一类扩张了的软弹簧型Duffing方程的紊动性态*

程福德

（上海师范大学数学系，1990年10月4日收到）

摘要

本文用Melnikov函数方法讨论了一类扩张了的软弹簧型Duffing方程[1]

$$\ddot{x}+Af(\dot{x},x)+x-x^{2k+1}=r[M(x,\dot{x})\cos\omega t+N(x,\dot{x})\sin\omega t] \qquad (k=1,2,3,\cdots)$$

在周期激励下的紊动现象．给出了出现二阶同宿切的条件．文中所采用的方法对于不能给出并宿轨道的显式的系统的研究是非常有用的．

关键词 混沌 分岔 同宿轨道 异宿轨道 简单零点 Melnikov函数

对于Hamilton系统在周期激励下出现紊动分岔、次谐波[10]的现象，许多科学工作者都作了大量的研究[2][3][4][5]，特别是近10年以来，以P. Holmes为代表的一批科学工作者，运用Melnikov 60年代创立的Melnikov函数方法使其达到了一个新的高度[6][7][8][9][11]．作者判断紊动和分岔产生的条件是通过求出Hamilton或非Hamilton系统的同宿或异宿轨道的显式代入Melnikov函数积分得到的．其间碰到两大困难：1．求同宿轨道的显式$x=x(t)$，$y=y(t)$．2．特殊函数的积分．

考虑系统

$$\ddot{x}+Af(\dot{x},x)+x-x^{2k+1}=r[M(x,\dot{x})\cos\omega t+N(x,\dot{x})\sin\omega t] \tag{1}$$

其中$f(x,y)$，$M(x,y)$，$N(x,y)\in C^2$，$\omega\neq 0$，$r\neq 0$且对满足方程

$$\frac{y^2}{2}+\frac{x^2}{2}-\frac{x^{2k+2}}{2(k+1)}=\frac{k}{2(k+1)}$$

的(x,y)，$M(x,y)$与$N(x,y)$不同时恒为零．A，r是小参数，ω为振动频率．k为任意取定的自然数．

令 $\dot{x}=y$，$A=\varepsilon a$，$r=\varepsilon R$ $\quad(0<\varepsilon\ll 1)$

于是系统(1)化为：

$$\dot{x}=y,\dot{y}=-x+x^{2k+1}+\varepsilon\{-af(x,y)+R[M(x,y)\cos\omega t+N(x,y)\sin\omega t]\} \tag{2}$$

(2)的未摄系统

* 许政范推荐．
1989年5月4日第一次收到．

$$\dot{x}=y,\ \dot{y}=-x+x^{2k+1} \tag{3}$$

显然有不动点$O_k(0,0)$，$A_k(1,0)$，$B_k(-1,0)$，且容易验证系统(2)为Hamilton 系统

$$H_{k0}(x,y)=y^2/2+x^2/2-x^{2k+2}/2(k+1) \tag{4}$$

$O_k(0,0)$为中心，$A_k(1,0)$，$B_k(-1,0)$为鞍点，连接$A_k(1,0)$，$B_k(-1,0)$的鞍连线为

$$H_{k0}(x,y)=y^2/2+x^2/2-x^{2k+2}/2(k+1)=k/2(k+1) \tag{5}$$

容易验证(2)满足使用 Melnikov 函数所要求的条件[7]。

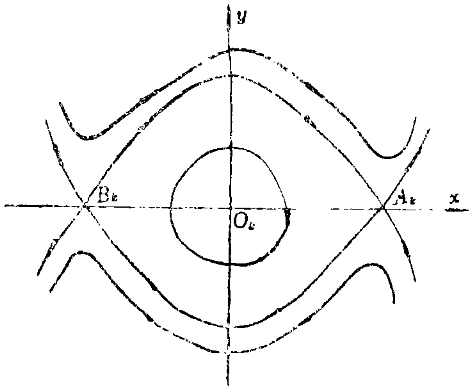

图 1

轨线在(x,y)平面的分布图形如图1。设以$(x_k^+(t),\ y_k^+(t))$，$(x_k^-(t),\ y_k^-(t))$分别表示x轴上方和下方的鞍连线，那么可得Melnikov函数为：

$$\begin{aligned}M_k^{\pm}(t_0)&=\int_{-\infty}^{\infty}y_k^{\pm}(t)\{-af(x_k^{\pm}(t),\ y_k^{\pm}(t))+R[M(x_k^{\pm}(t),\ y_k^{\pm}(t))\cos\omega(t+t_0)\\&\quad+N(x_k^{\pm}(t),\ y_k^{\pm}(t))\sin\omega(t+t_0)]\}dt\\&=-aH_{k0}^{\pm}+R[H_{k1}^{\pm}(\omega)\cos\omega t_0+H_{k2}^{\pm}(\omega)\sin\omega t_0]\\&=-aH_{k0}^{\pm}+R\sqrt{(H_{k1}^{\pm}(\omega))^2+(H_{k2}^{\pm}(\omega))^2}\sin(\omega t_0+O_k^{\pm})\end{aligned} \tag{6}$$

其中：

$$H_{k0}^{\pm}=\int_{-\infty}^{\infty}y_k^{\pm}(t)f(x_k^{\pm}(t),\ y_k^{\pm}(t))dt \tag{7}$$

$$H_{k1}^{\pm}(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}y_k^{\pm}(t)[M(x_k^{\pm}(t),y_k^{\pm}(t))\cos\omega t+N(x_k^{\pm}(t),y_k^{\pm}(t))\sin\omega t]dt \tag{8}$$

$$H_{k2}^{\pm}(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}y_k^{\pm}(t)[M(x_k^{\pm}(t),\ y_k^{\pm}(t))\sin\omega t+N(x_k^{\pm}(t),\ y_k^{\pm}(t))\cos\omega t]dt \tag{9}$$

$$O_k^{\pm}=\mathrm{arctg}[H_{k1}^{\pm}(\omega)/H_{k2}^{\pm}(\omega)] \tag{10}$$

我们知道对于解析函数$F(t)$，若

$$\int_{-\infty}^{\infty}F(t)e^{i\omega t}dt=0$$

则$F(t)\equiv 0$或对于$\omega\in\Lambda$的可列集Λ成立[9][11]。因为：

$$\begin{aligned}iH_{k1}^{+}(\omega)+H_{k2}^{+}(\omega)&=\int_{-\infty}^{\infty}y_k^{+}(t)[M(x_k^{+}(t),\ y_k^{+}(t))ie^{i\omega t}+N(x_k^{+}(t),y_k^{+}(t))e^{i\omega t}]dt\\&=\int_{-\infty}^{\infty}y_k^{+}(t)[iM(x_k^{+}(t),y_k^{+}(t))+N(x_k^{+}(t),y_k^{+}(t))]e^{i\omega t}dt\end{aligned} \tag{11}$$

要求上式为零，要么$y_k^{+}(t)[iM(x_k^{+}(t),\ y_k^{+}(t))+N(x_k^{+}(t),\ y_k^{+}(t))]\equiv 0$或在一可列集$\Lambda_k^{+}$上取值($\omega\in\Lambda_k^{+}$)。因为$y_k^{+}(t)\equiv 0$，或当$(x,y)$在曲线$y^2/2+x^2/2-x^{2k+2}/2(k+1)=k/2(k+1)$上取值时，$M(x,y)$，$N(x,y)$恒为零是与题设矛盾的，即得$iM(x_k^{+}(t),\ y_k^{+}(t))+M(x_k^{+}(t),y_k^{+}(t))\neq 0$，所以$H_{k1}^{+}(\omega)$与$H_{k2}^{+}(\omega)$只有在$\omega\in\Lambda_k^{+}$($\Lambda_k^{+}$为$\omega$的一可列集)时才能同时为零。

同理可得，有一ω的可列集Λ_k^{-}存在，$H_{k1}^{-}(\omega)$与$H_{k2}^{-}(\omega)$只有在$\omega\in\Lambda_k^{-}$时才同时为零。记：

$$\Lambda_k=\Lambda_k^{+}\cup\Lambda_k^{-}$$

于是可得引理：

引理 若$\omega\notin\Lambda_k$，那么对于任意自然数k，$H_{k1}^{\pm}(\omega)$与$H_{k2}^{\pm}(\omega)$对应地不同时为零。

定理 系统(2)对于固定的k，若$\omega\notin\Lambda_k$，那么：

i) 当$aH_{k0}^{+}/R<[(H_{k1}^{+})^2+(H_{k2}^{+})^2]^{\frac{1}{2}}$或$aH_{k0}^{-}/R<[(H_{k1}^{-})^2+(H_{k2}^{-})^2]^{\frac{1}{2}}$时(2)的Melnikov函数$M_k^{\pm}(t_0)$存在简单零点，系统存在紊动解。

ii) 当$aH_{k0}^{+}/R=[(H_{k1}^{+})^2+(H_{k2}^{+})^2]^{\frac{1}{2}}$或$aH_{k0}^{-}/R=[(H_{k1}^{-})^2+(H_{k2}^{-})^2]^{\frac{1}{2}}$时系统(2)的Melnikov函数$M_k^{\pm}(t_0)$存在二阶零点，系统有分叉现象出现，二阶切产生。

iii) 当$aH_{k0}^{+}/R>[(H_{k1}^{+})^2+(H_{k2}^{+})^2]^{\frac{1}{2}}$与$aH_{k0}^{-}/R>[(H_{k1}^{-})^2+(H_{k2}^{-})^2]^{\frac{1}{2}}$同时成立时，系统(2)的Melnikov函数$M_k^{\pm}(t_0)$没有零点，从而系统(2)不存在紊动解。

证明 $$\left|\int_{-\infty}^{\infty}y_k^{+}(t)M(x_k^{+}(t),y_k^{+}(t))\cos\omega t dt\right|\leqslant\int_{-\infty}^{\infty}|y_k^{+}(t)M(x_k^{+}(t),y_k^{+}(t))|dt$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}y_k^{+}(t)|M(x_k^{+}(t),y_k^{+}(t))|dt=\int_{-1}^{1}|M(x,y_k^{+}(x))|dx$$

因为$M(x,y_k^{+}(x))\in C^2$则

$$\int_{-\infty}^{\infty}y_k^{+}(t)M(x_k^{+}(t),y_k^{+}(t))\cos\omega t dt$$

收敛。由此易证$H_{k0}^{\pm}$，$H_{k1}^{\pm}(\omega)$，$H_{k2}^{\pm}(\omega)$收敛。

要$M_k^{\pm}(t_0)=-aH_{k0}^{+}+R[(H_{k1}^{\pm}(\omega))^2+(H_{k2}^{\pm}(\omega))^2]^{\frac{1}{2}}\sin(\omega t_0+O_k^{\pm})=0$，当且仅当对于满足题设的$\omega\in\Lambda_{k1}$有$t_0$使得：

$$\sin(\omega t_0+O_k^{\pm})=aH_{k0}^{\pm}/R[(H_{k1}^{\pm})^2+(H_{k2}^{\pm})^2]^{\frac{1}{2}}$$

i) 当$aH_{k0}^{+}/R<[(H_{k1}^{+})^2+(H_{k2}^{+})^2]^{\frac{1}{2}}$或$aH_{k0}^{-}/R<[(H_{k1}^{-})^2+(H_{k2}^{-})^2]^{\frac{1}{2}}$时，则至少有一$t_0$使$M_k^{+}(t_0)$或$M_k^{-}(t_0)$等于零．且对应的$\sin'(\omega t_0+O_k^{+})=\omega,\cos(\omega t_0+O_k^{\pm})\neq 0$，从而$M_k^{\pm}(t_0)$中至少有一简单零点存在，从而系统(2)存在紊动解．

ii) 当$aH_{k0}^{+}/R=[(H_{k1}^{+})^2+(H_{k2}^{+})^2]^{\frac{1}{2}}$或$aH_{k0}^{-}/R=[(H_{k1}^{-})^2+(H_{k2}^{-})^2]^{\frac{1}{2}}$成立时，那么至少有一$t_0$使$M_k^{+}(t_0)$或$M_k^{-}(t_0)$等于零．且对应的$\sin'(\omega t_0+O_k^{\pm})=\omega\cos(\omega t_0+O_k^{\pm})=0$，$\sin''(\omega t_0+O_k^{\pm})\neq 0$，所以系统的Melnikov函数$M_k^{\pm}(t_0)$存在二阶零点，系统有分岔现象出现，二阶切产生．

iii) 当$aH_{k0}^{+}/R>[(H_{k1}^{+})^2+(H_{k2}^{+})^2]^{\frac{1}{2}}$与$aH_{k0}^{-}/R>[(H_{k1}^{-})^2+(H_{k2}^{-})^2]^{\frac{1}{2}}$同时成立时，则没有$t_0$使$\sin(\omega t_0+O_k^{\pm})=aH_{k0}^{+}/R[(H_{k1}^{\pm})^2+(H_{k2}^{\pm})^2]^{\frac{1}{2}}$成立，即系统的Melnikov函数$M_k^{\pm}(t_0)$没有零点，从而系统(2)不存在紊动解．

推论1 系统(2)对于固定的k，若$\omega\notin\Lambda_k$且$a=0$，那么系统的Melnikov函数$M_k^{\pm}(t_0)$存在简单零点且其一切零点为简单零点，系统存在紊动解．

推论2 当H_{k0}^{+}或H_{k0}^{-}为零时，系统(2)对于固定的k，$\omega\notin\Lambda_k$，那么(2)的Melnikov函数$M_k^{\pm}(t_0)$存在简单零点，且其一切零点为简单零点，系统存在紊动解．

推论3 系统(2)对于固定的k，$\omega\notin\Lambda_k$且$f(x,y)=-f(-x,y)$时，那么(2)的Melnikov函数$M_k^{\pm}(t_0)$存在简单零点，且其一切零点为简单零点，系统存在紊动解．

证明

$$H^{+}_{i0}=\int_{-\infty}^{\infty} y^{+}_{i}(t)f(x^{+}_{i}(t),y^{+}_{i}(t))dt=\int_{0}^{1} f(x,y^{+}_{i}(x))dx+\int_{-1}^{0} f(x,y^{+}_{i}(x))dx$$

$$=\int_{0}^{1} f(x,y^{+}_{i}(x))dx+\int_{1}^{0} f(-x,y^{+}_{i}(-x))d(-x)$$

$$=\int_{0}^{1} f(x,y^{+}_{i}(x))dx-\int_{0}^{1} f(x,y^{+}_{i}(x))dx=0$$

同理可证：$H^{-}_{i0}=0$。

由推论2可得推论3成立。

本文是在导师沈家骐教授的指导下完成的，作者在此表示衷心的感谢！

参 考 文 献

[1] 李继彬，《浑沌与Melnikov方法》，重庆大学出版社（1989）.

[2] 李继彬、刘曾荣，一类二次系统周期扰动的浑沌性质，科学通报，30(7) (1985)，491—495.

[3] 李继彬、区月华，扰动双中心二次系统的全局分岔与浑沌性质，应用数学学报，11(3) (1988)，312.

[4] 李继彬、刘曾荣，几类非线性振动系统的浑沌性质，数学物理学报，11(2) (1985)，195.

[5] 刘曾荣、李继彬、林常，催化反应中的浑沌现象，应用数学和力学，7(1) (1986)，43—49.

[6] Greenie, Bernie and Philp J. Holmes, Repeated resonance and homoclinic bifurcation in a periodically forced family of oscillator, *SIAM. Math. Anal.*, 15(1) (1984), 69—77.

[7] Holmes, Philp J., Averaging and chaotic motion in forced oscillations, *SIAM J. Appl. Math.*, 38(1) (1980).

[8] Sander, Jan A., Melnikov's method and averaging, *The* 1981 *Oberwolfach Conference on Mathematics*, D. Reided Publishing Co., Dordrecht, Holland and Boston, U. S. A. (1982), 171—181.

[9] Kopel, Nancy and B. Robert, Chaotic motion in the two-degree-of-freedom swing equations, *IEEE Transaction on System*, CAS-29(11) (1982), 738—746.

[10] Guckenheimer, John and Philp J. Holmes, *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcations of Vector Fields*, New York, Berlin, Heidelberg, Tokyo (1984).

[11] Salam, Fathi M., The Melnikov technique for highly dissipative systems, *SIAM J. Appl. Math.*, 47(2) (1987), 232—243.

A Group of Chaotic Motion of Soft Spring Quadratic Duffing Equations

Cheng Fu-de

(*Shanghai Normal University, Shanghai*)

Abstract

In this paper, we use the Melnikov function method to study a kind of soft Duffing equations[1]

$$\ddot{x}+Af(\dot{x},x)+x-x^{2k+1}=r[M(x,\dot{x})\cos\omega t+N(x,\dot{x})\sin\omega t] \qquad (k=1,2,3,\cdots)$$

and give the condition that the equations have chaotic motion and bifurcation. The method used in this paper is effective for dealing with the Melnikov function integral of the system whose explicit expression of the homoclinic or heteroclinic orbit cannot be given.

Key words chaos, bifurcation, homoclinic orbit, heteroclinic orbit, simple zeros, the Melnikov function