半线性抛物型方程奇异摄动问题的数值解

苏煜城　沈　全

（南京大学，1990年10月11日收到）

摘　要

本文讨论具有抛物边界层的半线性抛物型方程奇异摄动问题的数值解法，在非均匀网格上构造了两层非线性差分格式，证明了差分格式是一致收敛的，给出了一些数值例子。

关键词　半线性抛物型方程　奇异摄动　差分方法　一致收敛性

一、引　言

本文讨论下面的高阶导数项含小参数ε的半线性抛物型方程第一边值问题：

$$\left.\begin{aligned}&L_\varepsilon u\equiv\frac{\partial u}{\partial t}-\varepsilon b(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+c(x,t,u)=0\\&(x,t)\in Q=\{0\leqslant x\leqslant l;\ 0\leqslant t\leqslant T\}\end{aligned}\right\}\tag{1.1}$$

$$u(x,0)=\varphi(x)\tag{1.2}$$

$$u(0,t)=u(l,t)=0\tag{1.3}$$

假定

1) $c_u(x,t,u)\geqslant\nu=\text{const}>0$，$(x,t,u)\in Q\times(-\infty,\infty)$　(1.4)
2) $b(x,t)\geqslant\beta=\text{const}>0$，$(x,t)\in Q$　(1.5)
3) 相容性条件成立：$\varphi(0)=\varphi(l)=0$　(1.6)
4) 函数$b(x,t)$，$c(x,t,u)$，$\varphi(x)$具有一定的光滑度。

对于这个问题，Trenogin[1]构造过解的渐近展开式，讨论了解的渐近性质。本文讨论用差分方法求这个问题的数值解。这个问题的特点是在$x=0$和$x=l$附近出现抛物边界层，而在$t=0$附近不出现边界层，因此在网格划分上我们采取的方法是在t方向作均匀划分，在x方向上作非均匀划分，在出现边界层的$x=0$，$x=l$附近进行网格加密。我们在非均匀网格上构造了原问题的差分格式，并且证明了这一差分格式关于小参数ε是一致收敛的。

在下面的各节中，我们用M表示不依赖于h，τ和ε的正的常数。

二、摄动问题解的性质

在讨论差分格式解的收敛性时，我们需要利用解的渐近性质，所以我们首先列出摄动问题解的部分渐近性质，其证明参见[1]。

引理1　设条件(1.4)～(1.6)满足，并且

(1)　当$(x,t,u)\in Q\times[-K,K]$时，$b(x,t)$和$c(x,t,u)$有如下导数

$$\frac{\partial^i b(x,t)}{\partial x^i},\ \frac{\partial^{i+1}b(x,t)}{\partial t\partial x^i},\ \frac{\partial^{1+m}c(x,t,u)}{\partial t\partial x^{m_1}\partial u^{m_2}},\ \frac{\partial^m c(x,t,u)}{\partial x^{m_1}\partial u^{m_2}},$$

$$(i=0,1,2;\ \ m=0,1,2,3;\ \ m=m_1+m_2)$$

其中
$$K=\max_{[0,l]}|\varphi(x)|+\frac{1}{\nu}\max_{Q}|c(x,t,0)|,$$

(2)　$\varphi(x)$在$[0,l]$上连续，

那么：

(a)　问题(1.1)～(1.3)存在唯一解$u(x,t,\varepsilon)$，它在Q内连续并有含于方程(1.1)中的相应导数；

(b)　$u(x,t,\varepsilon)$有渐近展开式：

$$u(x,t,\varepsilon)=u_0(x,t)+v_0^0(x,t,\varepsilon)+v_0^l(x,t,\varepsilon)+R_0(x,t,\varepsilon),$$

其中　$u_0(x,t)$满足

$$\frac{\partial u_0}{\partial t}+c(x,t,u_0)=0,\ \ u_0(x,0)=\varphi(x) \tag{2.1}$$

$v_0^0(x,t,\varepsilon)$满足

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial v_0^0}{\partial t}-b(0,t)\frac{\partial^2 v_0^0}{2\eta^2}+c(0,t,u_0(0,t)+v_0^0)-c(0,t,u_0(0,t))=0\\&v_0^0(\eta,0)=0,\ \ v_0^0(0,t)=-u_0(0,t)\end{aligned}\right\} \tag{2.2}$$

其中　$\eta=x/\sqrt{\varepsilon}$．$v_0^l(x,t,\varepsilon)$满足与(2.2)类似的方程和定解条件．而余项$R_0(x,t,\varepsilon)=O(\sqrt{\varepsilon}\ln(1/\varepsilon))$．

令
$$\bar{u}(x,t)=u_0(x,t)+v_0^0(x,t,\varepsilon)+v_0^l(x,t,\varepsilon) \tag{2.3}$$

则由引理1知

$$|u-\bar{u}|=|R_0(x,t,\varepsilon)|=O(\sqrt{\varepsilon}\ln(1/\varepsilon)). \tag{2.4}$$

这里的$u_0(x,t)$是退化问题的解，$v_0^0(x,t,\varepsilon)$是边界层型函数，它是由抛物型方程初边值问题确定的．函数u_0，v_0^0有下面的估计(参见[1])

$$\left.\begin{aligned}&\left|\frac{\partial^m u_0}{\partial^{m_1}x\partial^{m_2}t}\right|\leqslant M\\&\left|\frac{\partial^m v_0^0}{\partial^{m_1}x\partial^{m_2}t}\right|\leqslant M\varepsilon^{-\frac{m_1}{2}}\exp(-2\varepsilon^{-1/2}x)\qquad(m=m_1+m_2)\end{aligned}\right\} \tag{2.5}$$

其中　M是不依赖于ε的正常数．函数$v_0^l(x,t,\varepsilon)$亦有类似的估计．

现在我们对问题(1.1)～(1.3)的解及其导数进行估计．

引理2　设u_1，u_2是定义在Q上的两个连续可微函数．若在区域Q上有$L_\varepsilon u_1\geqslant L_\varepsilon u_2$，而在边界$\Gamma=\{0\leqslant x\leqslant l,t=0\}\cup\{x=0,\ 0\leqslant t\leqslant T\}\cup\{x=l,\ 0\leqslant t\leqslant T\}$上，$u_1\geqslant u_2$，则在整个区域$Q$上

有$u_1 \geqslant u_2$。

证明 反设在Q上的有些点有$u_1<u_2$，则由 u_1-u_2 的连续性可知，u_1-u_2 在Q上一定达到负的最小值。不妨设在点(x_0,t_0)处达到。显然$(x_0,t_0)\notin \Gamma$，因此

$$\frac{\partial}{\partial t}w(x_0,t_0)\leqslant 0,\quad \frac{\partial^2}{\partial x^2}w(x_0,t_0)\geqslant 0,$$

其中$w=u_1-u_2$。因为

$$L_\varepsilon u_1-L_\varepsilon u_2=\frac{\partial w}{\partial t}-\varepsilon b(x,t)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+c(x,t,u_1)-c(x,t,u_2),$$

于是由(1.4)得

$$\begin{aligned}(L_\varepsilon u_1-L_\varepsilon u_2)(x_0,t_0)&\leqslant c(x_0,t_0,u_1)-c(x_0,t_0,u_2)\\&=c_u(x_0,t_0,\xi_1)(u_1-u_2)(x_0,t_0)<0.\end{aligned}$$

这与$L_\varepsilon u_1\geqslant L_\varepsilon u_2$相矛盾。因此在$Q$上，都有$u_1\geqslant u_2$。引理 2 证毕。

定理1 设 u 是问题(1.1)～(1.3)的解，则存在与ε无关的常数M，使$|u|\leqslant M$ $((x,t)\in Q)$。

证明 考虑线性算子

$$L_0 z\equiv\frac{\partial z}{\partial t}-\varepsilon b(x,t)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+g_\varepsilon(x,t)z$$

其中 $g_\varepsilon(x,t)=\int_0^1 c_u(x,t,su(x,t))ds\geqslant\nu$，$u(x,t)$ 是(1.1)～(1.3)的解。显然 L_0 也有极值原理，同引理2。因为

$$L_0(\pm u)=\mp c(x,t,0)$$

且存在常数$M_1>0$，使$|c(x,t,0)|\leqslant M_1$ $((x,t)\in Q)$。取

$$M=\max\left\{\frac{1}{\nu}\max_{(x,t)\in Q}|c(x,t,0)|,\ \max_{0\leqslant x\leqslant l}|\varphi(x)|\right\},$$

则我们有

$$L_0(\pm u)\leqslant L_0 M\qquad((x,t)\in Q),$$
$$\pm u\leqslant M\qquad((x,t)\in\Gamma).$$

由L_0的极值原理得$\pm u\leqslant M$，即$|u|\leqslant M$，$(x,t)\in Q$。定理 1 证毕。

定理2 设 u 是(1.1)～(1.3)的解，并具有一定的光滑度，则有

$$\left|\frac{\partial^m u}{\partial x^{m_1}\partial t^{m_2}}\right|\leqslant M\varepsilon^{-\frac{m_1}{2}},$$

其中 M是与ε无关的常数。

证明 根据对于问题(1.1)～(1.3)的解的渐近性质的分析[1]，知道解在$x=0$和$x=l$附近出现边界层，在$t=0$附近没有边界层，因此可知

$$\left|\frac{\partial^{m_2}u}{\partial t^{m_2}}\right|\leqslant M\qquad(m_2=1,2,\cdots)$$

由(1.1)知$|\partial^2u/\partial x^2|\leqslant M\varepsilon^{-1}$。利用[2]中的引理1可得$|\partial u/\partial x|\leqslant M\varepsilon^{-1/2}$。

可以用归纳法证明对于$n>2$有$|\partial^n u/\partial x^n|\leqslant M\varepsilon^{-\frac{n}{2}}$成立。假定已经证明了直到 $n-1$ 结论均成立，对原方程(1.1)两端关于x微分 $n-2$ 次，利用复合函数求导公式及归纳法假设，容易证明对于n，结论也是成立的。定理 2 证毕。

三、差分格式

我们对区域Q进行划分，在x方向上作非均匀划分，在t方向作均匀划分，得到$Q_h^\tau=\{(x_k, t_i)\}$，其中

$$x_0=0<x_1<\cdots<x_k<\cdots<x_N=l,\quad 0\leqslant k\leqslant N,\ N\text{是偶数},$$

$$t_i=i\tau,\quad \tau=\frac{T}{I},\quad 0\leqslant i\leqslant I.$$

对于定义在Q_h^τ上的网格函数u_k^i，定义

$$\delta_{\bar{t}}u_k^i=\frac{u_k^i-u_k^{i-1}}{\tau},$$

$$\delta_{\bar{x}\hat{x}}u_k^i=\frac{1}{\hbar_k}\left[\frac{u_{k+1}^i-u_k^i}{h_{k+1}}-\frac{u_k^i-u_{k-1}^i}{h_k}\right],$$

$$h_k=x_k-x_{k-1},\quad \hbar_k=\frac{1}{2}(h_k+h_{k+1}),$$

并定义差分算子

$$\Lambda u_k^i=\delta_{\bar{t}}u_k^i-\varepsilon b(x_k,t_i)\delta_{\bar{x}\hat{x}}u_k^i+c(x_k,t_i,u_k^i) \tag{3.1}$$

我们用下面的差分问题来逼近原问题(1.1)～(1.3)

$$\left.\begin{aligned}&\Lambda u_k^i=0\qquad ((x_k,t_i)\in Q_h^\tau)\\&u_k^0=\varphi(x_k),\quad u_0^i=u_N^i=0\end{aligned}\right\} \tag{3.2}$$

引入记号

$$h=\max_k h_k,$$

$$\eta_k=\exp(-m_0\varepsilon^{-1/2}x_{k-1})+\exp(-m_0\varepsilon^{-1/2}(l-x_k))\qquad (m_0\text{是某个常数}),$$

$$\sigma_k=\min[h_k\varepsilon^{-1/2}\eta_k+h_{k+1}\varepsilon^{-1/2}\eta_{k+1},\ \eta_k+\eta_{k+1}]\qquad (k=1,2,\cdots)$$

我们要构造这样的非均匀网格(参见[5])，使得

$$\max_{1\leqslant k\leqslant N-1}\sigma_k\leqslant Mh,\ \text{且}h=O\left(\frac{1}{N}\right) \tag{3.3}$$

其中M是不依赖于h，ε的常数。

有不少满足上面要求的网格加密公式，参见[2]，[3]，[5]。下面我们采用[2]中的Bakhvalov公式。

令

$$\lambda(s)=\begin{cases}\psi(s)\equiv la\varepsilon^{1/2}\ln\left(1-\dfrac{s}{q}\right)^{-1} & (s\in[0,\bar{a}])\\[2mm] \psi(\bar{a})+\psi'(\bar{a})(s-\bar{a}) & \left(s\in\left[\bar{\alpha},\dfrac{1}{2}\right]\right)\\[2mm] l-\lambda(1-s) & \left(s\in\left[\dfrac{1}{2},1\right]\right)\end{cases} \tag{3.4}$$

其中 $0<q<0.5$是某个常数，a是满足一定条件的常数，$\bar{a}$由方程

$$\psi(\bar{a})+\psi'(\bar{a})\left(\frac{1}{2}-\bar{a}\right)=\frac{l}{2},$$

确定. 可以证明$\bar{a}<q$.

对于$\lambda(s)$的定义域$[0,1]$进行N等分. 令$s_k=k/N$和$x_k=\lambda(s_k)$，则形成了对区间$[0,l]$的非均匀剖分，可以证明这样均造的非均匀网格满足条件(3.3)

对于差分算子Λ有离散极值原理.

引理3 设u_k^i，v_k^i是定义在Q_h^τ上的两个网格函数，在Q_h^τ上有$\Lambda u_k^i\geqslant \Lambda v_k^i$，在$Q_h^\tau$的边界$\Gamma_h^\tau\equiv\{(x_k,t_0),\ k=0,1,\cdots,N\}\cup\{(x_0,t_i),\ (x_N,t_i),\ i=0,1,\cdots,I\}$上，$u_k^i\geqslant v_k^i$，则在$Q_h^\tau$上有$u_k^i\geqslant v_k^i$.

证明 类似于引理2的证明. 引理3证毕.

引理4 设u_k^i，$\bar{u}_k^i$是定义在Q_h^τ上的两个网格函数，$w_k^i=u_k^i-\bar{u}_k^i$，$r_k^i=\Lambda u_k^i-\Lambda\bar{u}_k^i$. 如果$\max|w_k^i|\leqslant A_0$，$(x_k,t_i)\in\Gamma_h^\tau$，则有

$$\max_{Q_h^\tau}|w_k^i|\leqslant\frac{1}{\nu}(\max_{Q_h^\tau}|r_k^i|)+A_0.$$

证明
$$\begin{aligned}r_k^i&=\Lambda u_k^i-\Lambda\bar{u}_k^i\\&=\frac{w_k^i-w_k^{i-1}}{\tau}-\varepsilon b(x_k,t_i)\delta_{\bar{x}\hat{x}}w_k^i+c_u(x_k,t_i,\xi_i)w_k^i.\end{aligned}$$

对上式两端同乘$2w_k^i$，注意到$2w_k^i\delta_{\bar{x}\hat{x}}w_k^i\leqslant\delta_{\bar{x}\hat{x}}(w_k^i)^2$，得

$$\begin{aligned}\nu(w_k^i)^2+\frac{1}{\nu}(r_k^i)^2\geqslant 2&\left[\frac{(w_k^i)^2-\frac{1}{2}(w_k^{i-1})-\frac{1}{2}(w_k^i)^2}{\tau}\right]\\&-\varepsilon b(x_k,t_i)\delta_{\bar{x}\hat{x}}(w_k^i)^2+2\nu(w_k^i)^2.\end{aligned}$$

令
$$\Lambda_1u_k^i\equiv\frac{1}{\tau}[u_k^i-u_k^{i-1}]-\varepsilon b(x_k,t_i)\delta_{\bar{x}\hat{x}}u_k^i+\nu u_k^i,$$

则
$$\Lambda_1(w_k^i)^2\leqslant\frac{1}{\nu}(r_k^i)^2\leqslant\frac{1}{\nu}(\max_{Q_h^\tau}|r_k^i|)^2.$$

显然Λ_1同Λ一样，也满足离散极值原理，取

$$M=\frac{1}{\nu^2}(\max_{Q_h^\tau}|r_k^i|)^2+A_0^2,$$

则
$$\Lambda_1M\geqslant\Lambda_1(w_k^i)^2\qquad((x_k,t_i)\in Q_h^\tau),$$
$$M\geqslant(w_k^i)^2\qquad((x_k,t_i)\in\Gamma_h^\tau).$$

因此
$$(w_k^i)^2\leqslant M=\frac{1}{\nu^2}(\max_{Q_h^\tau}|r_k^i|)^2+A_0^2\qquad((x_k,t_i)\in Q_h^\tau)$$

$$\max_{Q_h^\tau}|w_k^i|\leqslant\frac{1}{\nu}(\max_{Q_h^\tau}|r_k^i|)+A_0.$$ 引理 4 证毕.

由差分问题(3.2)，我们得到一系列非线性代数方程组，可以采用适当的迭代法 进行求解. 例如可采用普通的Newton 迭代法，也可采用[4]中所提出的迭代法，略加修改后进行求解.

四、差分格式的误差分析

利用关于问题(1.1)～(1.3)的解及其导数的估计，我们有下面的古典估计.

定理3　设 u 是问题(1.1)～(1.3)的解，u_k^i 是差分问题(3.1)～(3.2)的解，则有下面的估计

$$|u(x_k,t_i)-u_k^i|\leqslant\begin{cases}M\left(\tau+\dfrac{h}{\varepsilon^{1/2}}\right),\\[2ex] M\left(\tau+\dfrac{\max\limits_k|h_{k+1}-h_k|}{\varepsilon^{1/2}}+\dfrac{h^2}{\varepsilon}\right),\end{cases}$$

其中　$(x_k,t_i)\in Q_h^\tau$.

证明　$\Lambda u(x_k,t_i)-\Lambda u_k^i=\Lambda u(x_k,t_i)-L_\varepsilon u(x_k,t_i)$

$$=\left[\frac{u(x_k,t_i)-u(x_k,t_{i-1})}{\tau}-u_t(x_k,t_i)\right]-\varepsilon b(x_k,t_i)[\delta_{\bar{x}\hat{x}}u(x_k,t_i)-u_{xx}(x_k,t_i)].$$

利用Taylor公式，关于x分别展开到三阶导数项和四阶导数项，关于 t 展开到二阶导数项，根据定理 2 的结论得

$$|\Lambda u(x_k,t_i)-\Lambda u_k^i|\leqslant\begin{cases}M\left(\tau+\dfrac{h}{\varepsilon^{1/2}}\right),\\[2ex] M\left(\tau+\dfrac{\max\limits_k|h_{k+1}-h_k|}{\varepsilon^{1/2}}+\dfrac{h^2}{\varepsilon}\right),\end{cases}\qquad ((x_k,t_i)\in Q_h^\tau)$$

因为在边界Γ_h^τ，$u_k^i=u(x_k,t_i)$，所以根据引理4，其中$A_0=0$，得对于$(x_k,t_i)\in Q_h^\tau$，有

$$|u(x_k,t_i)-u_k^i|\leqslant\frac{1}{\nu}|\Lambda u(x_k,t_i)-\Lambda u_k^i|\leqslant\begin{cases}M\left(\tau+\dfrac{h}{\varepsilon^{1/2}}\right),\\[2ex] M\left(\tau+\dfrac{\max\limits_k|h_{k+1}-h_k|}{\varepsilon^{1/2}}+\dfrac{h^2}{\varepsilon}\right).\end{cases}$$

定理 3 证毕.

借助于解的渐近性质，我们来讨论差分格式误差的非古典估计. 由于在$x=l$附近的情况与在$x=0$附近的情况类似，故下面只讨论$[0,l/2]$中的情况.

定理4　设u是(1.1)～(1.3)的解，u_k^i是(3.1)～(3.2)的解，则对$(x_k,t_i)\in Q_h^\tau$有

$$|u(x_k,t_i)-u_k^i|\leqslant M\left(\tau+h+\sqrt{\varepsilon}\ln\frac{1}{\varepsilon}\right)\tag{4.1}$$

证明　根据[1]，有

$$u-\tilde{u}=O\left(\sqrt{\varepsilon}\ln\frac{1}{\varepsilon}\right)\tag{2.4}$$

这里 $\tilde{u}$ 是摄动问题解的渐近展开式(2.3). 因此

$$u(x_k,t_i)-u_k^i=\tilde{u}(x_k,t_i)-u_k^i+O\left(\sqrt{\varepsilon}\ln\frac{1}{\varepsilon}\right)\qquad((x_k,t_i)\in Q_h^\tau)\tag{4.2}$$

由于我们只考虑$[0,l/2]$中的情况，所以 $\tilde{u}$ 中的$v_0^1(x,t)$在此可略去不考虑.

因为$\Lambda u_k^i=0$，所以

$$\begin{aligned}\Lambda\tilde{u}(x_k,t_i)-\Lambda u_k^i&=\Lambda\tilde{u}(x_k,t_i)\\&=\delta_{\bar{t}}\tilde{u}_k^i-\varepsilon b(x_k,t_i)\delta_{\bar{x}\hat{x}}\tilde{u}_k^i+c(x_k,t_i,\tilde{u}_k^i)\\&=\delta_{\bar{t}}(u_0)_k^i-\varepsilon b(x_k,t_i)\delta_{\bar{x}\hat{x}}(u_0)_k^i+\delta_{\bar{t}}(v_0^0)_k^i-\varepsilon b(x_k,t_i)\delta_{\bar{x}\hat{x}}(v_0^0)_k^i\\&\quad+c(x_k,t_i,(u_0)_k^i+(v_0^0)_k^i).\end{aligned}$$

利用Taylor公式和(2.1)，(2.2)，有

$$\Lambda\tilde{u}(x_k,t_i)-\Lambda u_k^i=A_1+A_2+A_3 \tag{4.3}$$

其中

$$A_1=-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2}\right)_k^{\xi_9}\tau-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 v_0^0}{\partial t^2}\right)_k^{\xi_{10}}\tau-\varepsilon b(x_k,t_i)\delta_{\bar{x}\hat{x}}(u_0)_k^i,$$

$$A_2=-c(x_k,t_i,(u_0)_k^i)-c(0,t_i,u_0(0,t_i)+(v_0^0)_k^i)$$
$$+c(0,t_i,u_0(0,t_i))+c(x_k,t_i,(u_0)_k^i+(v_0^0)_k^i),$$

$$A_3=b(0,t_i)\varepsilon\left(\frac{\partial^2 v_0^0}{\partial x^2}\right)_k^i-\varepsilon b(x_k,t_i)\delta_{\bar{x}\hat{x}}(v_0^0)_k^i.$$

利用Taylor公式以及$\frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2}$，$\frac{\partial^2 v_0^0}{\partial t^2}$和$\frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3}$的有界性，易得

$$|A_1|\leqslant M(\tau+\varepsilon h). \tag{4.4}$$

而

$$A_2=\int_0^1 c_{ux}(\xi_{11},t_i,(u_0)_k^i+s(v_0^0)_k^i)x_k(v_0^0)_k^i ds$$
$$+\int_0^1 c_{uu}(0,t_i,\xi_{12}+s(v_0^0)_k^i)((u_0)_k^i-u_0(0,t_i))(v_0^0)_k^i ds.$$

考虑到ξ_{11}，ξ_{12}的有界性，同时$(u_0)_k^i-u_0(u_0(0,t_i)=(u_0)_x(\xi_{13},t_i)x_k$，以及$\xi_{13},u_0,v_0^0$，$(u_0)_x$的有界性，利用(2.5)得

$$|A_2|\leqslant M|x_k(v_0^0)_k^i|\leqslant Mx_k\exp(-2\varepsilon^{-1/2}x_k)\leqslant M\sqrt{\varepsilon} \tag{4.5}$$

因为

$$|A_3|\leqslant\left|\varepsilon b(x_k,t_i)\left(\left(\frac{\partial^2 v_0^0}{\partial x^2}\right)_k^i-\delta_{\bar{x}\hat{x}}(v_0^0)_k^i\right)\right|$$
$$+\left|\varepsilon(b(0,t_i)-b(x_k,t_i))\left(\frac{\partial^2 v_0^0}{\partial x^2}\right)_k^i\right|.$$

利用(2.5)同上得

$$\left|\varepsilon(b(0,t_i)-b(x_k,t_i))\left(\frac{\partial^2 v_0^0}{\partial x^2}\right)_k^i\right|\leqslant M\sqrt{\varepsilon},$$

$$\left|\varepsilon b(x_k,t_i)\left(\left(\frac{\partial^2 v_0^0}{\partial x^2}\right)_k^i-\delta_{\bar{x}\hat{x}}(v_0^0)_k^i\right)\right|\leqslant M(\varepsilon^{-1/2}\exp(-2\varepsilon^{-1/2}x_k)h_{k+1}$$
$$+\varepsilon^{-1/2}\exp(-2\varepsilon^{-1/2}x_{k-1})h_k).$$

根据网格划分的性质(3.3)，取$m_0=2$得

$$\left|\varepsilon b(x_k,t_i)\left(\left(\frac{\partial^2 v_0^0}{\partial x^2}\right)_k^i-\delta_{\bar{x}\hat{x}}(v_0^0)_k^i\right)\right|\leqslant Mh \tag{4.6}$$

故

$$|A_3|\leqslant M(h+\sqrt{\varepsilon}) \tag{4.7}$$

将(4.4)，(4.5)，(4.7)代入(4.3)得

$$|\Lambda\tilde{u}(x_k,t_i)-\Lambda u_k^i|\leqslant M(h+\tau+\sqrt{\varepsilon})\qquad((x_k,t_i)\in Q_h^\tau) \tag{4.8}$$

因为在边界Γ_h^τ上$u_k^i=u(x_k,t_i)$，所以利用(2.4)对于$(x_k,t_i)\in\Gamma_h^\tau$得

$$|\tilde{u}(x_k,t_i)-u_k^i|\leqslant M\left(\tau+h+\sqrt{\varepsilon}\ln\frac{1}{\varepsilon}\right) \tag{4.9}$$

应用引理 4，取 $A_0=M\sqrt{\varepsilon}\ln(1/\varepsilon)$，对于 $(x_k,t_i)\in Q_h^\tau$ 也有(4.9)。

合并(4.2)，(4.9)得非古典估计(4.1)。定理 4 证毕。

有了定理3和定理4，我们就得到下面的一致收敛性定理。

定理5 设u是问题(1.1)～(1.3)的解，u_k^i是差分问题(3.1)～(3.2)的解，则我们有

$$|u(x_k,t_i)-u_k^i|\leqslant M(\tau+h^{1/4})\qquad ((x_k,t_i)\in Q_h^\tau),$$

其中M是与 ε 无关的常数。

证明 当$h\leqslant\varepsilon$时利用定理3，$h\leqslant\varepsilon$时利用定理4即可。定理5证毕。

附注 经过进一步仔细分析，参见[3]，可知定理4的结论可改进为

$$|u(x_k,t_i)-u_k^i|\leqslant M\left(\tau+h^2+\sqrt{\varepsilon}\ln\frac{1}{\varepsilon}\right)\qquad ((x_k,t_i)\in Q_h^\tau).$$

因而定理5的结论也相应改进为

$$|u(x_k,t_i)-u_k^i|\leqslant M(\tau+h^{1/2})\qquad ((x_k,t_i)\in Q_h^\tau).$$

五、数 值 例 子

我们用前面建立的差分格式来计算下面一些问题。

例1
$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}-\varepsilon\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2u+\exp(-t)+\exp(-t-\varepsilon^{-1/2})=0, & (0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant t\leqslant 0.1),\\ u(x,0)=\exp(-\varepsilon^{-1/2}x)+\exp(-\varepsilon^{-1/2}(1-x))-1-\exp(-\varepsilon^{-1/2}) & (0\leqslant x\leqslant 1),\\ u(0,t)=u(1,t)=0 & (0\leqslant t\leqslant 0.1).\end{cases}$$

这个问题的精确解是

$$u(x,t)=\exp(-t-\varepsilon^{-1/2}x)+\exp(-t-\varepsilon^{-1/2}(1-x))-\exp(-t)-\exp(-t-\varepsilon^{-1/2}).$$

我们取ε分别为10^{-2}，10^{-6}。在x方向取$N=10$，在 t 方向取$I=10$。

下面表中k是结点标号，x_k是结点坐标，h_k是步长，u_k^i是差分格式的解，$u(x_k,t_i)$是精确解在结点处的值。注意到$x_0=0$，$x_{10}=1$。

表 1 $\varepsilon=0.01$，$t_i=0.1$

k	x_k	h_k	u_k^i	$u(x_k,t_i)$
1	0.2877×10^{-1}	0.2877×10^{-1}	-0.2278	-0.2262
2	0.6931×10^{-1}	0.4055×10^{-1}	-0.4553	-0.4524
3	0.1386	0.6931×10^{-1}	-0.6826	-0.6785
4	0.3053	0.1666	-0.8610	-0.8613
5	0.5000	0.1947	-0.8927	-0.8926
6	0.6947	0.1947	-0.8610	-0.8613
7	0.8614	0.1666	-0.6826	-0.6785
8	0.9309	0.6931×10^{-1}	-0.4553	-0.4524
9	0.9712	0.4055×10^{-1}	-0.2278	-0.2262

$$\max|u_k^i-u(x_k,t_i)|=0.004139.$$

表2 $\varepsilon=10^{-6}$, $t_i=0.1$

k	x_k	h_k	u_k^i	$u(x_k,t_i)$
1	0.2877×10^{-3}	0.2877×10^{-1}	-0.2280	-0.2262
2	0.6931×10^{-3}	0.4055×10^{-3}	-0.4565	-0.4524
3	0.1386×10^{-2}	0.6931×10^{-3}	-0.6929	-0.6786
4	0.8584×10^{-2}	0.7197×10^{-2}	-0.9051	-0.9047
5	0.5000	0.4914	-0.9053	-0.9048
6	0.9914	0.4914	-0.9051	-0.9047
7	0.9986	0.7197×10^{-2}	-0.6929	-0.6786
8	0.9993	0.6931×10^{-3}	-0.4565	-0.4524
9	0.9997	0.4055×10^{-3}	-0.2280	-0.2262

$$\max|u_k^i-u(x_k,t_i)|=0.001430.$$

例2
$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}-\varepsilon(x^2+1)\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2u+\sin u=0 & (0\leqslant x\leqslant 1,\ 0\leqslant t\leqslant 0.1)\\ u(x,0)=x(1-x) & (0\leqslant x\leqslant 1)\\ u(0,t)=u(1,t)=0 & (0\leqslant t\leqslant 0.1)\end{cases}$$

取ε分别为10^{-2}和10^{-6}，在t方向上取$I=10$。$u_k^i(N)$表示在x方向按非均匀网格公式划分为N部分后差分问题(3.1)～(3.2)的解。

令
$$E_1=\max_{1\leqslant k\leqslant N-1}|u_{2k}^i(2N)-u_k^i(N)|,$$
$$E_2=\max_{1\leqslant k\leqslant N-1}|u_{4k}^i(4N)-u_{2k}^i(2N)|,$$
$$\text{rate}=(\ln E_1-\ln E_2)/(\ln 2).$$

表3 $\varepsilon=0.01$, $N=6$, $t=0.1$, rate=2.183

k	x_k	$u_k(N)$
1	0.5390×10^{-1}	0.3664×10^{-1}
2	0.1792	0.1080
3	0.5000	0.1843
4	0.8202	0.1070
5	0.9461	0.3580×10^{-1}

表4 $\varepsilon=10^{-6}$, $N=6$, $t_i=0.1$, rate=2.322

k	x_k	$u_k^i(N)$
1	0.5390×10^{-3}	0.4007×10^{-3}
2	0.1792×10^{-2}	0.1331×10^{-2}
3	0.4999	0.1862
4	0.9982	0.1331×10^{-2}
5	0.9995	0.4006×10^{-3}

计算结果确认了定理5中的理论分析。

参考文献

[1] Krenogin, V. A., On the asymptotic character of solutions of rear-linear parabolic equations with a parabolic boundary layer, *Usp. Mat. Nauk.*, **16**(1) (1961), 163—169.

[2] Bakhvalov, N. S., on the optimization of the methods for solving boundary value p·oblems in the presence of a boundary layer, *Zh. Vyehisl. Mat. i Mat. Fiz.*, **9** (1969), 841—859.

[3] Vulanovic, R., On a numerical solution of a type of singularly perturbed boundary value problem by using a special discretization mesh, *Zb. rad. Psir-mat. Fak. Uniu. u Novom Sadu, Ser. Mat.*, **13** (1983), 187—201.

[4] Boglaev, I. P., An approximate solution of a nonlinear boundary value problem with a small parameter multiplying the highest derivative, *Zh. Vychisl. Mat. i Mat. Fiz.*, **24**(11) (1984), 1649—1565.

[5] Shishkin, G. I., Solution of a boundary value problem for an elliptic equation with small parameter multiplying the highest derivatives, *Zh. Vychisl. Mat. i Mat. Fiz.*, **26**(7) (1986), 1019—1031.

The Numerical Solution of a Singularly Perturbed Problem for Semilinear Parabolic Differential Eqnation

Su Yu-cheng Shen Quan

(*Nanjing University, Nanjing*)

Abstract

Numerical solution of a singularly perturbed problem for the semilinear parabolic differential equation with parabolic boundary layers is discussed. A nonlinear two-level difference scheme is constructed on the special non-uniform grids. The uniform convergence of this scheme is proved and some numerical examples are given.

Key words semilinear parabolic differential equation, singularly perturbed problem, finite difference method, uniform convergence