应用数学和力学，第 13 卷第 1 期（1992年 1 月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

考虑β变化下的Rossby波*

刘式适　　谭本馗

（北京大学地球物理系）（南京大学地球物理系）

摘　　要

本文考虑了 Rossby参数β随纬度的变化并引进了γ参数 $\gamma\equiv-d\beta/dy=2\Omega\sin\varphi/a^2$，同时把$\beta$平面近似扩展为含$\gamma$参数的近似：$f\approx f_0+\beta_0y-\gamma_0y^2/2$．这就更接近实际，特特是在较高纬度地区．

本文着重研究了γ参数对 Rossby 波的作用．研究指出：γ 参数在较高纬地区有较强的作用，它可以形成纯γ参数所产生的Rossby波，并给出了在一般情况下的包含β变化的Rossby 波相速公式，它在$\gamma_0=0$时退化为著名的Rossby公式．研究还指出：考虑了β的变化，即便基本气流$\bar{u}$是y的线性函数也可以出现不稳定，但γ参数通常对Rossby波起稳定的作用．而且，它影响Rossby波的经向尺度和等位相线的结构，但都减缓Rossby波的增长或衰减．

关键词　Rossby波　Rossby参数　γ 参数

一、引　　言

Rossby波是由于Rossby参数β的作用所引起的，因为它是影响地球流体大尺度运动的主要波动，因而它一直是地球流体力学的一个重要研究课题．

然而，迄今为止，人们除直接应用球坐标系讨论Haurwitz波（球面上的Rosssy波）外，一直采用β平面近似讨论Rossby 波，从波的形成、传播和稳定性等诸方面都取得了许多重要的结果（例如，Rossby 1939：Charney 1947；Phillips 1965；Kuo 1949；Zeng 1983）．

旋转地球的 Coriolis 参数为

$$f\equiv 2\Omega\sin\varphi \tag{1.1}$$

其中φ为纬度，

$$\Omega\doteq 7.292\times10^{-5}\mathrm{s}^{-1} \tag{1.2}$$

为地球自转角速度．

所谓Rossby参数β乃是Coriolis参数f对y（经向距离）的微商，即

$$\beta\equiv\frac{df}{dy}=\frac{df}{ad\varphi}=\frac{2\Omega\cos\varphi}{a} \tag{1.3}$$

* 叶开沅推荐．1991年3月4日收到．

其中

$$a=6.371\times10^6\ \mathrm{m} \tag{1.4}$$

为地球平均半径。

若要进一步考虑β随纬度的变化，则引进γ参数，其定义为

$$\gamma\equiv-\frac{d\beta}{dy}=-\frac{d^2f}{dy^2}=\frac{2\Omega\sin\varphi}{a^2} \tag{1.5}$$

通常的所谓β平面近似就是将Coriolis参数f在$\varphi=\varphi_0$附近作Taylor 展开，取两项并取$\varphi-\varphi_0\doteq y/a$而得到的下列表达式：

$$f=f_0+\beta_0 y \tag{1.6}$$

其中

$$f_0=2\Omega\sin\varphi_0 \tag{1.7}$$

$$\beta_0=\frac{2\Omega\cos\varphi_0}{a} \tag{1.8}$$

利用β平面近似(1.6)可知：$\beta=\beta_0$意味着视 Rossby 参数β为常数，并且Coriolis参数用一个y的线性函数去近似。

实际β是随纬度φ变化的，若f的展开式取三项，则得到

$$f=f_0+\beta_0 y-\frac{1}{2}\gamma_0 y^2 \tag{1.9}$$

其中

$$\gamma_0=\frac{2\Omega\sin\varphi_0}{a^2} \tag{1.10}$$

(1.9)式表示Coriolis参数f用一个y的二次函数去近似，而Rossby参数β则是y的线性函数，即

$$\beta=\beta_0-\gamma_0 y \tag{1.11}$$

与β平面近似(1.6)式相比，(1.9)式使f随y的增大减缓，与$\beta=\beta_0$相比，(1.11)式反映了β随y增大而减小的特征。这样，应用(1.9)式和(1.11)式更符合实际，特别是在较高纬地区。

在中纬度地区，f_0，β_0，γ_0的值可分别取为

$$f_0\doteq10^{-4}\mathrm{s}^{-1},\quad \beta_0=2\times10^{-11}\mathrm{m}^{-1}\mathrm{s}^{-1},\quad \gamma_0=3\times10^{-18}\mathrm{m}^{-2}\mathrm{s}^{-1} \tag{1.12}$$

二、考虑γ参数影响下的Rossby波

为了简化，我们就考虑正压和水平无辐散的Rossby波。在此条件下的线性涡度方程可以写为

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial}{\partial x}\right)\nabla_h^2\psi'+B\frac{\partial\psi'}{\partial x}=0 \tag{2.1}$$

其中 $\bar{u}=\bar{u}(y)$为基本气流；ψ'为扰动流函数；x，y分别表东西、南北方向，∇_h^2为水平面上的 Laplace算子，即

$$\nabla_h^2\equiv\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2} \tag{2.2}$$

而

$$B\equiv\beta-\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial y^2}=\beta_0-\gamma_0 y-\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial y^2} \tag{2.3}$$

为基本气流绝对涡度的经向梯度.

本节着重分析Rossby波的相速度，故取$\bar{u}$为常数. 这样，方程(2.1)化为

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial}{\partial x}\right)\nabla_h^2\psi'+(\beta_0-\gamma_0 y)\frac{\partial\psi'}{\partial x}=0 \tag{2.4}$$

应用正交模方法，我们令

$$\psi'=\Psi(y)\exp[ik(x-ct)] \tag{2.5}$$

其中 k为x方向的波数，c为该方向上的相速.

(2.5)式代入方程(2.4)，当 $\bar{u}-c\neq 0$时得到

$$\frac{d^2\Psi}{dy^2}+(l^2-\alpha_0 y)\Psi=0 \tag{2.6}$$

其中

$$l^2\equiv\frac{\beta_0}{\bar{u}-c}-k^2 \tag{2.7}$$

$$\alpha_0\equiv\frac{\gamma_0}{\bar{u}-c} \tag{2.8}$$

若不考虑β随纬度的变化，$\gamma_0=0$，相应有$\alpha_0=0$，则方程(2.6)化为

$$\frac{d^2\Psi}{dy^2}+l^2\Psi=0 \tag{2.9}$$

由此便知 l 相当于 y 方向的波数，并且由(2.7)式求得β平面近似下的Rossby波的相速度公式为

$$c=\bar{u}-\frac{\beta_0}{K_h^2} \tag{2.10}$$

其中 K_h为水平面上的全波数，它满足

$$K_h^2=k^2+l^2 \tag{2.11}$$

当考虑β随纬度的变化时，$\gamma_0\neq 0$，$\alpha_0\neq 0$，方程(2.6)称为Stokes 方程. 我们的问题是在边条件

$$\Psi|_{y=y_1}=0,\qquad \Psi|_{y=y_2}=0 \tag{2.12}$$

下求Stokes 方程(2.6)的本征值问题.

对方程作自变量变换，令

$$\xi=l^2-\alpha_0 y \tag{2.13}$$

则方程(2.6)化为

$$\frac{d^2\Psi}{d\xi^2}+\alpha_0^{-2}\xi\Psi=0 \tag{2.14}$$

这是可化为Bessel方程的方程，见附录一. 由此不难求得它的通解为

$$\Psi=\sqrt{\xi}\left\{AJ_{\frac{1}{3}}\left(\frac{2}{3\alpha_0}\xi^{3/2}\right)+BY_{\frac{1}{3}}\left(\frac{2}{3\alpha_0}\xi^{3/2}\right)\right\} \tag{2.15}$$

其中 A、B为二任意常数，$J_{\frac{1}{3}}$，$Y_{\frac{1}{3}}$分别为1/3阶的第一类和第二类Bessel函数.

(2.15)式代入边条件(2.12)有

$$\sqrt{l^2-a_0y_1}\left\{AJ_{\frac{1}{3}}\left(\frac{2}{3a_0}(l^2-a_0y_1)^{3/2}\right)+BY_{\frac{1}{3}}\left(\frac{2}{3a_0}(l^2-a_0y_1)^{3/2}\right)\right\}=0 \tag{2.16a}$$

$$\sqrt{l^2-a_0y_2}\left\{AJ_{\frac{1}{3}}\left(\frac{2}{3a_0}(l^2-a_0y_2)^{3/2}\right)+BY_{\frac{1}{3}}\left(\frac{2}{3a_0}(l^2-a_0y_2)^{3/2}\right)\right\}=0 \tag{2.16b}$$

这是A，B的齐次代数方程组，欲使A，B有非零解必须而且只有

$$\begin{vmatrix} J_{\frac{1}{3}}\left(\frac{2}{3a_0}(l^2-a_0y_1)^{3/2}\right) & Y_{\frac{1}{3}}\left(\frac{2}{3a_0}(l^2-a_0y_1)^{3/2}\right) \\ J_{\frac{1}{3}}\left(\frac{2}{3a_0}(l^2-a_0y_2)^{3/2}\right) & Y_{\frac{1}{3}}\left(\frac{2}{3a_0}(l^2-a_0y_2)^{3/2}\right) \end{vmatrix}=1 \tag{2.17}$$

或

$$J_{\frac{1}{3}}(\eta_1)Y_{\frac{1}{3}}(\eta_2)-J_{\frac{1}{3}}(\eta_2)Y_{\frac{1}{3}}(\eta_1)=0 \tag{2.18}$$

其中

$$\eta_1=\frac{2}{3a_0}\xi_1^{3/2}=\frac{2}{3a_0}(l^2-a_0y_1)^{3/2},\quad \eta_2=\frac{2}{3a_0}\xi_2^{3/2}=\frac{2}{3a_0}(l^2-a_0y_2)^{3/2} \tag{2.19}$$

方程(2.18)为超越方程，我们可以根据方程(2.18)的根去确定本征值c，见附录二，但考虑到实际大气中$a_0\doteq3\times10^{-17}\mathrm{m}^{-3}$，$l^2-a_0y_2<l^2-a_0y_1<l^2\doteq3\times10^{-11}\mathrm{m}^{-2}$，则有$\eta_1>\eta_2\gg1$，故应用 Bessel 函数的渐近公式

$$\left.\begin{aligned} J_\nu(x)&\sim\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos\left(x-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right) \\ Y_\nu(x)&\sim\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin\left(x-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\qquad(x\to\infty) \end{aligned}\right\} \tag{2.20}$$

则方程(2.18)化为

$$\frac{2}{\pi\sqrt{\eta_1\eta_2}}\left[\cos\left(\eta_1-\frac{5\pi}{12}\right)\sin\left(\eta_2-\frac{5\pi}{12}\right)-\cos\left(\eta_2-\frac{5\pi}{12}\right)\sin\left(\eta_1-\frac{5\pi}{12}\right)\right]=0 \tag{2.21}$$

由此得到

$$\sin(\eta_1-\eta_2)=0 \tag{2.22}$$

因而

$$\eta_1-\eta_2=n\pi\qquad(n=1,\ 2,\ \cdots) \tag{2.23}$$

将上式改写为

$$\eta_1=\frac{n\pi}{1-\frac{\eta_2}{\eta_1}} \tag{2.24}$$

再利用(2.19)式，则方程(2.23)近似有

$$\frac{(l^2-a_0y_1)^{3/2}}{a_0}=\frac{3n\pi}{2}\qquad(n=1,\ 2,\ \cdots) \tag{2.25}$$

以(2.7)式和(2.8)式代入上式得到

$$k^2(\bar{u}-c)+\left(\frac{3n\pi\gamma_0}{2}\right)^{2/3}(\bar{u}-c)^{1/3}-(\beta_0-\gamma_0y_1)=0 \tag{2.26}$$

这是$\bar{u}-c$的代数方程，我们近似求解它。

若忽略方程(2.26)左端第三项，则除$c=\bar{u}$的根外求得

$$c=\bar{u}-\frac{\frac{3n\pi\gamma_0}{2}}{k^3} \quad (n=1, 2, \cdots) \tag{2.27}$$

这是纯γ参数所产生的Rossby 波的相速度，显然，若不考虑β随纬度的变化，$\gamma_0=0$，则此波速失去意义。由(2.27)式看到：这个波速除与 $\bar{u}$ 有关外，也与波数 k 有关，而且与 k有关的项与k^3成反比。它说明波长越长，波更易静止或向西倒退，它在更高纬的地区常见。

若忽略方程(2.26)左端第二项，则得到

$$c=\bar{u}-\frac{\beta_0-\gamma_0 y_1}{k^2} \tag{2.28}$$

这是视 β 为变量的情况下，由β参数所产生的 Rossby 波的相速度，若 $\gamma_0=0$ 时，它退化为 Rossby 公式

$$c=\bar{u}-\frac{\beta_0}{k^2} \tag{2.29}$$

当$\gamma_0\neq 0$时，它比 Rossby 公式(2.29)右端多一项$\gamma_0 y_1/k^2$，这就增加了 c 的数值，这更符合实际的状况。

三、γ参数对正压稳定度的影响

在β平面近似下，Kuo(1949)讨论了Rossby波的正压稳定度问题。他得到结论：若在$[y_1, y_2]$内$\bar{u}-c\neq 0$，则 Rossby波正压不稳定的必要条件为

$$B_0\equiv\beta_0-\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial y^2} \tag{3.1}$$

在(y_1, y_2)内必须改变正负号。

显然，若$\bar{u}$是y的线性函数，且$\bar{u}-c$在$[y_1, y_2]$内不为零，则Rossby波必然是正压稳定的。但当考虑β随纬度的变化时，B_0转化为B（见(2.3)式），此时尽管$\bar{u}$ 是 y 的线性函数，且在$[y_1, y_2]$内$\bar{u}-c\neq 0$，但仍可以使B 改变符号，因而可以出现不稳定。

现在，我们考虑β随纬度的变化，并设

$$\bar{u}=\bar{u}_0+sy \tag{3.2}$$

这里s表$\bar{u}$的经向切变，即

$$s\equiv\frac{\partial\bar{u}}{\partial y}\neq 1 \tag{3.3}$$

这样，方程(2.1)化为

$$\left[\frac{\partial}{\partial t}+(\bar{u}_0+sy)\frac{\partial}{\partial x}\right]\nabla_h^2\psi'+(\beta_0-\gamma_0 y)\frac{\partial\psi'}{\partial x}=0 \tag{3.4}$$

以(2.5)式代入方程(3.4)得到

$$(\bar{u}_0-c+sy)\frac{d^2\Psi}{dy^2}+[\beta_0-k^2(\bar{u}-c)-(\gamma_0+k^2 s)y]\Psi=0 \tag{3.5}$$

利用上述方程，我们讨论Rossby波的稳定变。

方程(3.5)是包含一个正则奇点$y_0=-\frac{\bar{u}_0-c}{s}$和一个非正则奇点$\infty$的 Laplace 型方程。若作变换

$$y=\frac{1}{2\sqrt{k^2+\frac{\gamma_0}{s}}}\eta-\frac{\bar{u}_0-c}{s},\qquad \Psi=\exp\left[-\sqrt{k^2+\frac{\gamma_0}{s}}y\right]\Phi \tag{3.6}$$

则方程(3.5)化为

$$\eta\frac{d^2\Phi}{d\eta^2}-\eta\frac{d\Phi}{d\eta}-\alpha\Phi=0 \tag{3.7}$$

其中

$$\alpha=-\frac{\beta_0+k_0^2(\bar{u}_0-c)}{2s\sqrt{k_0^2+k^2}},\qquad k_0^2\equiv\frac{\gamma_0}{s} \tag{3.8}$$

以上变换见附录三。

方程(3.7)是合流超比方程（Kummer方程），它的两个线性无关的解为

$$\Phi_1=\eta F(\alpha+1,\ 2,\ \eta) \tag{3.9}$$

和

$$\Phi_2=\eta F(\alpha+1,\ 2,\ \eta)\ln\eta+\cdots \tag{3.10}$$

这里

$$F(\alpha,\ \gamma,\ x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_k}{k!(r)_k}x^k \tag{3.11}$$

为第一类合流超比函数（第一类Kummer函数），其中

$$(\alpha)_k=\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+k-1),\ (\alpha)_0=1 \tag{3.12}$$

为 Gauss 符号.

因为$F(\alpha+1,\ 2,\ \eta)$当$\alpha+1$等于零或负整数时退化为多项式，使得Φ_1成为唯一有界的解；而Φ_2中包含$\ln\eta$，当η是负实数或η改变正负号时，$\ln\eta$为复数，此时，就会出现不稳定波解。

由此分析便知，当

$$\alpha+1=-n\qquad(n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots) \tag{3.13}$$

时出现稳定波解，否则是不稳定波解。

(3.8)式代入上式，得到

$$\frac{\beta_0+k_0^2(\bar{u}_0-c)}{2s\sqrt{k_0^2+k^2}}=n+1\qquad(n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots) \tag{3.14}$$

因为$n+1\geqslant1$，所以，由此判断，风速切变数值越大，越易不稳定，而β参数和γ参数通常起稳定的作用。

特别，不考虑β变化时，$k_0^2=0$，则(3.14)式化为

$$\frac{\beta_0}{2ks}=n+1\qquad(n=0,\ 1,\ 2\cdots) \tag{3.15}$$

这是Gambo(1950)的结果。

四、γ参数对Rossby波演变的作用

本节应用缓变波列的概念考察γ参数对Rossby波演变的作用。

为此，应用多尺度方法，设ψ'为下列缓变波列：

$$\psi' = A(X, Y, T)\exp[i\theta(x, y, t)] \tag{4.1}$$

其中ε为小参数，而

$$X = \varepsilon x, \ Y = \varepsilon y, \ T = \varepsilon t, \ \theta = kx + ly - \omega t \tag{4.2}$$

(4.2)式代入到方程(2.1)得到

$$\left[-i(\omega - k\bar{u}) + \varepsilon\left(\frac{\partial}{\partial T} + \bar{u}\frac{\partial}{\partial X}\right)\right]\left[-K_h^2 A + i\varepsilon\left(2k\frac{\partial A}{\partial X} + 2l\frac{\partial A}{\partial Y}\right.\right.$$

$$\left.\left. + A\frac{\partial k}{\partial X} + A\frac{\partial l}{\partial Y}\right) + \varepsilon^2\left(\frac{\partial^2 A}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial Y^2}\right)\right] + B\left(ikA + \varepsilon\frac{\partial A}{\partial X}\right) = 0 \tag{4.3}$$

再应用WKB方法，令

$$A = A_0 + \varepsilon A_1 + \varepsilon^2 A_2 + \cdots \tag{4.4}$$

代入方程(4.3)，求得它的零级近似为

$$\{(\omega - k\bar{u})K_h^2 + Bk\}A_0 = 0 \tag{4.5}$$

因为$A_0 \neq 0$，则由上式求得频散关系为

$$\omega = k\bar{u} - \frac{Bk}{K_h^2} = \Omega(k, l, X, Y, T) \tag{4.6}$$

由此求得波的群速度c_g在x，y方向的分量为

$$c_{gx} \equiv \frac{\partial \Omega}{\partial k} = \bar{u} - \frac{B}{K_h^2} + \frac{2Bk^2}{K_h^4}, \quad c_{gy} \equiv \frac{\partial \Omega}{\partial l} = \frac{2Bkl}{K_h^4} \tag{4.7}$$

利用波的运动学关系还可求得

$$\left.\begin{aligned} &\frac{D_g\omega}{DT} = \left(\frac{\partial \Omega}{\partial T}\right)_{k,l,X,Y} = k\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial T} - \frac{1}{K_h^2}\frac{\partial B}{\partial T}\right), \quad \frac{D_g k}{DT} = -\left(\frac{\partial \Omega}{\partial X}\right)_{k,l,Y,T} = 0 \\ &\frac{D_g l}{DT} = -\left(\frac{\partial \Omega}{\partial Y}\right)_{k,l,X,T} = -k\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial r} - \frac{1}{K_h^2}\frac{\partial B}{\partial Y}\right) = -k\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial Y} - \frac{1}{K_h^2}\frac{\partial B_0}{\partial Y} + \frac{\gamma_0}{K_h^2\varepsilon}\right) \end{aligned}\right\} \tag{4.8}$$

其中

$$\frac{D_g}{DT} \equiv \frac{\partial}{\partial T} + c_{gX}\frac{\partial}{\partial x} + c_{gY}\frac{\partial}{\partial Y} \tag{4.9}$$

由于考虑了β的变化，所以在(4.8)式的第三式$\frac{D_g l}{DT}$的公式中出现了包含γ_0的项 $-\frac{k\gamma_0}{K_h^2\varepsilon}$，它使得$\frac{D_g l}{DT} < 0$，但它不影响$\omega$和$k$的变化。

由(4.8)式的第三式，我们有

$$\frac{D_g l^2}{DT} = -2kl\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial Y} - \frac{1}{K_h^2}\frac{\partial B_0}{\partial Y} + \frac{\gamma_0}{K_h^2\varepsilon}\right) \tag{4.10}$$

其右端出现了包含γ_0的项$-2kl\frac{\gamma_0}{K_h^2\varepsilon}$，这意味着由于$\gamma$参数的作用，导式Rossby波($k$, l同号，槽线呈西北—东南走向)，l^2要减小或y方向波要拉长，促进了Rossby波的增长；而曳式Rossby波（k, l异号，槽线呈东北—西南走向），l^2要增大或y方向波要收缩，促进了Rossby波的衰减。由于γ参数在较高纬地区（急流以北地区）的作用更明显，而那里导式Rossby波是衰减的，曳式Rossby波是增长的，因此，γ参数的作用减缓了Rossby波的增长或衰减。

注意$\frac{D_g k}{DT}=0$，因而

$$\frac{D_g K_h^2}{DT}=-\frac{D_g l^2}{DT}=-2kl\left(\frac{\partial\bar{u}}{\partial Y}-\frac{1}{K_h^2}\frac{\partial B_0}{\partial Y}+\frac{\gamma_0}{K_h^2\varepsilon}\right) \tag{4.11}$$

所以，全水平波数K_h演变与l的演变结论一致。

由于正压Rossby波等位相线（槽脊线）的斜率（它与x轴夹角α的正切）为

$$\tan\alpha\equiv\left(\frac{dy}{dx}\right)_{\theta=\text{常数}}=-\frac{\partial\theta/\partial x}{\partial\theta/\partial y}=-\frac{k}{l} \tag{4.12}$$

则由(4.8)式的第三式得到

$$D_g\frac{\tan\alpha}{DT}=\frac{D_g\left(-\frac{k}{l}\right)}{DT}=\frac{k}{l^2}\frac{D_g l}{DT}=-\frac{k^2}{l^2}\left(\frac{\partial\bar{u}}{\partial Y}-\frac{1}{K_h^2}\frac{\partial B_0}{\partial Y}+\frac{\gamma_0}{K_h^2\varepsilon}\right) \tag{4.13}$$

其右端出现了包含γ_0的项$-\frac{k^2}{l^2}\frac{\gamma_0}{K_h^2\varepsilon}$，它使得$\frac{D_g\tan\alpha}{DT}<0$，但导式Rossby波，$\tan\alpha<0$；曳式Rossby波，$\tan\alpha>0$；因而，$\gamma$参数的作用使得导式Rossby波槽脊线日益接近南北走向，而曳式Rossby波的槽脊线日益接近东西走向。上述槽脊线的演变使得$k\to0$或$l\to0$，同样都减缓了Rossby波的演变。

五、结　论

本文考虑了Rossby参数β随纬度的变化，引进了γ参数，并从相速度、稳定度和波的结构等诸方面分析了γ参数对Rossby波的作用，主要结论有：

1. γ参数主要在较高纬地区起作用，它可以形成纯γ参数引起的Rossby波，在通常的情况下，考虑β的变化后，使Rossby波向东移动的速度增加；

2. γ参数使Rossby波正压不稳定的必要条件改为$\beta_0-\gamma_0 y-\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial y^2}$在$(y_1, y_2)$内改变符号，这样，尽管$\bar{u}$是$y$的线性函数（在急流一侧通常是这样），但仍可出现不稳定，不过，一般情况下，γ参数起稳定的作用。

3. 通过急流以北导式Rossby波的经向拉长（曳式收缩）和槽脊线趋于南北走向（曳式趋于东西走向），γ参数减缓导式Rossby波的衰减（减缓曳式波的增长）。

附　录

一、可化为Bessel方程的方程

$$z^2w''+(1-2a)zw'+[(\beta\gamma z)^2+(a^2-\nu^2\gamma^2)]w=0 \tag{A1.1}$$

的解为

$$w = z^{\alpha} Z_{\nu}(\beta z^{\gamma}) \tag{A1.2}$$

其中 Z_{ν}表ν阶 Bessel 函数。

二、超越方程

$$J_{\nu}(c)Y_{\nu}(kc) - J_{\nu}(kc)Y_{\nu}(c) = 0 \quad (k>1) \tag{A2.1}$$

的根c可以表为

$$c_n^{(\nu)} = \beta + \frac{p}{\beta} + \frac{q-p^2}{\beta^3} + \frac{r-4pq+2p^3}{\beta^5} + \cdots \tag{A2.2}$$

其中n表根的数目，而

$$\left.\begin{aligned} &\beta = \frac{n\pi}{k-1}, \quad p = \frac{\mu-1}{8k}, \quad q = \frac{4(\mu-1)(\mu-25)(k^3-1)}{3(8k)^3(k-1)} \\ &r = \frac{32(\mu-1)(\mu^2-114\mu+1073)(k^5-1)}{5(8k)^5(k-1)}, \quad \mu = 4\nu^2 \end{aligned}\right\} \tag{A2.3}$$

当n较大，$k \doteq 1$和ν较小时，级数(A2.2)收敛较快。

三、Laplace方程

$$(a_0x+b_0)y'' + (a_1x+b_1)y' + (a_2x+b_2)y = 0 \tag{A3.1}$$

通过变换

$$y = \exp[px], \quad x = \lambda\xi + \mu, \quad (\lambda \neq 0) \tag{A3.2}$$

可以化为

$$(\alpha_0\xi+\beta_0)\frac{d^2z}{d\xi^2} + (\alpha_1\xi+\beta_1)\frac{dz}{d\xi} + (\alpha_2\xi+\beta_2)z = 0 \tag{A3.3}$$

其中

$$\alpha_0 = \frac{a_0}{\lambda}, \quad \alpha_1 = \frac{dA}{dp}, \quad \alpha_2 = \lambda A, \quad \beta_0 = \frac{a_0\mu+b_0}{\lambda^2},$$

$$\beta_1 = \frac{\mu\dfrac{dA}{dp} + \dfrac{dB}{dp}}{\lambda}, \quad \beta_2 = \mu A + B \tag{A3.4}$$

而

$$A(p) = a_0p^2 + a_1p + a_2, \qquad B(p) = b_0p^2 + b_1p + b_2 \tag{A3.5}$$

若我们选p，λ，μ使得

$$a_0\mu + b_0 = 0, \quad a_0 + \lambda\frac{dA}{dp} = 0, \quad A = 0 \tag{A3.6}$$

则有

$$\beta_0 = 0, \quad \alpha_1 = -\alpha_0, \quad \alpha_2 = 0 \tag{A3.7}$$

这样，方程(A3.3)化为下列Kummer方程

$$\xi\frac{d^2z}{d\xi^2} + (\gamma-\xi)\frac{dz}{d\xi} - \alpha z = 0 \tag{A3.8}$$

其中

$$\alpha = \frac{B(p)}{A(p)}, \qquad \gamma = \frac{a_0b_1 - a_1b_0}{a_0^2} \tag{A3.9}$$

参 考 文 献

[1] Charney, J. G., The dynamics of long waves in a baroclinic westerly current, *J. Met.*, 4 (1947), 135—163.

[2] Gambo, K., The criteria for stability of the westerlies, *Geophysical Notes*, 3 (1950), 29—34.

[3] Kuo, H. L., Dynamic instability of two-dimensional nondivergent flow in a barotropic atmosphere, *J. Met.*, 6 (1949), 105—122.

[4] Phillips, N. A., Elementary Rossby wave, *Tellus*, 17 (1965), 295—301.

[5] Rossby, C. G., Relations between variations in the intensity of the zonal circulation of the atmosphere and the displacements of the semi-permanent centers of action, *J. Marine Res.*, 2 (1939), 38—55.

[6] Zeng, Q. C., The evolution of a Rossby packet wave in a three-dimensional baroclinic atmosphere, *J. Atmos. Sci.*, 40 (1983), 73—84.

Rossby Waves with the Change of β

Liu Shi-kuo

(Dept. of Geophsics, Peking University, Beijing)

Tan Ben-kui

(Dept. of Atmospheric Sciences, Nanjing University, Nanjing)

Abstract

In this paper, the change of the Rossby parameter β with latitude is considered and the parameter $\gamma=\frac{d\beta}{dy}=-\frac{2\Omega\sin\varphi}{a^2}$ is introduced and the β-plane approximamation is extended into $f=f_0+\beta_0 y-\gamma_0 y^2/2$ which includes the parameter γ. Such approximation closes further to practice especially in the high latitude regions.

We give emphasis to the research of the effect of the parameter γ on the Rossby waves. It is seen that the effect of the parameter γ is remarkable in the high-latitude regions. It can produce the Rossby waves caused by the pure parameter γ. And the phase speed formula of Rossby waves with the change of β is generally given, which is degenerated into the well-known Rossby formula when $\gamma_0=0$. The researches also point out that when the change of β is regarded, even if the basic current $\bar{u}$ is a linear function of y the unstable modes can also take place. However, the parameter γ usually plays a stable part in the Rossby waves and it does affect the longitudinal scale and the structure of constant phase lines (trough-ridge lines) of Rossby waves and slow down the growing or decaying of Rossby waves.

Key words Rossby waves, Rossby parameter, the parameter γ