q}_k,u_r,\dot{u}_r,\ddot{u}_r,t)\qquad(s,k=1,\cdots,n;r=1,\cdots,p)\tag{2.12}$$

因$u_r=u_r(t)$，故方程(2.12)的右端为$q,\dot{q},t$的函数。

令

$$x_s=q_s,\quad x_{n+k}=\dot{q}_k\qquad(s,k=1,\cdots,n)\tag{2.13}$$

则方程(2.12)可表为标准形式

$$\dot{x}_k=x_{n+k},\quad \dot{x}_{n+k}=g_k(x_s,x_{n+s},u_r,\dot{u}_r,\ddot{u}_r,t)\qquad(s,k=1,\cdots,n)\tag{2.14}$$

在替换(2.13)下，约束方程(2.5)成为

$$\Psi_\beta(x_s,x_{n+s},u_r,\dot{u}_r,t)=0\qquad(\beta=1,\cdots,g)\tag{2.15}$$

方程(2.14)可作为一个完整系统问题来研究，如果初条件满足(2.15)，即

$$\Psi_\beta(x_{s0},x_{n+s,0},u_{r0},\dot{u}_{r0},0)=0\qquad(\beta=1,\cdots,g)\tag{2.16}$$

则方程(2.14)的解给出非完整系统的运动。

为积分方程组(2.7)、(2.5)，可首先在初条件下积分相应完整系统方程组(2.14)，然后再添加非完整约束条件对初值的限制(2.16)。

三、积分非完整可控力学系统运动方程的场方法

将现文献[2,3]中所用的场方法进一步推广到非完整可控力学系统。根据场方法[2,3]，令某一个场变量，例如x_1，作为时间t以及其余场变量$x_A(A=2,\cdots,2n)$的函数，即

$$x_1=v(t,x_A)\tag{3.1}$$

将(3.1)对t求导数并利用(2.14)的后面$(2n-1)$个方程，得到

$$\frac{\partial v}{\partial t}+\sum_{a=2}^{n}\frac{\partial v}{\partial x_a}x_{n+a}+\sum_{b=1}^{n}\frac{\partial v}{\partial x_{n+b}}g_b(v,x_A,u_r,\dot{u}_r,\ddot{u}_r,t)-x_{n+1}=0\tag{3.2}$$

我们称方程(3.2)的基本偏微分方程，它是拟线性的。

假设已找到方程(3.2)的完全解，有形式

$$x_1=v(t,x_A,C_\alpha)\qquad(A=2,\cdots,2n;\alpha=1,\cdots,2n)\tag{3.3}$$

将(3.3)代入(3.2)，则(3.2)对变量t,x_A,C_α的所有可允值恒满足。令运动的初条件为

$$x_\alpha(0)=x_{\alpha0}\qquad(\alpha=1,\cdots,2n)\tag{3.4}$$

将(3.4)代入(3.3)，可将一个常数，例如C_1，用$x_{\alpha0}$和其余常数C_A表出，于是有

$$x_1=v(t,x_A,x_{\alpha0},C_A)\tag{3.5}$$

容易证明[3]，初值问题(2.14)、(3.4)的解由(3.5)以及下述$(2n-1)$个代数方程

$$\partial v/\partial C_A=0\qquad(A=2,\cdots,2n)\tag{3.6}$$

来确定．这里要假设，在x_B,C_A的相关域上

$$\det(\partial^2 v/\partial x_B \partial C_A)\neq 0 \tag{3.7}$$

这样，如果能求得(3.3)，便可由(3.5)、(3.6)来确定相应完整可控力学系统的解．为得到非完整系统的解，尚需对初条件加以限制，即

$$\Psi_\beta(x_{s0},x_{n+s,0},u_{r0},\dot{u}_{r0},0)=0 \qquad (\beta=1,\cdots,g) \tag{3.8}$$

于是，非完整可控力学系统的解为(3.5)、(3.6)、(3.8)．

用场方法积分运动方程，不仅有通用性（它没有Hamilton-Jacobi方程那样的限制），而且有灵活性（可选任何一个场变量代替前面的x_1）．应用场方法的基本困难在于求基本偏微分方程(3.2)的完全解．

四、算　例

现举例说明场方法对积分非完整可控力学系统运动方程的应用．

某力学系统的位形由两个广义坐标q_1,q_2来确定，其Lagrange函数为

$$L=(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2)/2-q_2 \tag{4.1}$$

约束方程为

$$f=\dot{q}_2-u(t)\dot{q}_1=0 \tag{4.2}$$

其中$u(t)$为控制参数，且

$$u(0)=0 \tag{4.3}$$

试用场方法求这一问题的解．

为解此非完整可控力学系统问题，首先，建立标准方程．Routh方程(2.7)给出为

$$\ddot{q}_1=-\lambda u,\ \ \ddot{q}_2+1=\lambda \tag{4.4}$$

由(4.1)、(4.2)解出

$$\lambda=(1+\dot{u}\dot{q}_1)/(1+u^2) \tag{4.5}$$

将(4.5)代入(4.4)，得

$$\ddot{q}_1=-\frac{1+\dot{u}\dot{q}_1}{1+u^2}u,\ \ \ddot{q}_2=-1+\frac{1+\dot{u}\dot{q}_1}{1+u^2} \tag{4.6}$$

令$x_1=q_1$，$x_2=q_2$，$x_3=\dot{q}_1$，$x_4=\dot{q}_2$，则标准方程(2.14)给出为

$$\dot{x}_1=x_3,\ \ \dot{x}_2=x_4,\ \ \dot{x}_3=-(1+\dot{u}x_3)(1+u^2)^{-1}u,\ \ \dot{x}_4=-1+(1+\dot{u}x_3)(1+u^2)^{-1} \tag{4.7}$$

其次，用场方法解相应完整系统方程(4.7)．令

$$x_1=v(t,x_2,x_3,x_4) \tag{4.8}$$

则基本偏微分方程(3.2)给出为

$$\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{\partial v}{\partial x_2}x_4-\frac{\partial v}{\partial x_3}(1+\dot{u}x_3)(1+u^2)^{-1}u+\frac{\partial v}{\partial x_4}[-1+(1+\dot{u}x_3)(1+u^2)^{-1}]-x_3=0 \tag{4.9}$$

令(4.9)有如下完全解

$$x_1=v=f_1(t)+f_2(t)x_2+f_3(t)x_3+f_4(t)x_4 \tag{4.10}$$

将(4.10)代入(4.9)并比较自由项、含x_2，x_3和x_4的项，得到

$$\dot{f}_1-f_3u(1+u^2)^{-1}+f_4(-1+(1+u^2)^{-1})=0,\ \ \dot{f}_2=0$$

$$\dot{f}_3-f_3u\dot{u}(1+u^2)^{-1}+f_4\dot{u}(1+u^2)^{-1}-1=0,\quad \dot{f}_4+f_2=0$$

积分之，得

$$f_2=C_2,\quad f_4=C_4-C_2t$$

$$f_3=C_3(1+u^2)^{\frac{1}{2}}+(1+u^2)^{\frac{1}{2}}\int_0^t(1+u^2)^{-\frac{1}{2}}dt-(C_4-C_2t)u$$

$$-C_2(1+u^2)^{\frac{1}{2}}\int_0^t u(1+u^2)^{-\frac{1}{2}}dt$$

$$f_1=C_1+C_3\int_0^t u(1+u^2)^{-\frac{1}{2}}dt+\int_0^t u(1+u^2)^{-\frac{1}{2}}\left(\int_0^t(1+u^2)^{-\frac{1}{2}}dt\right)dt$$

$$-C_2\int_0^t u(1+u^2)^{-\frac{1}{2}}\left(\int_0^t u(1+u^2)^{-\frac{1}{2}}dt\right)dt$$

于是有

$$x_1=v=C_1+C_3\int_0^t u(1+u^2)^{-\frac{1}{2}}dt+\int_0^t u(1+u^2)^{-\frac{1}{2}}\left(\int_0^t(1+u^2)^{-\frac{1}{2}}dt\right)dt$$

$$-C_2\int_0^t u(1+u^2)^{-\frac{1}{2}}\left(\int_0^t u(1+u^2)^{-\frac{1}{2}}dt\right)dt+C_2x_2$$

$$+\left\{C_3(1+u^2)^{\frac{1}{2}}+(1+u^2)^{\frac{1}{2}}\int_0^t(1+u^2)^{-\frac{1}{2}}dt-(C_4-C_2t)u\right.$$

$$\left.-C_2(1+u^2)^{\frac{1}{2}}\int_0^t u(1+u^2)^{-\frac{1}{2}}dt\right\}x_3+(C_4-C_2t)x_4 \tag{4.11}$$

令初条件为$t=0$，$x_\alpha(0)=x_{\alpha 0}$ $(\alpha=1,2,3,4)$，将其代入(4.11)，可解得常数C_1，有

$$C_1=x_{10}-C_2x_{20}-C_3x_{30}-C_4x_{40} \tag{4.12}$$

将(4.12)代入(4.11)，得到

$$x_1=v=x_{10}-C_2x_{20}-C_3x_{30}-C_4x_{40}+C_3\int_0^t u(1+u^2)^{-\frac{1}{2}}dt$$

$$+\int_0^t u(1+u^2)^{-\frac{1}{2}}\left(\int_0^t(1+u^2)^{-\frac{1}{2}}dt\right)dt-C_2\int_0^t u(1-u^2)^{-\frac{1}{2}}\left(\int_0^t u(1+u^2)^{-\frac{1}{2}}dt\right)dt$$

$$+C_2x_2+\left\{C_3(1+u^2)^{\frac{1}{2}}+(1+u^2)^{\frac{1}{2}}\int_0^t(1+u^2)^{-\frac{1}{2}}dt-(C_4-C_2t)u\right.$$

$$\left.-C_2(1+u^2)^{\frac{1}{2}}\int_0^t u(1+u^2)^{-\frac{1}{2}}dt\right\}x_3+(C_4-C_2t)x_4 \tag{4.13}$$

现在检验行列式(3.7).我们有

$$\det\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x_B\partial C_A}\right)=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ tu-(1+u^2)^{\frac{1}{2}}\int_0^t u(1+u^2)^{-\frac{1}{2}}dt & (1+u^2)^{\frac{1}{2}} & -u \\ -t & 0 & 1\end{vmatrix}$$

$$=(1+u^2)^{\frac{1}{2}}\neq 0 \tag{4.14}$$

关系(3.6)给出

$$\partial v/\partial C_2=0,\quad \partial v/\partial C_3=0,\quad \partial v/\partial C_4=0$$

即

$$\left.\begin{aligned}&-x_{20}-\int_0^t u(1+u^2)^{-\frac{1}{2}}\left(\int_0^t u(1+u^2)^{-\frac{1}{2}}dt\right)dt+x_2\\&\qquad+\left\{tu-(1+u^2)^{\frac{1}{2}}\int_0^t u(1+u^2)^{-\frac{1}{2}}dt\right\}x_3-tx_4=0\\&-x_{30}+\int_0^t u(1+u^2)^{-\frac{1}{2}}dt+(1+u^2)^{\frac{1}{2}}x_3=0\\&-x_{40}-ux_3+x_4=0\end{aligned}\right\}\tag{4.15}$$

由此代数方程解得

$$\left.\begin{aligned}x_2&=x_{20}+x_{40}t+x_{30}\int_0^t u(1+u^2)^{-\frac{1}{2}}dt+\int_0^t u(1+u^2)^{-\frac{1}{2}}\left(\int_0^t u(1+u^2)^{-\frac{1}{2}}dt\right)dt\\&\quad-\int_0^t u(1+u^2)^{-\frac{1}{2}}dt\cdot\int_0^t u(1+u^2)^{-\frac{1}{2}}dt\\x_3&=(1+u^2)^{-\frac{1}{2}}x_{30}-(1+u^2)^{-\frac{1}{2}}\int_0^t u(1+u^2)^{-\frac{1}{2}}dt\\x_4&=x_{40}+u(1+u^2)^{-\frac{1}{2}}x_{30}-u(1+u^2)^{-\frac{1}{2}}\int_0^t u(1+u^2)^{-\frac{1}{2}}dt\end{aligned}\right\}\tag{4.16}$$

将(4.16)代入(4.13)，得到

$$\begin{aligned}x_1&=x_{10}+\int_0^t u(1+u^2)^{-\frac{1}{2}}\left(\int_0^t(1+u^2)^{-\frac{1}{2}}dt\right)dt+x_{30}\int_0^t(1+u^2)^{-\frac{1}{2}}dt\\&\quad-\int_0^t u(1+u^2)^{-\frac{1}{2}}dt\cdot\int_0^t(1+u^2)^{-\frac{1}{2}}dt\end{aligned}\tag{4.17}$$

这样，我们得到相应完整系统(4.6)的解(4.16)、(4.17)。

最后，求非完整系统的解。约束加在初条件上的限制为

$$x_{40}-u(0)x_{30}=0$$

注意到(4.3)，这可写成

$$x_{40}=0\tag{4.18}$$

将(4.18)补充到解(4.16)、(4.17)中，就得到问题的最终解，其中包含3个任意常数。

如给出不同的控制规律 $u=u(t)$，可得到问题的不同解答。反之，如要求实现某种运动 $x_\alpha=x_\alpha(t)$ $(\alpha=1,2,3,4)$，可以反过来求出控制规律。

参 考 文 献

[1] Rumyantzev, V. V. and A. S. Sumbatov, On the problem of a generalization of the Hamilton-Jacobi method for nonholonomic systems, *ZAMM*, **58** (1978), 477—481.

[2] Vujanović, B., A field method and its application to the theory of vibrations, *Int. J. Non-Linear Mechanics*, **19** (1984), 383—396.

[3] Mei Feng-xiang, A field method for solving the equations of motion of non-holonomic systems, *Acta Mechanica Sinica*, 5(3) (1989), 260—268.

[4] 梅凤翔，《非完整系统力学基础》，北京工业学院出版社 (1985).

A Field Method for Integrating the Equations of Motion of Nonholonomic Controllable Systems

Mei Feng-xiang
(Beijing Institute of Technology, Beijing)

Abstract

This paper presents a field method for integrating the equations of motion of nonholonomic controllable systems. An example is given to illustrate the application of the method.

Key words equation of motion, nonhonolomic system, controllable system, field method