

铰接结构极限状态函数的自动生成*

车 维 毅

(沈阳 辽宁大学, 1990年10月11日收到)

摘 要

本文在结构可靠性分析中, 以铰接结构为例, 推导了结构连续变更定理, 并将其用于生成杆件的极限状态函数, 避免了由于结构拓扑不断变更引起的总刚度阵多次组装及多次求逆运算。引入了结构退化为机构的新判据, 算例结果令人满意。

关键词 铰接结构 连续变更定理 极限状态 函数

一、引 言

结构设计理论正处于从定值设计法向概率设计法过渡的重要时期。基于一次二阶矩法的结构可靠性分析是以结构极限状态函数为出发点进行结构可靠指标计算的近似概率法, 因此如何生成结构极限状态函数就成了结构可靠性分析的关键。

文[1]~[4]以海上采油平台为背景分别就桁架和刚架结构讨论了极限状态函数是如何表达成基本随机变量组合式的。但结构的连续变更给常规的矩阵位移法造成了很大困难, 尤其对大规模结构更是如此。

本文给出了结构连续变更定理, 从而从理论及电算实践上克服了这些难点, 使其便于工程应用。

二、铰接结构的失效模式

研究一个由 n 根杆组成的空间桁架, 设其外形及杆件材料均已确定。

对于静定桁架, 它属于串联系统, 任意一根杆失效, 整个结构失效就发生。对于超静定桁架, 某根杆失效不一定引起整个结构失效, 只有随着杆件的逐个失效, 结构退化为机构, 结构最终失效才会发生。据此, 失效模式可以描述为: 在结构分析基础上, 求得各杆内力的外荷载线性组合表达式, 再生成结构极限状态函数式, 计算相应杆件的可靠指标, 确定下一根可能失效杆件的序号, 取消此杆后形成新结构, (对延性材料还要将残余抗力 $R_i = [\sigma_i] \cdot A_i$ 按原杆件内力方向施加到原杆件相应的节点, 作为外荷载的一部分), 再进行新结构分析, ……。重复这个过程就形成了可能失效杆号序列 (以下简称失效链)。设含 p 根杆的失效

* 戴天民推荐。

链为 $k_1, k_2, \dots, k_{(p-1)}, k_p$, 此时第 i 号剩余完好杆的极限状态函数可表示成

$$Z_{i(k_1, k_2, \dots, k_p)}^{(p)} = R_i - N_{i(k_1, k_2, \dots, k_p)}^{(p)} \quad (2.1)$$

其中 R_i 表示第 i 号杆的抗力,

$$R_i = [\sigma_i] \cdot A_i \quad (2.2)$$

$[\sigma_i]$ 表示第 i 号杆屈服应力; A_i 表示第 i 号杆横截面积; $N_{i(k_1, k_2, \dots, k_p)}^{(p)}$ 表示失效链为 k_1, k_2, \dots, k_p 的新结构第 i 号杆内力,

$$N_{i(k_1, k_2, \dots, k_p)}^{(p)} = \sum_{j=1}^{3m} \alpha_{ij}^{(p)} \cdot P_j - \sum_{j=1}^p \alpha_{kj} \cdot \text{sgn}(N_{kj(k_1, k_2, \dots, k_{(j-1)})}^{(j-1)}) \cdot b_{ikj}^{(p)} \cdot R_{kj} \quad (2.3)$$

$\alpha_{ij}^{(p)}, b_{ikj}^{(p)}$ 分别表示此时荷载控制系数; P_j 表示原外荷载向量 \mathbf{P} 的第 j 分量; $3m$ 表示原外荷载向量分量个数; α_{kj} 表示第 kj 号杆件材料是延性材料取 1, 是脆性材料取零; $\text{sgn}(\cdot)$ 表示 (\cdot) 的符号,

直到失效链延伸至结构退化为机构。由以上分析可见能有效地求出荷载控制系数 $\alpha_{ij}^{(p)}$, $b_{ikj}^{(p)}$ 是自动生成极限状态函数的关键。

三、结构连续变更定理

1. 定义 第 k_p 号虚拟力 L_{k_p}

称沿与杆轴重合施加在第 k_p 号杆两端节点的一对方向相反的单位拉力为第 k_p 号虚拟力, 且用 L_{k_p} 表示。

2. 引理 1^[5]

若桁架结构在外荷载 \mathbf{P} 作用下, 杆内力向量为 $\mathbf{N}^{(0)}$, 那末, 取消第 i 号杆件后, 在第 j 号 ($j \neq i$) 杆件内力为

$$N_{j(i)}^{(1)} = N_j^{(0)} + (N_i^{(0)} / (1 - f_{ii}^{(0)})) \cdot f_{ji}^{(0)} \quad (3.1)$$

其中 $f_{ji}^{(0)}$ 为 L_i 单独作用于原结构时在第 j 号杆产生的内力, 也称变更影响系数。

3. 引理 2

若将 L_{k_2} 视为原结构唯一外荷载, 取消第 k_1 号杆后, 在第 j 号完好杆件中的虚拟内力为

$$f_{jk_2}^{(1)} = f_{jk_2}^{(0)} + (f_{k_1 k_2}^{(0)} / (1 - f_{k_1 k_1}^{(0)})) \cdot f_{jk_1}^{(0)} \quad (3.2)$$

此引理为引理 1 的直接推论。

4. 结构连续变更定理

若结构任意失效链为 $k_1, k_2, \dots, k_{(p-1)}, L_{k_p}$ 在原结构影响系数向量为 $f_{k_p}^{(0)}$, 且 $f_{k_1}^{(0)}, f_{k_2}^{(1)}, \dots, f_{k_{(p-2)}}^{(p-2)}$ 在结构连续变更中已经计算过, 那末

(1) L_{k_p} 在剩余第 j 号杆件的变更影响系数 $f_{jk_p}^{(p-1)}$ 可由如下递推公式推算

$$f_{jk_p}^{(B)} = f_{jk_p}^{(B-1)} + (f_{k_B k_p}^{(B-1)} / (1 - f_{k_B k_B}^{(B-1)})) \cdot f_{jk_B}^{(B-1)} \quad (p \geq 2; B=1, 2, \dots, (p-1)) \quad (3.3)$$

在 $f_{jk_p}^{(B)}$ 中 (B) 表示已取消杆件数目, j 表示取消 B 根杆后剩余完好杆件的原始编号, k_p 表示下一次可能失效杆件的原始编号。

(2) 再取消第 k_p 号杆后, L_{k_p} 的影响系数

$$f_{ik_p}^{(p)} = f_{ik_p}^{(p-1)} / (1 - f_{k_p k_p}^{(p-1)}) \quad i \in \{\text{剩余完好杆集合}\} \quad (3.4)$$

(3) 结构由于取消 k_1, k_2, \dots, k_p 各杆, 第 j 号剩余完好杆的内力为

$$\begin{aligned} N_{j(k_1, k_2, \dots, k_p)}^{(p)} &= N_{j(k_1, k_2, \dots, k_{(p-1)})}^{(p-1)} \\ &+ (N_{k_p(k_1, k_2, \dots, k_{(p-1)})}^{(p-1)} / (1 - f_{k_p k_p}^{(p-1)})) \cdot f_{j k_p}^{(p-1)} \\ &+ \alpha_{k_p} \cdot f_{k_p k_p}^{(p)} \cdot \text{sgn}(N_{k_p(k_1, k_2, \dots, k_{(p-1)})}^{(p-1)}) \cdot R_{k_p} \end{aligned} \quad (3.5)$$

(4) 倘若出现 $f_{k_p k_p}^{(p-1)} = 1$, 则整个结构退化为机构, 结构失效发生。

结论(1)的证明

(i) 当 $p=2, B=1$ 时, 即将 L_{k_2} 作为外荷载, 取消第 k_1 号杆时的最终内力, 由引理2得

$$f_{jk_2}^{(1)} = f_{jk_2}^{(0)} + (f_{k_1 k_2}^{(0)} / (1 - f_{k_1 k_1}^{(0)})) \cdot f_{jk_1}^{(0)}$$

(ii) 当结构失效链为 $k_1, k_2, \dots, k_{(p-1)}$, 而且 $f_{k_1}^{(0)}, f_{k_2}^{(1)}, \dots, f_{k_{(p-1)}}^{(p-2)}$ 已经算出, 则在原始结构施加 L_{k_p} 荷载, 即可得到 $f_{k_p}^{(0)}$, 在 $B=1, 2$ 时有下式成立:

$$\begin{aligned} f_{jk_p}^{(1)} &= f_{jk_p}^{(0)} + (f_{k_1 k_p}^{(0)} / (1 - f_{k_1 k_1}^{(0)})) \cdot f_{jk_1}^{(0)} \\ f_{jk_p}^{(2)} &= f_{jk_p}^{(1)} + (f_{k_2 k_p}^{(1)} / (1 - f_{k_2 k_2}^{(1)})) \cdot f_{jk_2}^{(1)} \end{aligned}$$

若 L_{k_p} 已作用于失效链为 $k_1, k_2, \dots, k_{(p-2)}$ 的新结构, $f_{k_p}^{(p-2)}$ 已算出, 应用引理2可得

$$f_{jk_p}^{(p-1)} = f_{jk_p}^{(p-2)} + (f_{k_{(p-1)} k_p}^{(p-2)} / (1 - f_{k_{(p-1)} k_{(p-1)}}^{(p-2)})) \cdot f_{jk_{(p-1)}}^{(p-2)}$$

即 $B=p-1$ 时成立, 结论(1)得证。

结论(2)的证明

由引理1, 取消第 k_p 号杆, 且 $f_{k_p}^{(p-1)}$ 为 L_{k_p} 作用于失效链为 $k_1, k_2, \dots, k_{(p-1)}$ 新结构的内力矢量, 则有

$$f_{jk_p}^{(p)} = f_{jk_p}^{(p-1)} + (f_{k_p k_p}^{(p-1)} / (1 - f_{k_p k_p}^{(p-1)})) \cdot f_{jk_p}^{(p-1)} = f_{jk_p}^{(p-1)} / (1 - f_{k_p k_p}^{(p-1)})$$

结论(2)得证。

结论(3), (4)不证自明, 不再赘述。

四、极限状态函数自动生成的电算实现

1. 对原结构采用矩阵位移法组装总刚度阵 $K^{(0)}$, 求其逆矩阵 $F = K^{(0)-1}$ 。

2. 对号取出 F 中与第 i 号杆端点相应的行组成的矩阵 $F_i^{(0)}$, 第 i 号杆内力为

$$N_i^{(0)} = RD_i \cdot B_i \cdot F_i^{(0)} \cdot P^{(0)}$$

设 $\alpha_i^{(0)} = RD_i \cdot B_i \cdot F_i^{(0)} = (\alpha_{i1}^{(0)}, \alpha_{i2}^{(0)}, \dots, \alpha_{i3m}^{(0)}) \quad (i=1, 2, 3, \dots, n)$

其中, $\alpha_{ij}^{(0)}$ 即为荷载控制系数, RD_i 为第 i 号杆单元刚度, B_i 为第 i 号杆位移变形转换矩阵。

从而得到极限状态函数式(2.1), 且含 $p=1$ 。

3. 由式(5.1)计算各完好杆可靠指标 β_i , 取 $\beta_{k_p} = \min_i \beta_i$, 确定第 k_p 号杆失效。

4. 形成与 L_{k_p} 相应的外荷载矢量 I_{k_p} , 各影响系数为

$$f_{i k_p}^{(0)} = a_i^{(p-1)} \cdot I_{k_p} \quad i \in \{\text{完好杆集合}\}$$

5. 若 $f_{k_p k_p}^{(p-1)} = 1$, 则结构退化为机构, 计算停止. 否则转向第6步.

6. 采用式(3.5)对 $a_i^{(p-1)}$ 进行修改, 得到新的荷载控制系数 $a_{i j}^{(p)}$, $b_{i k_j}^{(p)}$, 可得到新的极限状态函数式, 步进 $p = p + 1$, 转向第3步继续运算.

在运算中值得注意的是剩余完好杆件集合不断变化.

五、算 例

研究图1所示19杆平面桁架, 各杆横截面积: 上、下弦杆均为 $A_1 = 0.003\text{m}^2$, 竖杆均为 $A_2 = 0.002\text{m}^2$, 斜杆均为 $A_3 = 0.001\text{m}^2$. 相应各组杆件抗力平均值分别为 $\mu_{R1} = 813.6\text{kN}$, $\mu_{R2} = 542.4\text{kN}$ 和 $\mu_{R3} = 271.2\text{kN}$. 外荷载平均值 μ_{Pj} 如图所示. 抗力变异系数为 $\delta_R = 0.12$, 荷载变异系数 $\delta_P = 0.193$. 材料弹性模量 $E = 200\text{GPa}$, 抗拉屈服强度 $[\sigma^+] = 0.2712\text{GPa}$, 抗压屈服强度 $[\sigma^-] = \varphi[\sigma^+]$. φ 值依据 [6] 确定, 桁架杆件为双角钢焊接件. 为简单计, 假设基本变量均为正态分布随机变量且各杆失效是不相关的, 有第 i 号杆可靠指标

$$\beta_i = (\mu_{Ri} - \mu_{Ni}) / \sqrt{\sigma_{Ri}^2 + \sigma_{Ni}^2} \quad (5.1)$$

其中

$$\mu_{Ni} = \sum_j a_{ij}^{(p)} \mu_{Pj} + \sum_j b_{i k_j}^{(p)} \mu_{Rk_j}$$

$$\sigma_{Ni}^2 = \sum_j (a_{ij}^{(p)} \sigma_{Pj})^2 + \sum_j (b_{i k_j}^{(p)} \cdot \sigma_{Rk_j})^2$$

$$\sigma_{Ri} = \mu_{Ri} \cdot \delta_R, \quad \sigma_{Pj} = \mu_{Pj} \cdot \delta_P$$

根据结构连续变更定理公式(3.5)可以得到任意剩余完好杆件极限状态函数中的组合系数 $a_{ij}^{(p)}$ 和 $b_{i k_j}^{(p)}$. 例如第13号杆在原结构($p=0$), 取消第4号杆后结构($p=1$), 取消第4, 9号杆后结构($p=2$)的 $a_{ij}^{(p)}$ 和 $b_{i k_j}^{(p)}$ 分别列入表1, $j \geq 17$ 时表中数字为 $b_{i k_j}^{(p)}$.

根据各杆极限状态函数可以计算结构拓扑变化的各种情况下完好杆件的可靠指标 β_i , 并选出其中最小值 β_{\min} (见表2), 即可确定失效链, $p=0$ 时, $k1=4$, $p=1$ 时, $k2=9$; $p=2$ 时, $k3=8$, 此时 $f_{k_3 k_3}^{(2)} = 0.999999954$, 结构退化为机构, 失效链为 $4 \rightarrow 9 \rightarrow 8$. 退化过程见图2~4.

六、结 论

1. 在结构拓扑不断变更的情况下, 应用结构连续变更定理可以避免总刚度阵不断修改, 避免反复求逆矩阵运算, 而有效地修改 $a_{ij}^{(p)}$, $b_{i k_j}^{(p)}$ 形成新的极限状态函数.

2. 整个结构失效的判别不必像文[4]那样计算行列式 $|K^{(p)}|$ 是否等于零, 只有不断检查影响系数 $f_{k_p k_p}^{(p-1)}$ 是否等于1即可确定结构是否已退化为机构.

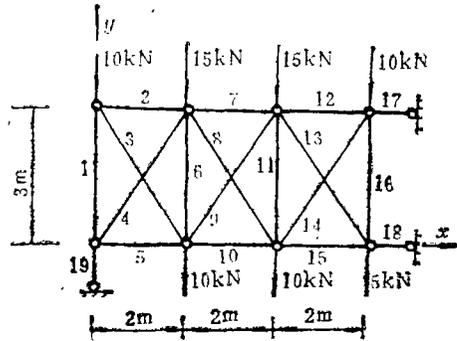


图 1

表 1

第13号杆 $a_{ij}^{(p)}$, $b_{ih}^{(p)}$

j	$A(13, j) p=0$	j	$A(13, j) p=1$	j	$A(13, j) p=2$
1	-3.144058777E-02	1	-3.107633482E-02	1	-3.444248529E-02
2	1.362516037E-03	2	1.8702E-10	2	9.965251284E-11
3	-3.144058687E-02	3	-3.107633389E-02	3	-3.444248459E-02
4	4.43E-13	4	4.615647151E-13	4	3.800350566E-13
5	-3.103687945E-02	5	-3.10763349E-02	5	-3.444248539E-02
6	-4.99981018E-03	6	-1.257723196E-02	6	-4.5E-12
7	-3.103687855E-02	7	-3.107633397E-02	7	-3.444248465E-02
8	6.36232805E-03	8	1.44572E-09	8	9.040183667E-10
9	-3.480714695E-02	9	-3.480292219E-02	9	-3.444248531E-02
10	5.305599352E-02	10	4.615270041E-02	10	1.162433885E-01
11	-3.480714637E-02	11	-3.48029216E-02	11	-3.444248483E-02
12	-5.169347332E-02	12	-5.872992853E-02	12	1.4166E-09
13	-5.63E-13	13	-5.846623225E-13	13	-4.327176969E-13
14	-4.827698316E-01	14	-4.897539643E-01	14	-4.265601297E-01
15	8.24E-13	15	8.475146081E-13	15	6.877210356E-13
16	-7.177180711E-01	16	-7.246736867E-01	16	-6.590469035E-01
		20	-1.046489012E-02	20	-4.465E-10
				25	9.672034447E-02

表 2

各种情况下的可靠指标 β_i

i	$\beta_i p=0$	i	$\beta_i p=1$	i	$\beta_i p=2$
1	6.805705076	1	7.03899965	1	7.038999641
2	8.085649576	2	8.193418284	2	8.193418281
3	7.283385558	3	7.505037924	3	7.505037915
4	2.082507935	4	10000	4	10000
5	8.076740865	5	7.973150373	5	7.973150372
6	8.296643369	6	8.063143405	6	7.499843441
7	7.562909952	7	7.550279421	7	7.823537887
8	7.571171445	8	7.51597845	8	4.131324645
9	4.852483572	9	4.997890722	9	10000
10	7.744217655	10	7.75390626	10	7.524651203
11	8.248096817	11	8.191050259	11	7.884459008
12	7.315069626	12	7.316241095	12	7.28875097
13	8.078092233	13	8.09349641	13	7.963468788
14	6.873253779	14	6.851794575	14	7.298055583
15	7.544006741	15	7.543079756	15	7.564238432
16	7.978836457	16	8.000715228	16	7.47098081
17	8.325217123	17	8.325217123	17	8.325217123
18	8.325137311	18	8.325137311	18	8.325137311
19	8.325724818	19	8.325724818	19	8.325724818
β_{\min}		β_{\min}		β_{\min}	
2.082507935		4.997890722		4.131324645	

*表中“10000”表示已失效杆件。

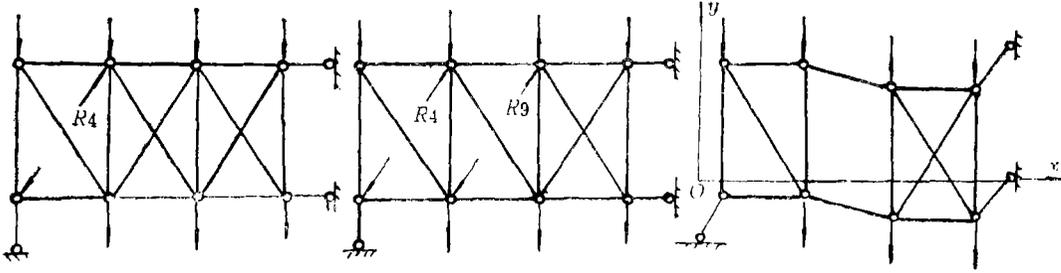


图2 第4号杆失效($f_{4,4}^{(0)} \neq 1$) 图3 第4, 9号杆失效($f_{9,9}^{(1)} \neq 1$) 图4 第4, 9, 8号杆失效($f_{8,8}^{(2)} \neq 1$)
机构生成

参 考 文 献

- [1] Murotsu, Y., H. Okada, K. Niwa and S. Miwa, Reliability analysis of truss structure by using matrix method, *Transaction of the ASME, Journal of Mechanical Design*, 102(4), Oct. (1980), 749—756.
- [2] Orada, H., S. Matsuzaki and Y. Murotsu, Safety margins for reliability analysis of frame structures, *Bulletin of University of Osaka Prefecture, Series A*, 32(2) (1983), 155—162.
- [3] Murotsu, Y., M. Yonezawa, H. Okada, S. Matsuzaki and T. Matsumoto, A study on first-order second-moment methods in structural reliability, *Bulletin of University of Osaka Prefecture, Series A*, 33(1) (1984).
- [4] Thoft-Chritensen, Palle and Y. Murotsu, *Application of Structural Systems Reliability Theory*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York (1986), 97—125.
- [5] 马吉德, K. I. 著, 蓝倜恩译, 《结构最优设计》, 中国建筑工业出版社 (1980).
- [6] 钱令希, 《工程结构优化设计》, 水利电力出版社 (1983).

The Automatic Generation of Limit State Function of Hinged Structure

Che Wei-yi

(Liaoning University, Shenyang)

Abstract

In this paper, the theorem of structure continual variation of truss structure in the analysis of structure reliability is derived, and it is used to generate limit state function automatically. We can avoid repeated assembly of global stiffness matrix and repeated inverse operations of the matrix caused by constant changes of structure topology. A new criterion of degenerate of the structure into mechanism is introduced. The calculation examples are satisfactory.

Key words hinged structure, continual variation theorem, limit state function