应用数学和力学，第12卷第11期（1991年11月）
Applied Mathematics and Mechanics
应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

高阶非线性常微分方程的可积类型*

汤光宋　　董巨清

（江汉大学）　　（空军雷达学院）

摘　要

本文借助于 Leibniz 公式、复合函数的高阶导数公式以及变量替换的方法，给出了较为广泛的高阶非线性常微分方程的可积类型，有的还提供了通积分的表达式。所得结论推广了文献中的结果。最后列举了实例。

关键词　高阶非线性微分方程　可积类型　通积分

一、若干定理与推论

定理1　设 $y=y(x)$，$w(y)$，$f(x)\in C^n$，$Q(x)\in C$，且$w'(y)\neq 0$，$f(x)\neq 0$，则n阶非线性方程

$$f^{(n)}w(y)+\sum_{i=0}^{n-1}C_n^i f^{(i)}\sum_{\substack{1\leq j\leq n-i\\ \sum_{k=1}^{n-i} j_k=j,\ \sum kj_k=n-i}}\frac{(n-i)!\,w^{(j)}(y)}{j_1!\cdots j_{n-i}!}\left(\frac{y^{(1)}}{1!}\right)^{j_1}\cdots$$

$$\cdot\left(\frac{y^{(n-i)}}{(n-i)!}\right)^{j_{n-i}}=Q \tag{1.1}$$

（其中 $f^{(i)}(x)$，$w^{(i)}(y)$，$y^{(i)}(x)$ 表示对各自变元的i阶导数，$i=0$，1，…，n，且规定 $f^{(0)}(x)=f(x)$，$w^{(0)}(y)=w(y)$；C_n^i为二项式系数；下同）可积，且其通积分为

$$w(y)=\frac{1}{f}\Big[c_1x^{n-1}+c_2x^{n-2}+\cdots+c_n+\overbrace{\int dx\int dx\cdots\int}^{n\text{重}}Qdx\Big] \tag{1.2}$$

其中　$c_i(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$为任意常数(下同)。

证明　利用文[1](pp197～198)中复合函数的高阶导数公式：

$$\frac{d^n}{dx^n}[w(y(x))]=\sum_{\substack{1\leq i\leq n\\ \sum_{k=1}^{l} i_k=i,\ \sum ki_k=n}}\frac{n!\,w^{(i)}(y)}{i_1!\cdots i_l!}\left(\frac{y^{(1)}}{1!}\right)^{i_1}\cdots\left(\frac{y^{(l)}}{l!}\right)^{i_l} \tag{A}$$

* 李骊推荐。1990年6月11日收到。

且令$u=w(y)$，可将方程(1.1)化为

$$\sum_{i=0}^{n} C_n^i f^{(i)} u^{(n-i)} = Q.$$

再利用文[1](p.197)中 Leibniz公式：

$$(fu)^{(n)} = \sum_{i=0}^{n} C_n^i f^{(i)} u^{(n-i)} \tag{B}$$

可将(1.1)进一步化为

$$(fu)^{(n)} = Q \tag{1.3}$$

且(1.3)与(1.1)是等价的。

方程 $(fu)^{(n)}=0$ 的通解为

$$u_0 = \frac{1}{f}(c_1 x^{n-1} + c_2 x^{n-2} + \cdots + c_n) \tag{1.4}$$

方程 $(fu)^{(n)}=Q$ 的一个特解为

$$\tilde{u} = \frac{1}{f}\overbrace{\int dx \int dx \cdots \int Q dx}^{n重} \tag{1.5}$$

于是$u=u_0+\tilde{u}$是(1.3)的通解；而$w(y)=u$是(1.1)的通积分，故由(1.4)，(1.5) 可得(1.2)。证毕。

定理1中的$n=3$时，有

推论1 设$y=y(x)$，$w(y)$与$f(x)\in C^3$，$Q(x)\in C$，且$w'(y)\neq 0$，$f(x)\neq 0$，则三阶非线性方程

$$\begin{aligned} & f y'^3 w'''(y) + [3fy'y'' + 3f'y'^2] w''(y) \\ & \quad + [fy''' + 3f'y'' + 3f''y'] w'(y) + f''' w(y) = Q \end{aligned}$$

可积，且其通积分为

$$w(y) = \frac{1}{f}\left[c_1 x^2 + c_2 x + c_3 + \int dx \int dx \int Q dx\right].$$

定理2 设 $y=y(x)$，$w(y)\in C^{n+1}$，$f(x)$，$g(x)$，$h(x)\in C^n$，$Q(x)\in C$，且 $w'(y)\neq 0$，$f(x)\neq 0$，则$(n+1)$阶非线性方程

$$\begin{aligned} & f \sum_{\substack{1\le j\le n+1 \\ \sum_{k=1}^{n+1} j_k = j,\ \sum k j_k = n+1}} \frac{(n+1)!\, w^{(j)}(y)}{j_1! \cdots j_{n+1}!} \left(\frac{y^{(1)}}{1!}\right)^{j_1} \cdots \left(\frac{y^{(n+1)}}{(n+1)!}\right)^{j_{n+1}} \\ & + \sum_{i=0}^{n-1} [C_n^{i+1} f^{(i+1)} + C_n^i g^{(i)}] \sum_{\substack{1\le j\le n-i \\ \sum_{k=1}^{n-i} j_k = j,\ \sum k j_k = n-i}} \frac{(n-i)!\, w^{(j)}(y)}{j_1! \cdots j_{n-i}!} \\ & \cdot \left(\frac{y^{(1)}}{1!}\right)^{j_1} \cdots \left(\frac{y^{(n-i)}}{(n-i)!}\right)^{j_{n-i}} + g^{(n)} w(y) + h^{(n)} = Q \end{aligned} \tag{1.6}$$

可积，且其通积分为

$$w(y)=\exp\left[-\int\frac{g}{f}dx\right]\left[\int\exp\left[\int\frac{g}{f}dx\right]\cdot\frac{1}{f}\left(c_1x^{n-1}+c_2x^{n-2}+\cdots\right.\right.$$

$$\left.\left.+c_n-2h+\overbrace{\int dx\int dx\cdots\int Qdx}^{n重}\right)dx+c_{n+1}\right] \tag{1.7}$$

证明 令$u=w(y)$，并利用公式(A)，(B)，则(1.6)的左端可化为

$$f^{(0)}u^{(n+1)}+\sum_{i=0}^{n-1}[C_n^{i+1}f^{(i+1)}+C_n^ig^{(i)}]u^{(n-i)}+g^{(n)}u^{(0)}+h^{(n)}$$

$$=\left[f^{(0)}u^{(n+1)}+\sum_{i=0}^{n-1}C_n^{i+1}f^{(i+1)}u^{(n-i)}\right]+\left[\sum_{i=0}^{n-1}C_n^ig^{(i)}u^{(n-i)}+g^{(n)}u^{(0)}\right]+h^{(n)}$$

$$=\sum_{i=0}^{n}C_n^if^{(i)}u^{(n+1-i)}+\sum_{i=0}^{n}C_n^ig^{(i)}u^{(n-i)}+h^{(n)}$$

$$=(fu')^{(n)}+(gu)^{(n)}+h^{(n)}.$$

于是(1.6)可化为

$$(fu'+gu+h)^{(n)}=Q \tag{1.8}$$

容易求得(1.8)的通解u，其表达式即为(1.7)的右端；而$u=w(y)$，故(1.7)成立。证毕。

定理2中的$f=0$时，有

推论2 设$y=y(x)$，$w(y)$，$g(x)$，$h(x)\in C^n$，$Q(x)\in C$，且$w'(y)\neq 0$，$g(x)\neq 0$，则n阶非线性方程

$$\sum_{i=0}^{n-1}C_n^ig^{(i)}\sum_{\substack{1\leqslant j\leqslant n-i\\ \sum_{k=1}^{n-i}j_k=j,\ \sum kj_k=n-i}}\frac{(n-i)!\,w^{(j)}(y)}{j_1!\cdots j_{n-i}!}\left(\frac{y^{(1)}}{1!}\right)^{j_1}\cdots\left(\frac{y^{(n-i)}}{(n-i)!}\right)^{j_{n-i}}$$

$$+g^{(n)}w(y)+h^{(n)}=Q$$

可积，且其通积分为

$$w(y)=\frac{1}{g}\left[c_1x^{n-1}+c_2x^{n-2}+\cdots+c_n-2h+\overbrace{\int dx\int dx\cdots\int Qdx}^{n重}\right].$$

以下的定理3和定理4是比定理1和定理2更普遍的结论，只是不便给出其通积分的一般表达式，而要运用解常系数线性方程的方法去求解。

定理3 设$y=y(x)$，$w(y)$，$f(x)\in C^n$，$Q(x)\in C$，且$w'(y)\neq 0$，$f(x)\neq 0$，则n阶非线性方程

$$\sum_{i=0}^{n}a_{n-i}f^{(i)}w(y)+\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{i=0}^{j}a_{j-i}C_{n-(j-i)}^if^{(i)}\sum_{\substack{1\leqslant l\leqslant n-j\\ \sum_{k=1}^{n-j}l_k=l,\ \sum kl_k=n-j}}\frac{(n-j)!\,w^{(l)}(y)}{l_1!\cdots l_{n-j}!}$$

$$\cdot\left(\frac{y^{(1)}}{1!}\right)^{l_1}\cdots\left(\frac{y^{(n-j)}}{(n-j)!}\right)^{l_{n-j}}=Q \tag{1.9}$$

（其中a_j为常数，$j=0$，1，…，n，且$a_0=1$，下同）可经变换

$$u=w(y),\ z=fu \tag{1.10}$$

化为常系数线性方程

$$\sum_{j=0}^{n}a_j z^{(n-j)}=Q \tag{1.11}$$

证明 将变换(1.10)代入(1.9)中，并利用公式(A)，(B)以及公式：

$$\sum_{j=0}^{n}\sum_{i=0}^{n-j}b_{ij}=\sum_{j=0}^{n}\sum_{i=0}^{j}b_{i,j-i} \tag{C}$$

可将方程(1.9)化为(1.11)。证毕。

常系数线性方程$\sum\limits_{j=0}^{n}a_j y^{(n-j)}=Q$是定理3中的方程(1.9)当$f=1$，$w(y)=y$时的特例。

定理4 设 $y=y(x)$，$w(y)\in C^{n+1}$，$f(x)$，$g(x)$，$h(x)\in C^n$，$Q(x)\in C$，且$w'(y)\neq 0$，$f(x)\neq 0$，则$(n+1)$阶非线性方程

$$\sum_{i=0}^{n}a_{n-i}[f^{(i)}w'(y)y'+g^{(i)}w(y)+h^{(i)}]+\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{i=0}^{j}a_{j-i}C_{n-(j-i)}^{i}$$

$$\cdot\Bigg[f^{(i)}\sum_{\substack{1\leqslant l\leqslant n+1-j\\ \sum_{k=1}^{n+1-j}l_k=l,\ \sum kl_k=n+1-j}}\frac{(n+1-j)!\,w^{(l)}(y)}{l_1!\cdots l_{n+1-j}!}\left(\frac{y^{(1)}}{1!}\right)^{l_1}\cdots\left(\frac{y^{(n+1-j)}}{(n+1-j)!}\right)^{l_{n+1-j}}$$

$$+g^{(i)}\sum_{\substack{1\leqslant l\leqslant n-j\\ \sum_{k=1}^{n-j}l_k=l,\ \sum kl_k=n-j}}\frac{(n-j)!\,w^{(l)}(y)}{l_1!\cdots l_{n-j}!}\left(\frac{y^{(1)}}{1!}\right)^{l_1}\cdots\left(\frac{y(n-j)}{(n-j)!}\right)^{l_{n-j}}\Bigg]=Q \tag{1.12}$$

可经变换

$$u=w(y),\ z=fu'+gu+h \tag{1.13}$$

化为常系数线性方程

$$\sum_{j=0}^{n}a_j z^{(n-j)}=Q \tag{1.14}$$

证明 利用变换(1.13)以及公式(A)，(B)，(C)，可将方程(1.12)化为(1.14)。证毕。

定理4中的$f=0$时，有

推论3 设 $y=y(x)$，$w(y)$，$g(x)$，$h(x)\in C^n$，$Q(x)\in C$，且 $w'(y)\neq 0$，$g(x)\neq 0$，则n

阶非线性方程

$$\sum_{i=0}^{n} a_{n-i}[g^{(i)}w(y)+h^{(i)}]$$

$$+\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{i=0}^{j} a_{j-i}C_{n-(j-i)}^{i}g^{(i)}\sum_{\substack{1\le l\le n-j\\ \sum_{k=1}^{n-j}l_k=l,\ \sum kl_k=n-j}}\frac{(n-j)!\,w^{(l)}(y)}{l_1!\cdots l_{n-j}!}\left(\frac{y^{(1)}}{1!}\right)^{l_1}\cdots$$

$$\cdot\left(\frac{y^{(n-j)}}{(n-j)!}\right)^{l_{n-j}}=Q$$

可经变换$u=w(y)$，$z=gu+h$化为常系数线性方程(1.14)。

此外，常系数线性方程$\sum_{j=0}^{n}a_jy^{(n-j)}=Q$是定理4中的方程(1.12)当 $f=0$，$g=1$，$h=0$，$w(y)=y$时的特例。

运用定理3和定理4的证明方法还可证得以下的定理5和定理6。

定理5 设$y=y(x)$，$w(y)\in C^{n+1}$，$f(x)$，$g(x)\in C^n$，$Q(x)\in C$，且$w'(y)\neq 0$，$f(x)\neq 0$，则$(n+1)$阶非线性方程

$$\sum_{i=0}^{n}a_{n-i}x^i[f^{(i)}w'(y)y'+g^{(i)}w(y)]+\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{i=0}^{j}a_{j-i}C_{n-(j-i)}^{i}x^{n-(j-i)}$$

$$\cdot\Bigg[f^{(i)}\sum_{\substack{1\le l\le n+1-j\\ \sum_{k=1}^{n+1-j}l_k=l,\ \sum kl_k=n+1-j}}\frac{(n+1-j)!\,w^{(l)}(y)}{l_1!\cdots l_{n+1-j}!}\left(\frac{y^{(1)}}{1!}\right)^{l_1}\cdots\left(\frac{y^{(n+1-j)}}{(n+1-j)!}\right)^{l_{n+1-j}}$$

$$+g^{(i)}\sum_{\substack{1\le l\le n-j\\ \sum_{k=1}^{n-j}l_k=l,\ \sum kl_k=n-j}}\frac{(n-j)!\,w^{(l)}(y)}{l_1!\cdots l_{n-j}!}\left(\frac{y^{(1)}}{1!}\right)^{l_1}\cdots\left(\frac{y^{(n-j)}}{(n-j)!}\right)^{l_{n-j}}\Bigg]=Q \tag{1.15}$$

可经变换

$$u=w(y),\quad z=fu'+gu \tag{1.16}$$

化为 Euler方程

$$\sum_{j=0}^{n}a_jx^{n-j}z^{(n-j)}=Q \tag{1.17}$$

Euler 方程$\sum_{j=0}^{n}a_jx^{n-j}y^{(n-j)}=Q$是定理5中的方程(1.15)当$f=0$，$g=1$，$w(y)=y$ 时的特例。

定理6 设 $y=y(x)$，$w(y)\in C^{n+m}$(m 为正整数)，$f(x)\in C^n$，$Q(x)\in C$，且 $w'(y)\neq 0$，$f(x)\neq 0$，则$(n+m)$阶非线性方程

$$\sum_{j=0}^{n}\sum_{i=0}^{j} a_{j-i}C_{n-(j-i)}^{i}x^{n-(j-i)}f^{(i)}\sum_{\substack{1\leq l\leq n+m-j\\ \sum_{k=1}^{n+m-j} l_k=l,\ \sum kl_k=n+m-j}}\frac{(n+m-j)!\,w^{(l)}(y)}{l_1!\cdots l_{n+m-j}!}\left(\frac{y^{(1)}}{1!}\right)^{l_1}$$

$$\cdots\left(\frac{y^{(n+m-j)}}{(n+m-j)!}\right)^{l_{n+m-j}}=Q \tag{1.18}$$

可经变换

$$u=w(y),\quad z=fu^{(m)} \tag{1.19}$$

化为 Euier方程(1.17)。

定理6中的$f=1$，$w(y)=y$时，方程(1.18)化为

$$\sum_{j=0}^{n} a_j x^{n-j}y^{(n+m-j)}=Q.$$

此时只需作简单变换$z=y^{(m)}$，就可将它化为Euler方程(1.17)。

众所周知，在自变量代换$t=\ln x$下，Euler方程(1.17)可化为常系数线性方程。因此，与定理3和定理4一样，定理5和定理6中的方程均可化为常系数线性方程。

我们指出：总的说来，在本文中令$w(y)=y$，便可得文[2]中相应的结果；令$n=2$，可得文[3]，[4]中相应的结果。此外，在本文定理4中令$f=0$时所得的推论3，实际上就是文[5]中具有一般性的定理3.3。

二、应 用 举 例

例1 三阶非线性方程

$$6y'^3\mathrm{tg}x+18y(y'^2\sec^2x+y'y''\mathrm{tg}x)$$
$$+3y^2(6y'\sec^2x\,\mathrm{tg}x+3y''\sec^2x+y'''\mathrm{tg}x)+2y^3\sec^2x(1+3\mathrm{tg}^2x)=\sin x$$

是在定理1之推论1的方程中，取$f=\mathrm{tg}x$，$Q=\sin x$，$w(y)=y^3$ 时所得的结果。因此由推论知原方程的通积分为

$$y^3=\frac{1}{\mathrm{tg}x}\left[c_1x^2+c_2x+c_3+\int dx\int dx\int \sin x dx\right]$$
$$=\mathrm{ctg}x[c_1x^2+c_2x+c_3+\cos x].$$

例2 四阶非线性方程

$$48y'^4+6y(y'^3-12y'^2y'')+2y^2(-3y'y''+8y'y'''+6y''^2)$$
$$-y^3(2y'-y'''+2y^{(4)})-y^4=0$$

是定理4中的方程(1.12)当$n=3$，$f=1$，$g=-1/2$，$h=Q=0$，$w(y)=y^{-1}$，且$a_1=a_2=0$，$a_3=1$时的形式。根据定理4，作变换$u=w(y)=y^{-1}$，$z=u'-u/2$，可将原方程化为

$$z'''+z=0.$$

此方程的通解为

$$z=c_1\exp[-x]+\exp\left[\frac{x}{2}\right]\left(c_2\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+c_3\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right).$$

将它代入所作变换中，并解关于u的一阶线性非齐次方程，即得原方程的通积分为

$$y^{-1}=u=\exp\left[\frac{x}{2}\right]\left\{\int\left[c_1\exp[-x]+\exp\left[\frac{x}{2}\right]\left(c_2\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x\right.\right.\right.$$

$$+c_3\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\Big)\Big]\exp\Big[-\frac{x}{2}\Big]dx+c_4\Big\},$$

即

$$y^{-1}=\exp\left[\frac{x}{2}\right]\left\{\bar{c}_1\exp\left[-\frac{3}{2}x\right]+\bar{c}_2\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x+\bar{c}_3\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+\bar{c}_4\right\}.$$

其中 $\bar{c}_1\sim\bar{c}_4$ 为任意常数。

例3 五阶非线性方程

$$\begin{aligned}&[4x(-y'''+y'^3)+x^2(y^{(4)}-6y'^2y'')+x^3(y^{(5)}-10y'^2y'''\\&-15y'y''^2+5y'^5)]\cos y+[4x(3y'y'')+x^2(-4y'y'''-3y''^2+y'^4)\\&+x^3(-5y'y^{(4)}-10y''y'''+10y'^3y'')]\sin y=0\end{aligned}$$

是定理6中的方程(1.18)当 $f=1$，$Q=0$，$w(y)=\sin y$，且 $n=3$，$m=2$，$a_1=1$，$a_2=-4$，$a_3=0$时的特定方程。根据定理6，令$u=\sin y$，$z=u''$，可将原方程化为Euler方程

$$x^3z'''+x^2z''-4xz'=0.$$

此方程的通解为

$$z=u''=c_1+c_2\frac{1}{x}+c_3x^3.$$

接连积分两次，便得原方程的通积分

$$\sin y=u=\bar{c}_1+\bar{c}_2x+\bar{c}_3x^2+\bar{c}_4x^5+\bar{c}_5x\ln x.$$

其中$\bar{c}_1\sim\bar{c}_5$是任意常数。

参 考 文 献

[1] 《数学手册》编写组，《数学手册》，人民教育出版社，北京(1979).

[2] 汤光宋、原存德，关于变系数线性方程的求解，山西师范大学学报(自然科学版)，(1)(1988)，25—32.

[3] 何如鸿，关于几类二阶变系数非线性常数分方程可积条件的探讨，上海工业大学学报，(1)(1989)，1—8.

[4] 汤光宋、甘欣荣，若干二阶非线性微分方程的可积类型，江汉大学学报（自然科学版），8(1)(1991)，22—28.

[5] 李鸿祥，几类可积的非线性常微分方程（Ⅱ）——高阶方程，应用数学和力学，11(6)(1990)，521—528.

Integrable Types of Nonlinear Ordinary Differential Equations of Higher-Orders

Tane Guang-song

(Jianghan University, Wuhan)

Dong Ju-qing

(Air Force Radar Academy, Wuhan)

Abstract

In this paper,some integrable types of more general nonlinear ordinary differential equations of higher-orders are proposed in virtue of Leibniz formula, and formulas of higher-order derivatives of the composite functions as well as substitution variables. The expressions for the general integrations of some of the equations are presented. The results obtained are the generalization of those in the references. Finally, some examples are also given.

Key words nonlinear differential equation of higher order, integrable kind, general integral