应用数学和力学，第 13 卷第 1 期（1992年 1 月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

一类非线性离散系统的指数二分性及其在数值分析和计算中的应用*

张 伟 江

（上海交通大学应用数学系，1990年8月20日收到）

摘　要

本文中我们考虑一类二阶非线性常微分方程的边值问题的迎风差分格式．我们运用奇异摄动方法构造了该迎风差分方程解的渐近近似，并利用指数二分性理论证明了有一个低阶方程其解是该迎风方程式的在边界外的一个良好近似．我们还构造了校正项，使校正项与低阶方程的解之和是一个渐近近似．最后一些数值例子用于显示本文方法的应用．

关键词　非线性差分方程　奇异摄动　指数二分性

一、引　言

我们考虑形成如下的奇异摄动差分边界问题：

$$0=\beta(x_k)+\frac{1}{h}[f(u_{k+1})-f(u_k)]$$

$$+\varepsilon\frac{1}{h^2}[g(u_{k+1})-2g(u_k)+g(u_{k-1})]$$

$$(k=1,\cdots,n;\ 0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_0;\ u_0=\alpha;\ u_{n+1}=\beta) \tag{1.1}$$

它们是以下一类非线性二阶常微分方程边值问题的迎风差分近似：

$$\varepsilon g(u)_{xx}+f(u)_x+\beta(x)=0,\ u(0)=\alpha,\ u(1)=\beta$$

$$(x\in[0,1],\ 0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_0) \tag{1.2}$$

该类方程出现在弱交联振盪器链中锁相解的研究之中[1]．

近年来，奇异摄动问题的数值分析是一个很活跃的领域，特别在流体力学、电力网络，数学生物，化学反应及控制理论之中．因为这一类奇异摄动问题显示出一个“刚性”现象，而经典的数值方法会引发出严重的问题，故所以对此类问题提出适宜的数值方法是很重要的．至今已有许多文献讨论了这类问题[2~5]，但是主要是涉及线性情况．对非线性方程而言，迎风格式(1.1)就是所采用的一种差分格式，其中一阶导数由其单边差分、二阶导数由其中心差分来替代．作为(1.2)的迎风差分格式(1.1)在边界层外部的解是(1.2)解的良好的近似．

* 苏煜城推荐．国自然科学基金资助项目，获国家教委优秀年轻教师基金资助．

在[6]中，对$g(u)=u$，$\beta=\beta(x,u)$的情况提出了单调差分格式，这些差分格式是非线性差分方程。

因此，求解这样的离散差分方程也是很重要的工作。在文献[7]中Reinhardt运用形式近似和校正项提出了线性奇异摄动差分方程的数值处理方法。而如[6]，对非线性差分方程，我们只能采用迭代的方法。在本文中，我们将利用奇异摄动技巧构造出二个低阶的差分方程并使该二方程解的和是(1.1)解的渐近近似。在这样的处理中，主要的困难是证明一个被称为外解的低阶方程的解在边界层外区是一致近似于(1.1)的解。为此，我们运用了指数二分性理论。这一主意来源于[8]中指数二分性在研究多重交联振盪器链的应用。本文所提出的方法可用于高阶非线性奇异摄动差分方程。

在[1]中，N. Kopell和G. B. Ermentrout证明了如下命题，它可用于确定奇异摄动问题(1.2)的解的边界层的位置。

命题1.1 假设有一个区间J，其内

$$g'(u)>0,\ f''(u)\neq 0 \qquad (\text{对所有}u\in J)$$

并且在J中有唯一的$u=u_t$，位于α与β之间，使$f'(u_t)=0$

为确定起见，又假设在$u=0$附近$f''<0$，$Q=f(\alpha)-f(\beta)-\int_0^1\beta(s)ds>0$（或$<0$）。让$U(x)$是以下方程

$$\begin{aligned}&0=\beta(x)+f(U)_x \\ &U(1)=\beta<x_t(\text{或}U(0)=\alpha>u_t)\end{aligned} \tag{1.3}$$

的解，并且J包含了U的整个值域。

如果对任何x，$0\leqslant x\leqslant 1$；$U(x)\neq u_t$，那末对充分小的ε，(1.2)有唯一的（形式）解，该解在左边界点（或右边界点）附近有一个边界层。（如果$f''>0$，$Q<0$（或>0），那末有类似的结论，此时$U(1)=\beta$(或$U(0)=\alpha$)）。

以下，我们假设f, g和$\beta(x)$满足某些条件，使(1.1)的解具有左边界层。对右边界层的情况，我们可以运用类似的方法而得到相似的结论。

本文各段安排如下：

在第二节中，我们构造了一个低阶差分方程，并利用离散系统指数二分性理论证明了该低阶差分方程的解v_k是(1.1)解的渐近近似，即它们在边界层外区可以一致接近。

第三节构造了校正项w_k，它使得v_k+w_k是u_k的渐近近似。通过给低阶方程解加上个校正项，我们可以得到各种渐近近似。这里主要是将[7]的构造法推广到非线性的情况。

最后一节里，我们举了两个例子予以说明。

二、降阶方程及其外解

降阶方程是

$$0=\beta_k+\frac{1}{h}[f(v_{k+1})-f(v_k)] \qquad (k=0,\ \cdots,\ n;\ v_{n+1}=\beta) \tag{2.1}$$

本节中我们要证明其解v_k是一致近似于u_k($k=1$, $\cdots$, $n+1$)。这也就是说，在边界层之外，v_k是u_k的一个良好的近似。首先，让$\eta_k=u_k-v_k$，我们将导出η_k所满足的离散方程。继后，运用离散系统的指数二分性（[9]）来证明该差是一致逼近于零的。这个结论将是以下将

证明的一个定理的直接结果。

让 $\beta_k h=\omega_{k+1}-\omega_k$，那末一定存在某常数$\Omega$，使得

$$\Omega=\omega_k+f(v_k) \qquad (k=0,\ \cdots,\ n;\ v_{n+1}=\beta) \tag{2.2}$$

可见，如果v_k位于某一个区域，其内$f(u)$是单调，即可逆的，那末(2.2)的解v_k存在。

类似地，对此Ω，我们可以有

$$\Omega=\omega_k+f(u_k)+\frac{\varepsilon}{h}[g(u_k)-g(u_{k-1})]$$
$$(k=1,\ \cdots,\ n;\ u_0=\alpha;\ u_{n+1}=\beta) \tag{2.3}$$

运用Taylor展式，(2.2)和(2.3)可改写为

$$0=\left[f'(v_{k+1})+\frac{\varepsilon}{h}g'(v_{k+1})\right](u_{k+1}-v_{k+1})$$
$$-\frac{\varepsilon}{h}g'(v_{k+1})(u_k-v_k)+o(u_{k+1}-v_{k+1})$$
$$+o(u_k-v_k)+\frac{\varepsilon}{h}O(v_k-v_{k+1}) \tag{2.4}$$

注意到，其中凡是涉及v_k-v_{k+1}的项都是$O(h)$，我们又有

$$\eta_{k+1}=A_k\eta_k+H(\eta_{k+1},\eta_k)+O(\varepsilon) \tag{2.5}$$

其中 $A_k=\frac{\varepsilon}{h}g'(v_{k+1})\Big/\left[f'(v_{k+1})+\frac{\varepsilon}{h}g'(v_{k+1})\right]$,$H$是其变量二阶或更高阶项的函数，$k=1,\ \cdots,\ n$。

很清楚的是，如果对所有$u\in J$，$f'(u)\neq 0$，那末A_k的绝对值不等于1。由此，我们将证明(1.1)的解u_k存在且可任意逼近(2.2)的解v_k，其中$v_k\in J$，其内f单调。为确定起见，我们设$f'>0$，$u\in J$。上述期望的结论来于离散系统指数二分性理论。对某一个线性差分方程：

$$y_{k+1}=M_k y_k \tag{2.6}$$

让

$$\begin{aligned} t(k,l)&=M_{k-1}\cdots M_l && (\text{若 } k>l)\\ &=I && (\text{若 } k=l)\\ &=M_k^{-1}\cdots M_{l-1}^{-1} && (\text{若 } k<l)\end{aligned}$$

为其转移矩阵。我们说(2.6)在自然数集Z上有一个指数二分性，是指如果存在正数k，σ和一簇投影P_k，$k\in Z$，

(a) $\qquad P_{k+1}\cdot M_k=M_kP_k \qquad (k\in Z)$

(b) $\qquad |t(k,l)P_l|\leqslant k\exp[-\sigma(k-l)] \qquad (\text{若}l\leqslant k)$

$\qquad\quad |t(k,l)(I-P_l)|\leqslant k\exp[-\sigma(l-k)] \qquad (\text{若}l\geqslant k)$

这表明存在一簇投影，它们可与方程(2.6)算子交换。该投影是有界的，且(2.6)的位于$\{P_k\}$区域内的解是指数型衰减的，而位于$\{P_k\}$零空间中的解是指数型递增的。K. J. Palmer([8])给出了以下一些结果：

引理2.1 假设$M_k\equiv M$是一个常数矩阵，那末(2.6)在Z上有一个指数二分性的充要条件是M没有模为1的特征值。

引理2.2 具有指数二分性的系统的小摄动仍然具有指数二分性。即，如果$M_k=M+D_k$，而$\|D_k\|$关于k是一致地充分小，那末$y_{k+1}=My_k$有一个指数二分性也就意味着(2.6)在Z上也有指数二分性。(对D_k的精确估计及M_k的指数二分性常数计算，可见[9])。

以下，我们将证明类如(2.5)的隐式差分方程的有界解的存在性．该过程类似于[9]中的证明．

定理2.1　设$\{M_k\}$是一个$n\times n$阶可逆矩阵序列，$k\in Z$．又设线性差分方程(2.6)在Z上具有指数二分性，其相应的常数是k，σ而投影为P_k

又设，对每个$k\in Z$，H是其变量二阶或更高阶项的函数，$\{r_k\}$是一个有界序列．那末具有以下形式的隐式非线性差分方程

$$y_{k+1}=M_k y_k+H(y_{k+1},y_k)+\varepsilon r_k \tag{2.7}$$

有唯一解$\{y_k\}$，$k\in Z$，且对究分小的ε，

$$|y_k|\leqslant\varepsilon 2k(1+e^{-\sigma})(1-e^{-\sigma})^{-1}\sup_{k\in Z}|r_k|.$$

证明　根据H的性质，我们可选取如此小的函数d，使得当$|\mu_i|$，$|\nu_i|\leqslant d(i=1,2)$时

$$\|H(\mu_1,\nu_1)-H(\mu_2,\nu_2)\|\leqslant\gamma(\|\mu_1-\mu_2\|+\|\nu_1-\nu_2\|)$$

其中　γ为满足$4k(1+e^{-\sigma})(1-e^{-\sigma})^{-1}\gamma\leqslant 1$的一个常数．

用B表示有界序列$u=\{u_k\}_{k\in Z}$的Banach 空间，其范数定义为$\|u\|=\sup_{k\in Z}|u_k|$，于是

$$D=\{u\in B:\ \|u\|\leqslant d\}$$

是B的一个闭子集，从而是一个完备的度量空间．

我们定义一个从D到自身的映射：

$$T:\qquad U_{k+1}=M_k U_k+[H(u_{k+1},u_k)+\varepsilon r_k]$$

该非齐次方程具有唯一的有界解$\{U_k\}$([9])且对充分小的ε和所有的k有

$$\begin{aligned}|U_k|&\leqslant k(1+e^{-\sigma})(1-e^{-\sigma})^{-1}\sup_{k\in Z}|H(u_{k+1},u_k)+\varepsilon r_k|\\&\leqslant k(1+e^{-\sigma})(1-e^{-\sigma})^{-1}[2\gamma\|u\|+\varepsilon\|r\|]\\&\leqslant d/2+\|u\|/2\quad\leqslant d\end{aligned}$$

因此，映射T：$u\to U$将D映射至D．

接着，我们将证明映射T是个压缩映射．假设u_1，$u_2\in D$，而U_1，U_2分别是它们的象．那末$W_k=U_{1,k}-U_{2,k}$是以下方程的有界解：

$$W_{k+1}=M_k W_k+[H(u_{1,k+1},u_{1,k})-H(u_{2,k+1},u_{2,k})]$$

于是

$$\begin{aligned}\|U_1-U_2\|&\leqslant k(1+e^{-\sigma})(1-e^{-\sigma})^{-1}2\gamma\|u_1-u_2\|\\&\leqslant\frac{1}{2}\|u_1-u_2\|.\end{aligned}$$

以上一些结论指出，映射T有一个唯一的不动点u，即$\{u_k\}$是(2.7)的解，且

$$\|u\|\leqslant\frac{1}{2}\|u\|+\varepsilon k(1+e^{-\sigma})(1-e^{-\sigma})^{-1}\|r\|.$$

故所以

$$\|u\|\leqslant\varepsilon 2k(1+e^{-\sigma})(1-e^{-\sigma})^{-1}\sup_{k\in Z}|r_k|$$

本定理证毕．

定理2.1可以用于定义在所有$k\in Z$的差分方程而我们所考虑的系统(2.5)却只定义在$1\leqslant k\leqslant n$．因此，我们必须对(2.5)作适当的推广，使之能运用指数二分性理论．我们注意到，如果ω_k是常数，那么每个外解v_k也是一个常数，从而(2.5)中的A_k在v_{k+1}的线性化结果也是一个常数．于是，为了将(2.5)延拓为一个无穷的系统，我们可以定义$\beta_k=0$，$k\leqslant 0$ 或 $k\geqslant n+1$．由引理2.1和引理2.2，如果ω_k充分接近于一个常数，那末被适当延拓的系统(2.5)具

有一个指数二分性。这样，我们就有

定理2.2 假设如上，那么方程(1.1)有唯一解且任意逼近于(2.1)的解，即在h充分小时，

$$|u_k-v_k|=O(\varepsilon) \qquad (k=1,\ \cdots,\ n)$$

三、校正项和渐近近似

在上一节中，我们证明了低阶方程(2.1)的解v_k是方程(1.1)的解u_k的一个良好的近似，其中$k=1$，…，$n+1$。即，所有的误差$e_k=u_k-v_k(k=1,\ \cdots,\ n+1)$都为$O(\varepsilon)$。同连续型函数的情形相似，如果$v_0=\alpha$，那末就无边界层出现，而(1.1)可以称为正则的。否则，若$v_0\neq\alpha$，我们就称解$\{u_k\}$在$k=0$处呈现一个边界层，$\alpha-v_0$被称为边界层跳跃。一般说来$v_0\neq\alpha$.此时，我们应该寻找校正项，使得降阶方程(2.1)的解加上校正项后是u_k的渐近近似。当然有许多途径来构造校正项。最简单的校正项是$w=(\alpha-u_0,\ 0,\ \cdots,\ 0)$，这是因为$w_0+u_0=\alpha$，$w_k+v_k=v_k=u_k+O(\varepsilon)(k=1,\ \cdots,\ n+1)$，即，$\{v_k+w_k\}$是$\{u_k\}$的一个渐近近似。在这一节中，我们将构造另一种校正项，它是[7]中构造法在非线性问题(1.1)中的推广。

假设边界层出现在$k=0$处，又设存在一个数h_0，使得$0<h<h_0$时，$|u_k-v_k|\leqslant c\varepsilon$ 其中c与h和ε无关。(h_0可以由引理2.2，即将指数二分性可扰动定理来确定)

与[7]相似，我们设

$$w_k=\varepsilon^k\cdot\rho_k \qquad (k=0,\ 1,\ \cdots,\ n+1) \tag{3.1}$$

首先，我们希望计算与ε无关的ρ_k，使得$\{w_k\}$是(2.1)解$\{v_k\}$的校正项。将(3.1)代入(1.1)，我们有

$$-\beta_k h=\left(F_{k+1}+\frac{\varepsilon}{h}G_{k+1}\right)\varepsilon^{k+1}\rho_{k+1}-\left(F_{k+1}+\frac{\varepsilon}{h}G_{k+1}+\frac{\varepsilon}{h}G_k\right)$$

$$\cdot\varepsilon^k\rho_k+\frac{\varepsilon}{h}G_k\varepsilon^{k-1}\rho_{k-1} \tag{3.2}$$

其中
$$F_k=[f(u_k)-f(u_{k-1})]/(u_k-u_{k-1})$$
$$G_k=[g(u_k)-g(u_{k-1})]/(u_k-u_{k-1})$$

这个表达式提示我们研究以下方程

$$0=-F\rho_k+\frac{1}{h}G\rho_{k-1} \qquad (k=1,\ \cdots,\ n+1) \tag{3.3}$$

其中 ρ_0是一个待定参数，将由边界条件来确定。

$F=f'(0)$，$G=g'(0)$

由递推式

$$\rho_k=\frac{\rho_0}{k^k}\left(\frac{G}{F}\right)^k \qquad (k=0\ \ \cdots,\ n+1)$$

而ρ_0将在使$\{v_k+w_k\}$为渐近近似而确定。

定理3.1 假设如上，并设$0<m\leqslant|f'(u)|$，$|g'(u)|\leqslant M$，$u\in J$。那么$\{v_k+w_k\}$是$\{u_k\}$的一个渐近近似($k=0$，1，…，$n+1$)。其误差满足下列不等式

$$|u_k-(v_k+w_k)|\leqslant L\cdot\varepsilon^{1-\frac{1}{q}},$$

其中 $q>1$，L是一个与ε和h无关的常数。$\rho_0=\alpha-v_0$。

证明 首先，我们有：

当$k=0$时，$u_0-(v_0+w_0)=(\alpha-v_0)-\rho_0=0$

当$k=n+1$时，$u_{n+1}-(v_{n+1}+w_{n+1})=\beta-(\beta+\varepsilon^{n+1}\rho_{n+1})=-\varepsilon^{n+1}\rho_{n+1}$，一般说来，我们有

$$|\rho_k|\leqslant|\rho_0|\left(\frac{M}{hm}\right)^k \qquad (k=0,\ \cdots,\ n+1)$$

因此，倘若让 $0<\varepsilon<\varepsilon_0$，其中 $\varepsilon_0=\left(\frac{m}{M}h\right)^q<1$，其中$q>1$，那么我们有

$$\begin{aligned}|u_k-(v_k+w_k)|&\leqslant|u_k-v_k|+|w_k|\\&\leqslant c\cdot\varepsilon+\varepsilon^k\cdot|\rho_0|\cdot\left(\frac{M}{hm}\right)^k\\&\leqslant\varepsilon^{1-\frac{1}{q}}\cdot(c+|\rho_0|)\end{aligned}$$

$$(k=1,\ \cdots,\ n)$$

定理证毕。

四、例　子

我们将考虑两个例子，并运用第二，第三节提出的方法计算其渐近近似。为比较，又计算了迭代解$\bar{u}_{k,n}$

我们首先研究

$$\varepsilon u''+e^u u'-\sin\frac{\pi x}{2}=0,\ u(0)=0,\ u(1)=0 \tag{4.1}$$

利用渐近匹配方法，其渐近解是

$$u=Ln\left(1-\frac{2}{\pi}\cos\frac{\pi x}{2}\right)-Ln\left(1-\frac{2}{\pi}\exp\left[\left(\frac{2}{\pi}-1\right)x/\varepsilon\right]\right)+O(\varepsilon) \tag{4.2}$$

该解在$x=0$处有一个边界层。

应用第二节和第三节中我们所提出的方法于(1.1)，其中$g(u)=u$，$f(u)=e^u$，$\alpha=\beta=0$。我们就有近似解

$$u_k=v_k+w_k \tag{4.3}$$

其中 v_k是以下低阶差分方程之解：

$$\exp(v_{k+1})-\exp(v_k)-h\sin(x_k\pi/2)=0,\ v_n=0$$

其中 $x_k=k\cdot h$，$h=1/n$ $(k=0,\ \cdots,\ n)$

而 $w_k=\varepsilon^k\rho_k$，其中 $-h\rho_k+\rho_{k-1}=0$，$\rho_0=-v_0$。

表1已显示出在$\varepsilon=0.01$，$h=0.02$时u_k在整个区间$[0,1]$上是u的一个良好近似，即使此时步长h是大于参数ε。

对更一般的奇异摄动差分边界问题

$$0=\beta(x_k,u_k)+\frac{1}{h}[f(u_k+1)-f(u_k)]+\varepsilon\cdot\frac{1}{h^2}[g(u_{k+1})-2g(u_k)+g(u_{k-1})]$$

$$(k=1,\ \cdots,\ n;\ 0<\varepsilon<\varepsilon_0;\ u_0=\alpha\quad u_{n+1}=\beta)$$

我们运用命题1.1和类似的过程来得到近似解。在此，我们将利用例 2 来显示其 近似解和渐近解。

我们考虑的第二个例子是

$$\varepsilon u''+e^{u}u'-\left(\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi x}{2}\right)e^{2u}=0,\quad u(0)=0,\quad u(1)=0 \tag{4.4}$$

对此较一般的方程。我们仍然可以利用第二节，第三节所提出的方法而得到一个良好的近似（请看表2所列），这个非线性方程可见于O′Malley 的文献[10]，在 [2] 中作者曾用变量适定因子法求得了数值解。(4.4)的渐近解是

$$u=-\ln\left(1+\cos\frac{\pi x}{2}\right)-\ln\left(1-\frac{1}{2}\exp(-x/2\varepsilon)\right)+O(\varepsilon)$$

而对(4.4)而言，降阶方程是

$$\exp(v_{k+1})-\exp(v_k)-h\left(\frac{\pi}{2}\sin\left(\frac{\pi x_k}{2}\right)\right)\exp(2v_{k+1})=0$$

$$(v_n=0;\ h=1/n;\ k=n-1,\ \cdots,\ 0)$$

其较正项是$\varepsilon^k\rho_k$，其中ρ_k满足低阶差分方程

$$-h\rho_k+\rho_{k-1}=0,\ \rho_0=-v_0\qquad(k=1,\ \cdots,\ n)$$

表 1 ($\varepsilon=0.01$, $h=0.02$)

x	渐近解$u(x)$	降阶解v_k+w_k	迭代解$\tilde{u}_{k,n}$
0	0.54597×10^{-11}	0	0
0.1	-0.96836	-0.96836	-0.90419
0.2	-0.93003	-0.91255	-0.89991
0.3	-0.83755	-0.82491	-0.82241
0.4	-0.72368	-0.71513	-0.71736
0.5	-0.59812	-0.59275	-0.59682
0.6	-0.46871	-0.46562	-0.46976
0.7	-0.34111	-0.33955	-0.34287
0.8	-0.21906	-0.21843	-0.22063
0.9	-0.10490	-0.10476	-0.10581
1.0	0.73874×10^{-7}	0	0

表 2 ($\varepsilon=0.01$, $h=0.02$)

x	渐近解$u(x)$	降阶解v_k+w_k	迭代解$\tilde{u}_{k,n}$
0	-0.28994×10^{-7}	0	0
0.1	-0.68360	-0.68937	-0.63861
0.2	-0.66835	-0.67194	-0.63861
0.3	-0.63710	-0.64185	-0.61070
0.4	-0.59280	-0.59851	-0.56922
0.5	-0.53480	-0.54129	-0.51406
0.6	-0.46234	-0.46925	-0.44457
0.7	-0.37431	-0.38113	-0.35982
0.8	-0.26927	-0.27523	-0.25860
0.9	-0.14534	-0.14926	-0.13934
1.0	0.1160×10^{-6}	0	0

致谢 在此对 N. Kopell教授的建议和指导表示衷心的感谢。并对王长宁同志为本文例题的牛顿迭代解提供了结果表示感谢。

参 考 文 献

[1] Kopell, N. and G. B. Ermentrout, Symmetry and phase-locking in chains of weakly coupled oscillators, *Comm. Pure and Appl. Math.*, 39 (1986), 623—660.

[2] Dollan, E. P. and J. J. H. Miller, W. H. A. Schilders, *Uniform Numerical Methods for Problems with Initial and Boundary Layers*, Boole Press, Dublin (1980).

[3] Miller, J. J. H. (Ed.), *An Introduction to Computational and Asymptotic Methods for Boundary and Interior Layers*, Boole Press, Dublin (1982).

[4] Kreiss, B. and H-O. Kreiss, Numerical methods for singular perturbation problems, *SIAM J. Numer. Anal.*, 18 (1981), 262—276.

[5] 苏煜城、吴启光，椭圆-双抛物偏微分方程奇异摄动问题的差分解法，应用数学和力学，1(2)(1980)，167—176.

[6] Abrahamsson, L. and S. Osher, Monotone difference schemes for singular perturbation problems, *SIAM J. Numer. Anal.*, 19 (1982), 979—992.

[7] Reinhardt, H. J., Singular pertrbation of difference methods for linear ordinary differential equations, *Applied Analysis*, 10 (1980), 53—70.

[8] Kopell, N., W. Zhang and G. B. Ermentrout, Multiple coupling in chains of oscillators, *SIAM J. Math. Anal.*, (4)(1990).

[9] Palmer, K. J., Exponential dichotomies, the shadowing lemma and transversal homoclinic points, *Dynamical Reported*, 1 (1988), 265—306.

[10] O'Malley, R. E., Jr., *An Introduction to Singular Perturbations*, Academic Press, New York (1974).

Exponential Dichotomies of Nonlinear Discrete Systems and Its Application to Numerical Analysis and Computation

Zhang Wei-jiang

(Dept. of Applied Mathematics, Shanghai Jiaotong University, Shangai)

Abstract

In this paper we consider the upwind difference scheme of a kind of boundary value problems for nonlinear, second order ordinary differential equations. Singular perturbation method is applied to construct the asymptotic approximation of the solution to the upwind difference equation. Using the theory of exponential dichotomies we show that the solution of an order-reduced equation is a good approximation of the solution to the upwind difference equation except near boundaries. We construct correctors which yield asymptotic approximations by adding them to the solution of the order-reduced equation. Finally, some numerical examples are illustrated.

Key words nonlinear difference equation, singular perturbation, exponential dichotomy