应用数学和力学，第13卷第2期（1992年2月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

粘性阻尼系统的自由界面模态综合法*

倪振华　黄上恒　王一采

（西安交通大学工程力学系，1990年9月10日收到）

摘　要

本文对任意粘性阻尼系统提出一种新的自由界面部件模态综合方法．对于具有刚体自由度的部件引入状态向量描述的左、右投影矩阵，论证了投影矩阵对状态位移及状态力的算子作用，据此定义了状态剩余柔度矩阵及状态剩余惯性释放附着模态．文中提供的三个算例表明，本文提出的方法具有较高的计算精度和模态综合效率．

关键词　粘性阻尼系统　部件模态综合　投影矩阵

一、引　言

工程中大量结构具有的阻尼简化为粘性阻尼，比简化为比例阻尼更为合理．对这类复杂结构，传统的部件模态综合方法（CMS）是不适用的．近年来一些文献提出用于粘性阻尼系统的模态综合方法[1~4]．文[1]与[2]采用部件复模态，以不同形式将Craig-Bampton方法推广到具对称子结构矩阵的阻尼系统．文[3]采用了截断的部件复模态与广义实附着模态，适用于自由界面部件，但计算精度不高．文[4]提出一种新的自由界面模态综合方法，将Craig-Chang方法推广到阻尼系统，不过只考虑了部件零频特征子空间不亏损的情况，而且只给出具有对称阻尼的系统的算例．

本文对于具有刚体自由度的部件引入左、右投影矩阵，分别对部件零频特征子空间不亏损和亏损两种情况，重新论证了投影矩阵对状态位移和状态力的算子作用，给出状态剩余柔度矩阵与状态剩余惯性释放模态的定义，从而将适用于无阻尼系统的Craig-Chang方法成功地推广到任意粘性阻尼系统．文末提供的算例包括了部件零频特征子空间不亏损与亏损的情况，又包括了对称阻尼与非对称阻尼的情况．这些算例表明，由于定义的状态剩余模态截获了各部件删除的高阶复模态的信息，本文提出的方法具有较高的计算精度和较高的模态综合效率．

二、状态空间中的投影矩阵

自由界面部件自由振动方程的状态空间形式可写为

$$A\dot{X}+BX=F \tag{2.1}$$

* 张汝清推荐．
西安交通大学科学基金资助项目．

式中

$$A=\begin{bmatrix} O & m \\ m & c \end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix} -m & O \\ O & k \end{bmatrix},\quad X=\begin{bmatrix} \dot{x} \\ x \end{bmatrix},\quad F=\begin{bmatrix} O \\ f \end{bmatrix},\quad f=\begin{bmatrix} O_i \\ f_b \end{bmatrix} \tag{2.2}$$

其中m，c，k为部件的质量，阻尼，刚度矩阵；部件具有刚体自由度时k奇异；下标i，b表示位移向量x的内部坐标及界面坐标部分；f_b为来自邻接部件的界面力；X，F称为状态位移和状态力．当m，c，k不全对称时，存在下列伴随状态方程

$$-A^T\dot{Y}+B^TY=F^* \tag{2.3}$$

式中伴随状态位移Y，伴随状态力F^*为

$$Y=[\dot{y}^T,\ y^T]^T,\quad F^*=[O,\ (f^*)^T]^T \tag{2.4}$$

式(2.1)与(2.3)的矩阵特征值问题为

$$B\Phi=-A\Phi\Lambda,\quad \Psi^TB=-\Lambda\Psi^TA \tag{2.5}$$

式中Φ，Ψ分别为右及左复模态矩阵，Λ是复谱矩阵．由式(2.5)进而有

$$\bar{B}=-\bar{A}\Lambda=-\Lambda\bar{A} \tag{2.6}$$

式中
$$\bar{B}=\Psi^TB\Phi,\quad \bar{A}=\Psi^TA\Phi \tag{2.7}$$

对互异的特征值，相应的左、右复模态间有双正交性．

对具有刚体自由度的部件，复模态矩阵Φ，Ψ可分块为

$$\Phi=[\Phi_r,\ \Phi_f],\quad \Psi=[\Psi_r,\ \Psi_f] \tag{2.8}$$

下标r，f表示刚体模态部分与弹性模态部分，于是式(2.7)可写为

$$\bar{B}=\mathrm{diag}[\bar{B}_{rr},\ \bar{B}_{ff}],\quad \bar{A}=\mathrm{diag}[\bar{A}_{rr},\ \bar{A}_{ff}] \tag{2.9}$$

式中

$$\bar{B}_{ss}=\Psi_s^TB\Phi_s,\quad \bar{A}_{ss}=\Psi_s^TA\Phi_s,\qquad s=r,f \tag{2.10}$$

现定义右投影矩阵P和左投影矩阵Q为

$$P^T=I-\Phi_r\bar{A}_{rr}^{-1}\Psi_r^TA,\quad Q=I-A\Phi_r\bar{A}_{rr}^{-1}\Psi_r^T \tag{2.11}$$

由定义知P，Q都是幂等矩阵，而且有

$$QA=AP^T \tag{2.12}$$

$$P^T\Phi_r=Q^T\Psi_r=O,\quad P^T\Phi_f=\Phi_f,\quad Q^T\Psi_f=\Psi_f \tag{2.13}$$

下面证明投影矩阵对状态位移的算子作用．设状态位移X包含有刚体位移X_r，则X可按右模态展开为

$$X=X_r+X_f=\Phi_r\eta_r+\Phi_f\eta_f \tag{2.14}$$

于是有

$$P^TX=\Phi_f\eta_f=X-X_r \tag{2.15}$$

即P^T左乘于任意状态位移X时，消除了刚体位移成分．同样有

$$Q^TY=Y-Y_r \tag{2.16}$$

复谱矩阵Λ可按式(2.9)分块为

$$\Lambda=\mathrm{diag}[\Lambda_{rr},\ \Lambda_{ff}] \tag{2.17}$$

上式及(2.8)代入(2.5)，得

$$B\Phi_r=-A\Phi_r\Lambda_{rr},\quad \Psi_r^TB=-\Lambda_{rr}\Psi_r^TA \tag{2.18}$$

现分两种情况证明投影矩阵对状态力的算子作用：

(1) 部件零频特征子空间不亏损：部件刚体自由度数设为n_r，零特征值是式(2.5)的n_r重根，这时部件分别有n_r个常规右、左状态刚体模态，可构造为

$$\Phi_r=[(O^V)^T,\ (\Phi_r^D)^T]^T,\ \Psi_r=[(O^V)^T,\ (\Psi_r^D)^T]^T \tag{2.19}$$

上标V，D表示状态向量中的速度及位移部分，Φ_r^D，Ψ_r^D来自于下列方程

$$k\Phi_r^D=O,\ k^T\Psi_r^D=O \tag{2.20}$$

由(2.2)、(2.18)易知有

$$B\Phi_r=O,\ \Psi_r^TB=O,\ \Lambda_{rr}=O \tag{2.21}$$

于是由(2.11)有

$$QB=BP^T \tag{2.22}$$

若对式(2.1)的状态力F左乘Q，由(2.12)、(2.22)及(2.15)得

$$\begin{aligned}QF&=Q(A\dot{X}+BX)=AP^T\dot{X}+BP^TX\\&=A(\dot{X}-\dot{X}_r)+B(X-X_r)=F-(A\dot{X}_r+BX_r)\\&=\begin{bmatrix}O\\ f-m\ddot{x}_r-c\dot{x}_r\end{bmatrix}\end{aligned} \tag{2.23}$$

可见,作用于部件的力f变为被因刚体运动引起的惯性力和阻尼力所平衡的力,简称自平衡力.

（2） 部件零频特征子空间亏损:零特征值是式(2.5)的$2n_r$重根,这时部件除有n_r个常规右刚体模态(记为Φ_r')之外,还有n_r个相应的广义右刚体模态,记为Φ_r'',Φ_r'和Φ_r''的关系为[5]

$$(-A^{-1}B)\Phi_r''=\Phi_r' \tag{2.24}$$

由上式得知Φ_r''的速度部分$\Phi_r''^V$及位移部分$\Phi_r''^D$需满足

$$\Phi_r''^V=\Phi_r^D,\ k\Phi_r''^D=-c\Phi_r^D \tag{2.25}$$

因k阵奇异，(2.25)第二式仅对某些半正定阻尼有解，这时有

$$c\Phi_r^D=O \tag{2.26}$$

为简单可取$\Phi_r''^D=O$，于是完备的状态右刚体模态为

$$\Phi_r=[\Phi_r',\ \Phi_r'']=\begin{bmatrix}O & \Phi_r^D\\ \Phi_r^D & O\end{bmatrix} \tag{2.27}$$

状态左刚体模态形如上式，只是Φ_r^D改为Ψ_r^D，易知这时

$$\Lambda_{rr}=-\bar{A}_{rr}^{-1}\bar{B}_{rr}=\begin{bmatrix}O_{rr} & I_{rr}\\ O_{rr} & O_{rr}\end{bmatrix} \tag{2.28}$$

并由(2.18)有

$$B\Phi_r'=O,\ B\Phi_r''=-A\Phi_r',\ (\Psi_r')^TB=-(\Psi_r'')^TA,\ (\Psi_r'')^TB=O \tag{2.29}$$

由(2.17)及上式得

$$\begin{aligned}QB&=(I-A[\Phi_r',\Phi_r'']\bar{A}_{rr}^{-1}[\Psi_r',\Psi_r'']^T)B=B-A\Phi_r'\bar{A}_{rr}^{-1}\Psi_r'^TB-A\Phi_r''\bar{A}_{rr}^{-1}\Psi_r''^TB\\&=B-B\Phi_r''\bar{A}_{rr}^{-1}\Psi_r''^TA=B(I-\Phi_r'\bar{A}_{rr}^{-1}\Psi_r'^TA-\Phi_r''\bar{A}_{rr}^{-1}\Psi_r''^TA)\\&=BP^T\end{aligned} \tag{2.30}$$

即(2.22)仍成立．这样，(2.23)表示的算子作用仍然成立．

三、状态剩余模态

若定义下列状态单位界面力矩阵

$$F_a=[O_{bt},\ O_{bb},\ O_{bt},\ I_{bb}]^T \tag{3.1}$$

由(2.23)，QF_a即自平衡状态单位界面力．设矩阵$\hat{\Phi}_a$的各列是部件受QF_a作用并在人为定义的刚体自由度有静定约束而产生的状态静位移，即

$$B\hat{\Phi}_a=QF_a \tag{3.2}$$

由此解出

$$\hat{\Phi}_a=DQF_a \tag{3.3}$$

式中

$$D=\mathrm{diag}\,[-m^{-1},\ k_{ll}^{-1},\ O_{rr}] \tag{3.4}$$

其中k_{ll}是k的一个主子阵，l表示内部坐标与赘余界面坐标的总和，并约定刚体坐标位于位移向量的最后部分．为消除右刚体模态，将(3.3)左乘P^T，便得到下列与Ψ_r正交的状态惯性释放附着模态

$$\Phi_a=(P^TDQ)F_a=D_fF_a \tag{3.5}$$

式中$D_f=P^TDQ$称为状态弹性柔度矩阵．现在可将Φ_a按右弹性模态展为$\Phi_a=\Phi_fE$，Φ_a显然也满足(3.2)，代入后左乘Ψ_f^T，得

$$E=\bar{B}_{ff}^{-1}\Psi_f^TQF_a=\bar{B}_{ff}^{-1}\Psi_f^TF_a \tag{3.6}$$

于是

$$\Phi_a=(\Phi_f\bar{B}_{ff}^{-1}\Psi_f^T)F_a \tag{3.7}$$

比较上式与(3.5)，括号内部分表示同一个部件的状态弹性柔度矩阵，故有

$$D_f=P^TDQ=\Phi_f\bar{B}_{ff}^{-1}\Psi_f^T \tag{3.8}$$

若将弹性复模态分块为

$$\Phi_f=[\Phi_p,\Phi_h],\ \Psi_f=[\Psi_p,\Psi_h] \tag{3.9}$$

式中下标p，h表示保留模态部分与删除(高阶)模态部分，则

$$D_f=D_p+D_h \tag{3.10}$$

式中

$$D_p=\Phi_p\bar{B}_{pp}^{-1}\Psi_p^T,\ D_h=\Phi_h\bar{B}_{hh}^{-1}\Psi_h^T,\ \bar{B}_{ss}=\Psi_s^TB\Phi_s,\qquad s=p,\ h \tag{3.11}$$

D_h称为状态剩余弹性柔度矩阵，它无需高阶模态即可由下式求得

$$D_h=P^TDQ-\Phi_p\bar{B}_{pp}^{-1}\Psi_p^T \tag{3.12}$$

对于无刚体自由度的部件不难得知

$$P=Q=I,\ D_h=B^{-1}-\Phi_p\bar{B}_{pp}^{-1}\Psi_p^T \tag{3.13}$$

现定义右状态剩余(惯性释放附着)模态Φ_d为

$$\Phi_d=D_hF_a \tag{3.14}$$

由(3.11)知Φ_d实际是高阶弹性模态的线性组合，故与Ψ_r，Ψ_p都正交，若将Φ_d分块为

$$\Phi_d=[(\Phi_{id}^V)^T,\ (\Phi_{bd}^V)^T,\ (\Phi_{id}^D)^T,\ (\Phi_{bd}^D)^T]^T \tag{3.15}$$

Φ_h，Ψ_h，D_h也作相应分块，则由(3.1)、(3.11)、(3.14)有

$$\Phi_d=\Phi_h\bar{B}_{hh}^{-1}(\Psi_{bh}^D)^T,\ \Phi_{bd}^D=\Phi_{bh}^D\bar{B}_{hh}^{-1}(\Psi_{bh}^D)^T=(D_h)_{bb}^{DD} \tag{3.16}$$

可见Φ_d的位移界面部分Φ_{bd}^D正是D_h的位移界面部分。

定义左状态剩余模态Ψ_d为

$$\Psi_d=D_h^TF_a \tag{3.17}$$

相应于(3.16)有

$$\Psi_d=\Psi_h(\bar{B}_{hh}^{-1})^T(\Phi_{bh}^D)^T,\ \Psi_{bd}^D=\Psi_{bh}^D(\bar{B}_{hh}^{-1})^T(\Phi_{bh}^D)^T=[(D_h)_{bb}^{DD}]^T \tag{3.18}$$

可见 $$\Psi_{bd}^D=(\Phi_{bd}^D)^T \tag{3.19}$$

若m，c，k皆对称，则$Q=P$，且D_f，Φ_{bd}^D对称。

现设模态矩阵U，V为

$$U=[\Phi_r,\ \Phi_p,\ \Phi_d]=[\Phi_k,\ \Phi_d],\ V=[\Psi_r,\ \Psi_p,\ \Psi_d]=[\Psi_k,\ \Psi_d] \tag{3.20}$$

对式(2.1)作下列坐标变换

$$X=U\eta=[\Phi_k,\Phi_d][\eta_k^T,\eta_d^T]^T \tag{3.21}$$

上式代入(2.1)并左乘V^T，得

$$A_\eta\dot{\eta}+B_\eta\eta=F_\eta \tag{3.22}$$

式中

$$\left.\begin{aligned}&A_\eta=V^TAU=\mathrm{diag}[\bar{A}_{kk},\bar{A}_{dd}],\\&B_\eta=\mathrm{diag}[\bar{B}_{kk},\ \bar{B}_{dd}]\\&\bar{A}_{ss}=\Psi_s^TA\Phi_s,\ \bar{B}_{ss}=\Psi_s^TB\Phi_s,\ s=k,d\\&F_\eta=V^TF=[\Psi_{bk}^D,\Psi_{bd}^D]^Tf_b\end{aligned}\right\} \tag{3.23}$$

由(3.16)、(3.18)、(3.11)可证

$$\bar{A}_{dd}=\Phi_{bh}^D\bar{A}_{hh}^{-1}\Lambda_{hh}^{-2}(\Psi_{bh}^D)^T,\ \bar{B}_{dd}=\Phi_{bh}^D\bar{B}_{hh}^{-1}(\Psi_{bh}^D)^T=\Phi_{bd}^D=(\Psi_{bd}^D)^T \tag{3.24}$$

由上式，(3.22)的第二行可写为

$$\bar{A}_{dd}\dot{\eta}_d+\Phi_{bd}^D\eta_d=\Phi_{bd}^Df_b \tag{3.25}$$

略去$\dot{\eta}_d$影响并注意Φ_{bd}^D非奇异，便得到

$$\eta_d=f_b \tag{3.26}$$

可见右剩余模态坐标η_d的伪静态响应即界面力f_b。对(2.3)作坐标变换

$$Y=V\xi=[\Psi_k,\Psi_d][\xi_k^T,\xi_d^T]^T \tag{3.27}$$

则相应有

$$\xi_d=f_b^* \tag{3.28}$$

上述状态剩余模态的性质与适用于无阻尼系统的Craig-Chang方法中定义的剩余附着模态很类似[6]。部件的综合过程(见文[7])也平行于无阻尼系统采用的过程。利用式(3.26)，(3.28)和界面力、界面位移协调条件，可以消除所有剩余模态对应的广义坐标。

四、算　　例

算例1　结构为一块悬臂矩形薄板，计算其横向弯曲振动的模态阻尼系数n_i及阻尼固有频率ω_{di}。部件、单元划分及阻尼形式见图1。标有c_1^e与c_2^e的部分表示单元阻尼矩阵是不同

的两种，其中$c_1^e=c^e/20$，$c_2^e=c^e/10$，而c^e是9×9的矩阵，主对角线元素皆为5，其它元素皆为1．$a=1$，$b=2$，$\rho=1$，$Et^3/2304(1-\mu^2)=1$，其中E为弹性模量，t为板厚，ρ为单位体积质量，μ为泊松比．部件2的零频特征子空间不亏损（这是常见的情况）．所用的部件模态个数见表1．表2列出前18阶的n_i及ω_{di}与精确解的比较，精确解由直接有限元方法(FEM)给出，其状态方程有72个自由度．n_i，ω_{di}与复特征值λ_i的关系如下

$$\lambda_i=-n_i+j\omega_{di}\qquad j=\sqrt{-1}$$

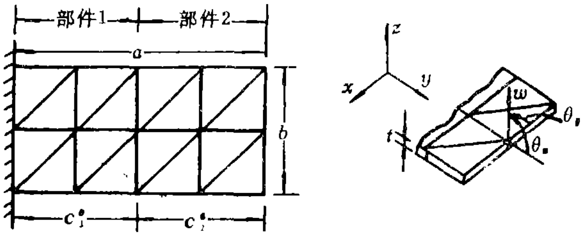

图 1

表1 各算例中所用部件模态的个数

算例1			算例2			算例3		
部件序号	1	2	部件序号	1	2	部件序号	1	2
部件自由度	36	54	部件自由度	28	20	部件自由度	28	20
Φ_r	0	3	Φ_r	4	4	$\Phi_r(=\Psi_r)$	2	2
Φ_p	14	18	Φ_p	12	8	Φ_p,Ψ_p	11	7
Φ_d	9	9	Φ_d	2	2	Φ_d,Ψ_d	2	2
CMS模型自由度	35		CMS模型自由度	28		CMS模型自由度	22	
FEM模型自由度	72		FEM模型自由度	44		FEM模型自由度	44	

表2 算例1近似解与精确解比较

阶次	n_i 精确解	n_i 近似解	n_i 误差(%)	ω_{di} 精确解	ω_{di} 近似解	ω_{di} 误差(%)
1，2	0.19970E1	0.19969E1	−0.00386	0.10824E1	0.10824E1	0.00048
3，4	0.45850E1	0.45849E1	−0.00155	0.77063E1	0.77077E1	0.0175
5，6	0.30240E1	0.30254E1	0.0464	0.12807E2	0.12811E2	0.0283
7，8	0.44854E1	0.44862E1	0.0178	0.29929E2	0.29944E2	0.0498
9，10	0.48915E1	0.49200E1	0.583	0.37177E2	0.37228E2	0.137
11，12	0.56336E1	0.56417E1	0.144	0.57336E2	0.57457E2	0.210
13，14	0.10666E2	0.10669E2	0.0323	0.57012E2	0.57046E2	0.0600
15，16	0.57743E1	0.58089E1	0.600	0.72661E2	0.73320E2	0.906
17，18	0.80905E1	0.78442E1	−3.044	0.75567E2	0.75572E2	0.0071

注 相应于表中n_i，ω_{di}的复特征值都是共轭的．

算例2 结构为一根两端自由梁，考虑其横向弯曲振动．部件、单元划分及阻尼情况见图2，其中$c_1^e=0.02k^e$，$c_2^e=0.04k^e$，k^e是单元刚度阵．对于每个部件及整体梁，阻尼阵并不与刚度阵成比例，但部件阻尼阵满足式(2.26)．两个部件的零频特征子空间都亏损，

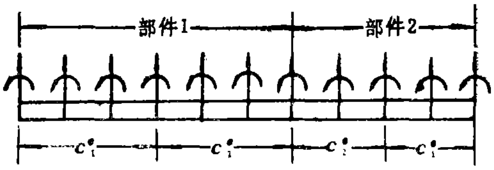

图 2

每个部件有 2 个常规刚体模态和 2 个广义刚体模态（见表1）。$E=\rho=I=A=1$，$L=10$，其中I，A，L为截面惯性矩，截面积，全长.表3 给出前20阶近似解与精确解的比较。

表3 **算例2近似解与精确解比较**

阶 次	n_i 精确解	n_i 近似解	n_i 误差(%)	ω_{di} 精确解	ω_{di} 近似解	ω_{di} 误差(%)
1, 2	0.10013E−2	0.10012E−2	−0.00978	0.22374E0	0.22374E0	0.00146
3, 4	0.76109E−2	0.76110E−2	0.00254	0.61683E0	0.61684E0	0.00132
5, 6	0.29289E−1	0.29290E−1	0.00501	0.12098E1	0.12098E1	0.00246
7, 8	0.80272E−1	0.80311E−1	0.0493	0.20018E1	0.20023E1	0.0245
9, 10	0.18008E0	0.18010E0	0.0108	0.29953E1	0.29955E1	0.00535
11, 12	0.35422E0	0.35497E0	0.212	0.41935E1	0.41979E1	0.105
13, 14	0.63486E0	0.63624E0	0.217	0.55982E1	0.56042E1	0.107
15, 16	0.10591E1	0.10631E1	0.379	0.71995E1	0.72128E1	0.185
17, 18	0.16344E1	0.16578E1	1.427	0.88911E1	0.89521E1	0.687
19, 20	0.28825E1	0.29170E1	1.196	0.11654E2	0.11719E2	0.559

注 表中只列出相应于弹性复模态的n_i及ω_{di}值.

算例3 结构仍如图2所示的两端自由梁，但阻尼为

$$c_1^e=\frac{1}{40}c^e,\quad c_2^e=\frac{1}{20}c^e,\quad c^e=\begin{bmatrix} 5 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 5 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 5 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

这时对于部件及整体梁，阻尼阵都不是对称的。所用的部件模态个数见表1．表4给出前14阶近似解与精确解比较．

表4 **算例3近似解与精确解比较**

阶 次	n_i 精确解	n_i 近似解	n_i 误差(%)	ω_i 精确解	ω_i 近似解	ω_i 误差(%)
1*	0.14470E0	0.14470E0	0.00190	0.	−0.75684E−7	
2*	0.24759E0	0.24759E0	−0.00029	0.	0.14060E−7	
3, 4	0.40498E0	0.40497E0	−0.00027	0.59764E−1	0.59764E−1	0.00107
5, 6	0.37667E0	0.37671E0	0.0107	0.50341E0	0.50342E0	0.00186
7, 8	0.52177E0	0.52173E0	−0.00730	0.11112E1	0.11111E1	−0.00609
9, 10	0.71274E0	0.71231E0	−0.0611	0.19100E1	0.19115E1	0.0793
11, 12	0.95214E0	0.95664E0	0.472	0.29290E1	0.29338E1	0.164
13, 14	0.12315E1	0.12235E1	−0.642	0.41947E1	0.41906E1	−0.0968

注 表中只列出相应于弹性复模态的n_i及ω_{di}值，具角标*的特征值不是共轭的，它们对应于实模态.

上述三个算例表明，本文提出的方法对于任意粘性阻尼系统给出很好的计算结果，并且模态综合效率相当高．值得指出的是，计算中相应于部件共轭复特征值的保留复模态总是成对取的，这使得状态剩余柔度矩阵$\boldsymbol{D}_h$，状态剩余模态$\boldsymbol{\Phi}_d$，Ψ_d及相应的矩阵$\boldsymbol{\Phi}_{bd}^D$，Ψ_{bd}^D，$\bar{\boldsymbol{A}}_{dd}$，$\bar{\boldsymbol{B}}_{dd}$都成为实矩阵，这对于节省内存和算时都是有意义的．

石滨、尚志云和潘辉同志参与了计算，在此表示感谢．

参考文献

[1] Beliveau, J. G. and Y. Soucy, Damping synthesis using complex substructure modes and a Hermitian system representation, *Proc. AIAA/ASME/ASCE/AHS 26th Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference*, AIAA, New York (1985), 581—586.

[2] Hasselman, T. K. and A. Kaplan, Dynamic analysis of large systems by complex mode synthesis, *J. Dynamic Systems, Measurement, and Control*, **96**, G (1974), 327—333.

[3] Howsman, T. G. and R. R. Craig, A substructure coupling procedure applicable to general linear time-invariant dynamic systems, *Proc. AIAA/ASME/ASCE/AHS 25th Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference*, AIAA, New York (1984), 164—171.

[4] Craig, R. R. and Z. H. Ni, Component mode synthesis for model order reduction of nonclassically damped systems, *J. Guidance, Control, and Dynamics*, **12** (1989), 577—584.

[5] Chen, C. T., *Linear System Theory and Design*, Holt, Rinehart and Winston, New York (1984).

[6] Craig, R. R., *Structural Dynamics——An Introduction to Computer Methods*, Chap. 19, Wiley, New York (1981).

[7] 倪振华、王一采、黄上恒、状态剩余模态在粘滞阻尼系统模态综合中的应用，《第四届全国振动理论及应用学术会议论文集》(上)(1990), 526—534.

The Free-Interface Method of Component Mode Synthesis for Systems with Viscous Damping

Ni Zhen-hua Huang Shang-heng Wang Yi-cai

(Department of Engineering Mechanics, Xi'an Jiaotong University, Xi'an)

Abstract

This paper presents a new free-interface method of component mode synthesis for linear systems with arbitrary viscous damping. The left and right projection matrices described by state-variable vectors are first introduced for components with rigid-body freedom. The operator function of projection matrices for state displacement and state force is proved, and then the state residual flexibility matrix and the state residual inertia-relief attachment mode are defined and employed. The results of three examples demonstrate that the method proposed in this paper leads to very accurate system eigenvalues and high mode-synthesis efficiency.

key words viscously damped systems, component mode synthesis, projection matrix