

k个内点支承圆板的对称弯曲

李 农 付宝连

(洛阳工学院) (燕山大学)

(钱伟长推荐, 1989年8月31日收到)

摘 要

本文研究在均布载荷作用下, 表面上有 k 个等距离内点支承的弹性圆板的对称弯曲. 将自由边界位移和转角展开成 Fourier 级数, 应用文献[6]的方法, 使平衡方程和边界条件同时得到精确满足, 从而获得了挠曲面方程的解析表达式. 这是一种简便、有效的算法.

关键词 内点支承 对称弯曲 挠曲面方程

一、引 言

边界自由, 受到 k 个内点支承的圆板, 由于其边界条件的复杂性, 历来是薄板弯曲问题的难点之一. 但这种支承条件在工程实际中却是经常遇到的. 多年来, 许多学者都在寻找一种简便、通用的计算方法.

Bassali^[1] 首先采用复变函数法, 研究了这个问题. 尽管文[1]有一定的理论意义, 可遗憾的是, 它没能给出供工程上采用的数值结果来; Yu和Pan^[2] 将集中载荷作用下的圆板已知解进行叠加, 研究了同样的问题; Leiss 和 Wells^[3] 将内点约束反力按 Fourier 级数展开, 求解了二点、四点和八点支承情况. 但它们都避免不了冗长的数学运算.

文献[5]提出了用功的互等定理求解矩形薄板的挠曲面方程; 文献[6]将此定理应用于圆薄板的弯曲问题中, 建立了圆板挠曲面方程的一种通用解法.

本文应用[6]提出的方法, 研究在均布载荷作用下, 表面上有 k 个等距离内点支承的圆板的对称弯曲. 我们只要进行若干简单的定积分运算, 便可得到其挠曲面方程的解析表达式.

最后我们给几种内点支承情况下, 圆板中点的挠度值, 并与已知值进行了比较. 结果是相当一致的.

二、基本方程和公式

在极坐标下, 弹性圆薄板的控制微分方程是

$$\nabla^2 \nabla^2 W = \frac{q}{D} \quad (2.1)$$

式中 ∇^2 为 Laplace 算子, 其为

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\partial}{r \partial r} + \frac{\partial^2}{r^2 \partial \theta^2}$$

对于边界自由, 在 k 个内点被支承的圆板的边界条件是

$$\left. \begin{aligned} M_r|_{r=a} &= -D \left[\frac{\partial^2 W}{\partial r^2} + \mu \left(\frac{\partial W}{r \partial r} + \frac{\partial^2 W}{r^2 \partial \theta^2} \right) \right]_{r=a} = 0 \\ V_r|_{r=a} &= -D \left[\frac{\partial}{\partial r} \nabla^2 w + \frac{1-\mu}{r} \frac{\partial^2}{\partial r \partial \theta} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial \theta} \right) \right]_{r=a} = 0 \\ W|_{\substack{r=b \\ \theta=\theta_i}} &= 0 \quad (i=1, 2, \dots, k) \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

这里

W ——圆板挠度, μ ——泊松比, D ——弯曲刚度, q ——载荷集度, a ——圆板半径, b ——内点半径, (b, θ_i) ——内点坐标。

受真实载荷作用, 具有复杂边界条件的圆板挠曲面方程的一般表达式可写成^[6]

$$\begin{aligned} W_2(\xi, \varphi) &= \iint_A q_2(r, \theta) W_1(\xi, \varphi, r, \theta) r dr d\theta \\ &+ \sum_{i=1}^m P_{2i} W_1(\xi, \varphi, r_i, \theta_i) \\ &+ \sum_{j=1}^n M_{2rj} \left[\frac{\partial}{\partial r} W_1(\xi, \varphi, r, \theta) \right]_{\substack{r=r_j \\ \theta=\theta_j}} \\ &+ \sum_{k=1}^p M_{2\theta k} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} W_1(\xi, \varphi, r, \theta) \right]_{\substack{r=r_k \\ \theta=\theta_k}} \\ &- \int_c \left(\frac{\partial M_{1r\theta}}{\partial s} + Q_{1r} \right)_{(r,\theta,\xi,\varphi)} W_2(r, \theta) ds \\ &+ \int_c (M_{1r})_{(r,\theta,\xi,\varphi)} \frac{\partial}{\partial r} W_2(r, \theta) ds \end{aligned} \quad (2.3)$$

式中 W_1 为在流动坐标 (ξ, φ) 处作用一单位集中载荷, 周边固定圆板的基本解, 其为

$$W_1(\xi, \varphi, r, \theta) = \begin{cases} R'_0 + \sum_{m=1}^{\infty} R'_m \cos m(\theta - \varphi) & (0 \leq r \leq \xi) \\ R_0 + \sum_{m=1}^{\infty} R_m \cos m(\theta - \varphi) & (\xi \leq r \leq a) \end{cases} \quad (2.4)$$

这里

$$\left. \begin{aligned}
 R'_0 &= -\frac{1}{8\pi D} \left[(r^2 + \xi^2) \ln \frac{\xi}{a} + \frac{(a^2 + r^2)(a^2 - \xi^2)}{2a^2} \right] \\
 R_0 &= -\frac{1}{8\pi D} \left[(r^2 + \xi^2) \ln \frac{r}{a} + \frac{(a^2 + \xi^2)(a^2 - r^2)}{2a^2} \right] \\
 R'_1 &= -\frac{\xi^3}{16\pi D} \left[\frac{2(a^2 - \xi^2)r}{a^2 \xi^2} + \frac{(a^2 - \xi^2)^2 r^3}{a^4 \xi^4} - \frac{4r}{\xi^2} \ln \frac{a}{\xi} \right] \\
 R_1 &= -\frac{\xi^3}{16\pi D} \left[\frac{1}{r} + \frac{2(a^2 - \xi^2)r}{a^2 \xi^2} - \frac{(2a^2 - \xi^2)r^3}{a^4 \xi^2} - \frac{4r}{\xi^2} \ln \frac{a}{r} \right] \\
 R'_m &= \frac{\xi^m}{8m(m-1)\pi D} \left\{ \frac{r^m}{a^{2m}} \left[(m-1)\xi^2 - ma^2 + \frac{a^{2m}}{\xi^{2m-2}} \right] \right. \\
 &\quad \left. + (m-1) \frac{r^{m+2}}{a^{2m}} \left[1 - \frac{m}{m+1} \left(\frac{\xi}{a} \right)^2 - \frac{1}{m+1} \left(\frac{a}{\xi} \right)^{2m} \right] \right\} \\
 R_m &= \frac{\xi^m}{8m(m-1)\pi D} \left\{ \frac{r^m}{a^{2m}} \left[(m-1)\xi^2 - ma^2 + (m-1)r^2 \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \frac{m(m-1)}{m+1} \frac{\xi^2 r^2}{a^2} \right] + \frac{1}{r^m} \left(r^2 - \frac{m-1}{m+1} \xi^2 \right) \right\} \\
 &\quad (m=2, 3, \dots)
 \end{aligned} \right\} \tag{2.5}$$

在下列计算中，还要用到单位载荷基本解的边界性质，它们是

$$\left. \begin{aligned}
 M_{1,r}|_{r=a} &= -\frac{(a^2 - \xi^2)}{4\pi a^2} - \frac{1}{2\pi a^2} \sum_{m=1,2}^{\infty} \left(\frac{\xi}{a} \right)^m (a^2 - \xi^2) \cos m(\theta - \varphi) \\
 V_{1,r}|_{r=a} &= -\frac{1}{2\pi a} - \frac{1}{2\pi a^3} \sum_{m=1,2}^{\infty} \left(\frac{\xi}{a} \right)^m [(m+2)a^2 - m\xi^2] \cos(\theta - \varphi)
 \end{aligned} \right\} \tag{2.6}$$

三、k个内点支承，受均载作用的圆板的挠曲面方程

如图1所示，半径为 a 的圆板，在半径为 b 的内圆周上受到 k 个等距离内点支承，并承受均布载荷作用，其边界条件为方程(2.2)所表示。

对于边界自由这种广义边界，我们采用如下处理方法：假设其边界挠度和转角可展开成 Fourier 级数。考虑到弯曲的对称性，设

$$\left. \begin{aligned}
 f_a &= \sum_{m=0, k, 2k}^{\infty} f_m \cos m\theta \\
 \theta_a &= \sum_{m=0, k, 2k}^{\infty} \theta_m \cos m\theta
 \end{aligned} \right\} \tag{3.1}$$

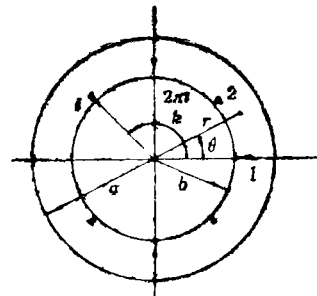


图 1

分别为边界挠度和边界转角。式中 f_m 和 θ_m 为待定的 Fourier 系数，可由边界条件确定之。这时方程(2.3)成为

$$W_2(\xi, \varphi) = \iint_A qW_1(\xi, \varphi, r, \theta) r dr d\theta + \int_0^{2\pi} M_{1r}|_{r=a} \theta_a d\theta - \int_0^{2\pi} V_{1r}|_{r=a} f_a d\theta - \sum_{i=1}^k W_{1i} R_i \quad (3.2)$$

其中 R_i 为第 i 个内点的约束反力, 大小为 $R_i = qa^2\pi/k$

$$\text{而 } \sum_{i=1}^{\infty} W_{1i} R_i = \begin{cases} \sum_{m=0, k}^{\infty} kR'_m|_{r=b} R_i \cos m\varphi & (b \leq \xi) \\ \sum_{m=0, k}^{\infty} kR_m|_{r=b} R_i \cos m\varphi & (b \geq \xi) \end{cases}$$

将(2.4), (2.5), (2.6)和(3.1)代入(3.2), 积分后得

$$W_2(\xi, \varphi) = \frac{q(a^2 - \xi^2)^2}{64D} - \sum_{m=0, k}^{\infty} \frac{\theta_m}{2a} \left(\frac{\xi}{a}\right)^m (a^2 - \xi^2) \cos m\varphi + \sum_{m=0, k}^{\infty} \frac{f_m}{2a^2} \left(\frac{\xi}{a}\right)^m [(m+2)a^2 - m\xi^2] \cos m\varphi - \sum_{i=1}^k W_{1i} R_i \quad (3.3)$$

可以证明(3.3)式已自动满足了控制微分方程(2.1)。我们通过满足边界条件(2.2), 可得到未知参数 θ_m 和 f_m 如下:

$$\left. \begin{aligned} f_0 &= \sum_{m=0, k}^{\infty} \theta_m I_{m1} - \sum_{m=k, 2k}^{\infty} f_m I_{m2} + \sum_{m=k, 2k}^{\infty} I_{m3} + K \\ \theta_0 &= \frac{qa(a^2 - 2b^2)}{8D(1+\mu)}, \quad I_{m1} = \frac{1}{2a} \left(\frac{b}{a}\right)^m (a^2 - b^2) \\ I_{m2} &= \frac{1}{2a} \left(\frac{b}{a}\right)^m [(m+2)a^2 - mb^2] \\ I_{m3} &= \frac{qa^2 b^m}{8m(m-1)D} \left\{ \frac{b^m}{a^{m+2}} [(m-1)b^2 - ma^2 + \frac{a^{2m}}{b^{2m-2}}] \right. \\ &\quad \left. + (m-1) \frac{b^{m+2}}{a^{2m}} \left[1 - \frac{m}{m+1} \left(\frac{b}{a}\right)^2 - \frac{1}{m+1} \left(\frac{a}{b}\right)^{2m} \right] \right\} \\ K &= \frac{qa^2}{8D} \left[2b^2 \ln \frac{a}{b} + \frac{(a^2 + b^2)(a^2 - b^2)}{2a^2} \right] - \frac{q(a^2 - b^2)}{64} \\ f_m &= \frac{-(2m+1+\mu)B_m + m[m(1+\mu)+2]A_m}{m^2(m^2-1)(3+\mu)(1-\mu)} \\ \theta_m &= \frac{m[m(1+\mu)+2]B_m - m^2(2m+1+\mu)A_m}{am^2(m^2-1)(3+\mu)(1-\mu)} \\ A_m &= \frac{qa^4}{2D} \left(\frac{b}{a}\right)^m \left[1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2 \right] \\ B_m &= \frac{qa^4}{2D} \left(\frac{b}{a}\right)^m \left[(m+2) - m \left(\frac{b}{a}\right)^2 \right] \quad (m=k, 2k \dots) \end{aligned} \right\} \quad (3.4)$$

于是我们就确定了挠曲面方程的解析表达式。

四、数值计算和比较

作为算例，我们考虑边界上内点支承圆板的弯曲。为此，只要令方程(3.3)和(3.4)中的 b 趋向 a ，就得到边界上有内点支承圆板的挠曲面方程

$$W_2(\xi, \varphi) = \frac{q(a^2 - \xi^2)^2}{64D} - \sum_{m=0, k}^{\infty} \frac{\theta_m \left(\frac{\xi}{a}\right)^m}{2a} (a^2 - \xi^2) \cos m\varphi$$

$$+ \sum_{m=0, k}^{\infty} \frac{f_m}{2a^2} \left(\frac{\xi}{a}\right)^m [(m+2)a^2 - m\xi^2] \cos m\varphi \tag{4.1}$$

式中

$$f_0 = - \sum_{m=k, 2k}^{\infty} f_m, \quad \theta_0 = \frac{qa(a^2 - 2b^2)}{8D(1 + \mu)}$$

$$f_m = - \frac{(2m+1+\mu)qa^4}{Dm^2(m^2-1)(3+\mu)(1-\mu)}$$

$$\theta_m = \frac{(m+2+\mu m)qa^3}{Dm(m^2-1)(3+\mu)(1-\mu)} \tag{4.2}$$

如果令 $\xi=0$ ，由(3.5)式可得到圆板中点挠度的计算公式

$$W_2(0, \varphi) = \frac{qa^4}{64D} + \frac{qa^4}{16D(1+\mu)} - \sum_{m=k, 2k}^{\infty} f_m$$

其中 f_m 由(3.6)式所确定。

下面为了验证公式的精确性，我们分别计算 $k=2, 3, 4, 5, 8$ ，即二点，三点，四点，五点和八点支承情况下的圆板中点挠度值。将这些挠度值列表并与已知解比较，可见它们是相当一致的。

表 1 圆板中点挠度值比较 (单位 qa^4/D)

内点数 文献	二点	三点	四点	五点	八点
[1]	0.270		0.084		
[2]		0.114	0.083		
[3]	0.268		0.084		0.0667
本文	0.269	0.115	0.084	0.0732	0.0679

参 考 文 献

[1] Bassali, W. A., The transverse flexure of thin elastic plates supported at several points, *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, 53 (1959), 728—743.
 [2] Yu, J. C. L., and H. H. Pan, Uniformly loaded circular plates supported at

- discrete points, *Int. J. Mech. Sci.*, 8 (1966), 333—340.
- [3] Leissa, W. and Lynn, T. Wells, On a direct Fourier solution for circular plates loaded by singularities, *The Journal of the Industrial Mathematics Society*, 20, Part 1 (1970).
- [4] Timoshenko, S. and S. Woinowsky-Krieger, *Theory of Plates and Shells*, 2nd edition (1959).
- [5] 付宝连, 应用功的互等定理求解具有复杂边界条件的矩形板的挠曲面方程, *应用数学和力学*, 3(3) (1982).
- [6] 李农、付宝连, 应用功的互等定理计算弹性圆薄板挠曲面方程, *应用数学和力学*, 9(9)(1988).

The Symmetrical Bending of an Elastic Circular Plate Supported at k Internal Points

Li Nong

(*Luoyang Institute of Technology, Luoyang*)

Fu Bao-lian

(*Yanshan University, Qinhuangdao*)

Abstract

This paper treats the symmetrical bending of a uniformly loaded circular plate supported at k internal points. The boundary displacement and slope are expanded in Fourier series. The method proposed by [6] is applied. As both the governing differential equation and boundary conditions are satisfied exactly, we therefore obtain the analytic expression of the transverse deflectional equation of the circular plate. This is an easy and effective method.

Key words: internal point support, symmetrical bending, deflectional equation