应用数学和力学，第12卷第12期（1991年12月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

高维抛物型方程差分格式的稳定性

孙其仁

（上海工业大学，上海市应用数学和力学研究所）

（江福汝推荐，1990年10月15日收到）

摘　要

本文提出了一个改进抛物型方程差分格式稳定性条件的新方法，给出并证明新方法稳定的充要条件，数值例子显示了本方法的计算优越性．

关键词　稳定性条件　抛物型方程　差分格式

一、引　言

对于抛物型方程

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial u}{\partial t}=a\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)+f(x,y,z,t)\qquad (x,y,z)\in\Omega,0<t\leqslant T\\&u(x,y,z,t)=0\qquad (x,y,z)\in\Gamma,\ 0<t\leqslant T\\&u(x,y,z,0)=\varphi(x,y,z)\qquad (x,y,z)\in\Omega\end{aligned}\right\}\tag{1.1}$$

其中　$\Omega=\{(x,y,z)|0<x<1,\ 0<y<1,\ 0<z<1\}$，$\Gamma=\partial\Omega$，$a$为正常数

初边值问题的差分计算，前人已提出了多种可计算的差分格式．这些格式可分为显式形式的和隐式形式的差分格式两大类．众所周知，采用显格式计算较为简便，但由于稳定性条件的要求，对时间步长有较大的限制；采用隐格式计算虽无时间步长限制，但对每一时间层上的值都需求解一个代数方程组．因此两类格式各有利弊．

本文就显式差分格式求解抛物型方程初边值问题(1.1)，提出一种改进稳定性条件的新方法，即任选一种显式格式，固定空间步长交替变换时间步长．按传统的思想，每一时间步长均需满足所采用显式格式的稳定性条件．其实不然，我们采用适当的稳定与不稳定格式交替使用，最终可导致稳定的格式．本文给出并证明了比古典格式稳定性条件好得多的改进稳定性条件．这样我们可以在实际计算中增大时间步长，能在较少的时间内完成计算工作，充分发挥显式格式计算的优越性，对高维问题的计算更具有重要意义．

二、稳定的充要条件

对方程(1.1)可用许多种显式格式来计算，我们采用最简单的古典显式格式，并逐步改

善稳定性条件。

方程(1.1)的古典显式差分格式为

$$\left.\begin{aligned}&(u^{k+1}_{i,j,l}-u^k_{i,j,l})/\tau=ah^{-2}(u^k_{i+1,j,l}-2u^k_{i,j,l}+u^k_{i-1,j,l}+u^k_{i,j+1,l}\\&\qquad-2u^k_{i,j,l}+u^k_{i,j-1,l}+u^k_{i,j,l+1}-2u^k_{i,j,l}+u^k_{i,j,l-1})\\&\qquad+f^k_{i,j,l}\qquad(i,j,l=1,\cdots,N-1)\\&u^k_{0,j,l}=u^k_{N,j,l}=u^k_{i,0,l}=u^k_{i,N,l}=u^k_{i,j,0}=u^k_{i,j,N}=0\\&u^0_{i,j,l}=\varphi_{i,j,l}\qquad(i,j,l=0,1,\cdots,N)\end{aligned}\right\}\tag{2.1}$$

其中：τ为时间步长，$h=1/N$为空间步长，N为正整数，

$$f^k_{i,j,l}=f(ih,jh,lh,k\tau),\quad \varphi_{i,j,l}=\varphi(ih,jh,lh)$$

令$r=a\tau/h^2$。

首先考虑格式(2.1)的稳定性条件。

令 $u^k_{i,j,l}=\xi^k\exp[i(\sigma_1 i+\sigma_2 j+\sigma_3 l)h]$，代入到(2.1)的齐次格式得

$$\begin{aligned}G(\sigma,\tau)&=1+r(\exp[i\sigma_1 h]+\exp[-i\sigma_1 h]+\exp[i\sigma_2 h]+\exp[-i\sigma_2 h]\\&\qquad+\exp[i\sigma_3 h]+\exp[-i\sigma_3 h]-6)\\&=1-4r(\sin^2(\sigma_1 h/2)+\sin^2(\sigma_2 h/2)+\sin^2(\sigma_3 h/2))\end{aligned}$$

故由$|G(\sigma,\tau)|\leqslant 1$可得$r\leqslant 1/8$。

其次考虑问题(1.1)的显式交替格式

$$\left.\begin{aligned}&(u^{k+1}_{i,j,l}-u^k_{i,j,l})/\tau=ah^{-2}(u^k_{i+1,j,l}-2u^k_{i,j,l}+u^k_{i-1,j,l}+u^k_{i,j+1,l}\\&\qquad-2u^k_{i,j,l}+u^k_{i,j-1,l}+u^k_{i,j,l+1}-2u^k_{i,j,l}+u^k_{i,j,l-1})\\&\qquad+f^k_{i,j,l}\qquad(i+j+l=\text{奇数})\\&(u^{k+1}_{i,j,l}-u^k_{i,j,l})/\tau=ah^{-2}\ (u^{k+1}_{i+1,j,l}-2u^{k+1}_{i,j,l}+u^{k+1}_{i-1,j,l}\\&\qquad+u^{k+1}_{i,j+1,l}-2u^{k+1}_{i,j,l}+u^{k+1}_{i,j-1,l}+u^{k+1}_{i,j,l+1}-2u^{k+1}_{i,j,l}\\&\qquad+u^{k+1}_{i,j,l-1})+f^k_{i,j,l}\qquad(i+j+l=\text{偶数})\\&u^k_{0,j,l}=u^k_{N,j,l}=u^k_{i,0,l}=u^k_{i,N,l}=u^k_{i,j,0}=u^k_{i,j,N}=0\\&u^0_{i,j,l}=\varphi_{i,j,l}\qquad(i,j,l=0,1,\cdots,N)\end{aligned}\right\}\tag{2.2}$$

考虑(2.2)的齐次格式，应用分离变量法求增长矩阵。

令 $u^k_{i,j,l}=\xi_1^k\exp[i(\sigma_1 i+\sigma_2 j+\sigma_3 l)h]\qquad(i+j+l=\text{奇数})$

$u^k_{i,j,l}=\xi_2^k\exp[i(\sigma_1 i+\sigma_2 j+\sigma_3 l)h]\qquad(i+j+l=\text{偶数})$

代入到(2.2)的齐次格式，易得增长矩阵为

$$G=\begin{bmatrix}a_1 & d_1\\ c_1 & b_1\end{bmatrix}\tag{2.3}$$

其中 $a_1=1-6r,\ b_1=\dfrac{1+4r^2(\cos\sigma_1 h+\cos\sigma_2 h+\cos\sigma_3 h)^2}{1+6r}$

$$c_1=\frac{2r}{1+6r}(1-6r)(\cos\sigma_1 h+\cos\sigma_2 h+\cos\sigma_3 h)$$

$$d_1=2r(\cos\sigma_1 h+\cos\sigma_2 h+\cos\sigma_3 h)$$

矩阵(2.3)的特征方程为

$$\lambda^2-(a_1+b_1)\lambda+a_1b_1-c_1d_1=0\tag{2.4}$$

二次方程(2.4)的根$|\lambda|\leqslant 1$的充要条件为

$$|a_1+b_1|\leqslant 1+a_1b_1-c_1d_1\leqslant 2 \tag{2.5}$$

易知(2.5)式中的右不等式恒成立。

令 $c=\cos\sigma_1 h+\cos\sigma_2 h+\cos\sigma_3 h$

由(2.5)中的左不等式可得

$$|(2-36r^2+4c^2r^2)/(1+6r)|\leqslant 2/(1+6r) \tag{2.6}$$

易知(2.6)式等价于

$$1-9r^2-c^2r^2\geqslant 0$$

由σ_1，σ_2，σ_3的任意性可知上式等价于

$$1-9r^2\geqslant 0 \text{即} r\leqslant 1/3 \tag{2.7}$$

此即得到了(2.2)式稳定性必要条件。

如下再验证(2.7)式为格式(2.2)的充分条件。

对于增长矩阵G的特征值λ_1，存在其对应的单位化的特征向量e_1，再由e_1可取到包含e_1的C^2空间的一个标准正交基e_1，e_2。令$U=(e_1\ e_2)$，易知U为酉阵，则

$$U^H GU=\begin{bmatrix}\lambda_1 & e_1^H Ge_2\\ 0 & e_2^H Ge_2\end{bmatrix}$$

由代数中相似矩阵的特征值的相同性定理可得

$$e_2^H Ge_2=\lambda_2$$

由此可得

$$G^n=U\begin{bmatrix}\lambda_1^n & e_1^H Ge_2(\lambda_1^{n-1}+\lambda_1^{n-2}\lambda_2+\cdots+\lambda_1\lambda_2^{n-2}+\lambda_2^{n-1})\\ 0 & \lambda_2^n\end{bmatrix}U^H$$

易知当$r\leqslant 1/3$时，$\|G\|_2$关于σ是一致有界的，记这一有界数为M_0。

由于U为酉阵，故$\|U\|_2=1$，$\|U^H\|_2=1$。

由韦达定理得 $\lambda_1\cdot\lambda_2=a_1b_1-c_1d_1=(1-6r)/(1+6r)$

$$M_1\triangleq|\lambda_1|\cdot|\lambda_2|=|(1-6r)/(1+6r)|<1,\ \min(|\lambda_1|,\ |\lambda_2|)\leqslant\sqrt{M_1}<1$$

对任意一个σ，必存在一个特征值的模小于等于另一个特征值的模，不妨设$|\lambda_1|\leqslant|\lambda_2|$。由上面讨论可知

$$|\lambda_1|\leqslant\sqrt{M_1}<1,\ |\lambda_2|\leqslant 1$$

故 $\|G^n\|_2\leqslant\|U\|_2\|U^H\|_2(|\lambda_1^n|+|\lambda_2^n|+|e_1^H Ge_2|\cdot|\lambda_1^{n-1}+\lambda_1^{n-2}\lambda_2+\cdots+\lambda_1\lambda_2^{n-2}+\lambda_2^{n-1}|)$

$$\leqslant 2+M_0/(1-M_1) \tag{2.8}$$

即 $\|G^n\|_2$关于σ，n一致有界。

这便验证了(2.7)式是稳定的充分条件。

最后本文考虑固定空间步长h，对时间步长交替使用τ_2，τ_1，并在奇数层用τ_2，偶数层用τ_1，并把二层作为一个整体看作一层考虑可得如下改善稳定性条件的结论。

定理1 对方程(1.1)采用固定空间步长h，交替使用时间步长τ_2，τ_1的差分格式(2.2)，此时稳定的充要条件为

$$(\mathrm{I})\begin{cases}R_1\geqslant 6R_2\\ R_1\geqslant 2\sqrt{R_2}\\ R_1^4-16R_2^2-576R_2^3\leqslant 0\end{cases}\quad 及(\mathrm{II})'\begin{cases}3R_1\leqslant 18R_2+1\\ R_1\geqslant 6\sqrt{2}R_2\\ R_1^4-16R_2^2-576R_2^3\geqslant 0\end{cases}\tag{2.9}$$

证明 首先证明区域(Ⅰ)及区域(Ⅱ)′的和集为稳定的必要条件.

对差分格式(2.2)的齐次格式交替使用时间步长τ_2，τ_1时，把二层看作一个整体作为一层可得此时的增长矩阵为

$$G'=\begin{bmatrix}1-6r_1 & 2r_1c\\ \dfrac{2r_1}{1+6r_1}(1-6r_1)c & \dfrac{1+4r_1^2c^2}{1+6r_1}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1-6r_2 & 2r_2c\\ \dfrac{2r_2}{1+6r_2}(1-6r_2)c & \dfrac{1+4r_2^2c^2}{1+6r_2}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}a_2 & d_2\\ c_2 & b_2\end{bmatrix}\tag{2.10}$$

其中：
$$a_2=(1-6r_1)(1-6r_2)+\frac{4r_1r_2c^2}{1+6r_2}(1-6r_2)$$

$$b_2=\frac{4r_1r_2c^2(1-6r_1)}{1+6r_1}+\frac{(1+4r_1^2c^2)(1+4r_2^2c^2)}{(1+6r_1)(1+6r_2)}$$

$$c_2=\frac{2r_1(1-6r_1)(1-6r_2)c}{1+6r_1}+\frac{2r_2c(1-6r_2)}{(1+6r_1)(1+6r_2)}(1+4r_1^2c^2)$$

$$d_2=2r_2c(1-6r_1)+2r_1c\frac{1+4r_2^2c^2}{1+6r_2}$$

矩阵(2.10)的特征方程为

$$\lambda^2-(a_2+b_2)\lambda+a_2b_2-c_2d_2=0\tag{2.11}$$

二次方程(2.11)的根$|\lambda|\leqslant 1$的充要条件为

$$|a_2+b_2|\leqslant 1+a_2b_2-c_2d_2\leqslant 2\tag{2.12}$$

易知上式的右不等式恒成立.

由(2.12)左不等式得

$$-2(1+36r_1r_2)\leqslant(1-36r_1^2)(1-36r_2^2)+8r_1r_2c^2(1-36r_1r_2)+1+4c^2(r_1^2+r_2^2)$$
$$+16r_1^2r_2^2c^4\leqslant 2(1+36r_1r_2)\tag{2.13}$$

记 $R_1=r_1+r_2$，$R_2=r_1\cdot r_2$ (2.14

由(2.13)右不等式可得

$$4R_2^2c^4-(R_1^2-72R_2^2)c^2+324R_2^2-9R_1^2\leqslant 0$$

即 $$(R_1^2-36R_2^2)/4R_2^2\leqslant c^2\leqslant 9\tag{2.15}$$

由于$0\leqslant c^2\leqslant 9$，由$\sigma$的任意性得(2.15)式等价于

$$R_1^2\geqslant 36R_2^2，即R_1\geqslant 6R_2\tag{2.16}$$

由R_1，R_2的假设要r_1，r_2有实数解，故有

$$R_1\geqslant 2\sqrt{R_2}$$

由(2.13)式中左不等式得

$$4R_2^2c^4+(R_1^2-72R_2^2)c^2+1-9R_1^2+36R_2+324R_2^2\geqslant 0\tag{2.17}$$

考虑(2.17)式根的判别式

$$\Delta=R_1^4-16R_2^2-576R_2^3$$

1) $\Delta\leqslant 0$时，(2.17)式恒成立。

2) $\Delta>0$时，即$R_1^4-16R_2^2-576R_2^3>0$

a) $c^2\leqslant(-(R_1^2-72R_2^2)-\sqrt{R_1^4-16R_2^2-576R_2^3})/8R_2^2$等价于

$9\leqslant(-(R_1^2-72R_2^2)-\sqrt{R_1^4-16R_2^2-576R_2^3})/8R_2^2$

易知上式无解。

b) $c^2\geqslant(-(R_1^2-72R_2^2)-\sqrt{R_1^4-16R_2^2-576R_2^3})/8R_2^2$等价于

$0\geqslant-(R_1^2-72R_2^2)-\sqrt{R_1^4-16R_2^2-576R_2^3}$

当$R_1^2-72R_2^2\geqslant 0$时，由上式可推得 $3R_1\leqslant 18R_2+1$。

综合上述讨论可得满足von-Neumann条件的区域为

$$(\mathrm{I})\begin{cases}R_1\geqslant 6R_2\\ R_1\geqslant 2\sqrt{R_2}\\ R_1^4-16R_2^2-576R_2^3\leqslant 0\end{cases}$$

及

$$(\mathrm{II})\begin{cases}R_1\geqslant 6R_2\\ R_1\geqslant 2\sqrt{R_2}\\ R_1^2-72R_2^2\geqslant 0\\ 3R_1\leqslant 18R_2+1\\ R_1^4-16R_2^2-576R_2^3\geqslant 0\end{cases}$$

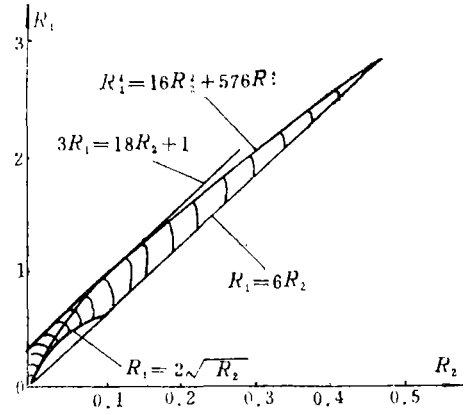

图1 稳定区域

易知区域(Ⅱ)与区域(Ⅱ)′等价。

由于von-Neumann条件是稳定的必要条件，

这便证明了区域(Ⅰ)及区域(Ⅱ)′的和集为稳定的必要条件。

由于证明区域(Ⅰ)及区域(Ⅱ)′的和集为稳定的充分条件的步骤完全类似于证明(2.7)式是稳定充分条件，故证明略去。这样我们已证明了本定理。

稳定区域可用图1中的阴影部分表示。

前面我们已讨论得到了显式形式的隐一显格式(2.2)的稳定性条件为$r\leqslant 1/3$，故在时间方向等网比时，一般仅知$r_1+r_2\leqslant 2/3$时稳定，而以上讨论表明只要适当选取R_1,R_2(对应r_1,r_2)，使其落在阴影部分，我们就可得到一稳定的差分格式。由图1中可看出一般有$r_1+r_2\leqslant 2(2+\sqrt{5})/3$。显然通过我们提出的方法可大大改善稳定性条件。并且要用本文中提出的计算方法来改善稳定性条件，必需选用稳定与不稳定格式交替使用的方法，并使整体上导致稳定的格式。

三、数 值 例 子

例 考虑初边值(1.1)的齐次问题

$$\varphi(x,y,z)=640xyz(1-x)(1-y)(1-z)$$

空间步长取为$h=1/20$，网比$r_1=2.53$，$r_2=0.178$，时间步长为$\tau_1=2.53h^2/a$，$\tau_2=0.178h^2/a$ (a为正常数)。

易知上述网比的选取使得对应的R_1，R_2落在图1的阴影部分。用差分格式(2.2)计算近似值，当k为奇数时用网比r_2计算，当k为偶数时用网比r_1计算。

表1 差分解$u^{8}_{i,j,10}$的值

$i \backslash j$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0.124	0.242	0.340	0.447	0.532	0.621	0.669	0.725	0.739	0.762
2	0.242	0.451	0.646	0.841	1.021	1.167	1.282	1.365	1.418	1.435
3	0.340	0.646	0.935	1.200	1.472	1.674	1.852	1.957	2.049	2.059
4	0.447	0.841	1.200	1.577	1.904	2.189	2.392	2.561	2.647	2.694
5	0.532	1.021	1.472	1.904	2.315	2.651	2.911	3.097	3.221	3.258
6	0.621	1.167	1.674	2.189	2.651	3.034	3.327	3.551	3.682	3.734
7	0.669	1.282	1.852	2.392	2.911	3.327	3.660	3.888	4.050	4.091
8	0.725	1.365	1.957	2.561	3.097	3.551	3.888	4.156	4.304	4.370
9	0.739	1.418	2.049	2.647	3.221	3.682	4.050	4.303	4.482	4.528
10	0.762	1.435	2.059	2.694	3.258	3.734	4.091	4.370	4.528	4.596

由于本例初值和计算格式均具有对称性，从而差分解在x,y,z方向也具有对称性（中心对称），故表1仅给出$z=1/2$平面上的1/4值。由表1可看出差分解是收敛的。

下面我们采用交替显格式(2.1)来计算本例，空间步长仍取为$h=1/20$，网比用最大稳定的一致网比$r=1/3$，因此时间步长为$\tau=h^2/(3a)$。计算结果见表2。

表2 差分解$u^{32}_{i,j,10}$的值

$i \backslash j$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0.125	0.247	0.362	0.467	0.561	0.639	0.703	0.748	0.776	0.785
2	0.247	0.487	0.714	0.922	1.106	1.262	1.386	1.476	1.531	1.549
3	0.362	0.714	1.047	1.351	1.621	1.849	2.032	2.164	2.245	2.271
4	0.467	0.922	1.351	1.745	2.093	2.388	2.623	2.795	2.898	2.933
5	0.561	1.106	1.621	2.093	2.511	2.864	3.147	3.352	3.477	3.518
6	0.639	1.262	1.849	2.388	2.864	3.268	3.589	3.824	3.965	4.014
7	0.703	1.386	2.032	2.623	3.147	3.589	3.943	4.200	4.357	4.408
8	0.748	1.476	2.164	2.795	3.352	3.824	4.200	4.474	4.640	4.696
9	0.776	1.531	2.245	2.898	3.477	3.965	4.357	4.640	4.813	4.870
10	0.785	1.549	2.271	2.933	3.518	4.014	4.408	4.696	4.870	4.929

比较表1与表2的结果可知：本文方法计算出时间方向第8层上的差分解比交替显格式(2.2)计算出时间方向第32层上的差分解收敛更快。即新方法的时间步长可选取为原计算方法最大稳定时间步长的4倍多。就是说在不增加计算复杂性的情况下，仅需花不到原来四分之一的计算工作量就可得到相同的结果。

本文在撰写过程中，得到了复旦大学李立康教授的指导，谨在此表示谢意。

参 考 文 献

[1] Richtmyer, Robert D., *Difference Methods for Initial-Value Problems*, Interscience Publishers Inc., New York (1957).

[2] 李荣华、冯果枕，《微分方程数值解》，高等教育出版社，上海 (1980).

[3] 蒋尔雄、高坤敏、吴景琨，《线性代数》，人民教育出版社，上海 (1978).

The Stability of Difference Schemes of a Higher Dimensional Parabolic Equation

Sun Qi-ren

(Shanghai University of Technology, Shanghai Institute of Applied Mathematics and Mechanics, Shanghai)

Abstract

This paper proposes a new method to improve the stability condition of difference schemes of a parabolic equation. Necessary and sufficient conditions of the stability of this new method are given and proved. Some numerical examples show that this method has some calculation advantages.

Key words stability condition, parabolic equation, difference scheme